

数学探索

苏格兰咖啡馆数学问题集

(美) R · D 莫尔丁 编

江嘉禾 胡师度 白苏华 译

四川教育出版社



3
...
 $\sigma(p$
every
then th
odd. But
il cases. Thu
square or twic
an odd perfe
se n is perfect, we
 $\sigma(n) = 2 \cdot p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$
e right must have $p_i^{a_i}$ either
hand it cannot be twice
me, we must have $p_i^{a_i}$ either
rs, thodd, it cannot be twice
 $\sigma(p_1^{a_1}) = 2(2q + 1) = 4q + 1$
, 3, ..., k , we must have $p_i^{a_i}$ either
nce $p_i^{a_i}$ is odd, it cannot be twice
square, implying that
 $p_2^{a_2} \cdot p_3^{a_3} \cdots p_k^{a_k} = Q^2$,
that $a_1 = 4a + 1$ for some integer a .

ISBN7—5408—0014—3/G·15

书号:7344·765 定价:2.36元

数 学 探 索

苏格兰咖啡馆数学问题集

[美] R·D莫尔丁 编

江嘉禾 胡师度 白苏华 译

四川教育出版社

一九八七年·成都

责任编辑：何伍鸣
封面设计：文小牛
版面设计：唐 瑛

数 学 探 索

四川教育出版社出版
四川省新华书店发行

(成都盐道街三号)
七二三四工厂印刷

开本787×1092毫米 1/32
1987年4月第一版

印张11.5 字数 221千
1987年4月第一次印刷

印数：1——1,300册

标准书号：ISBN7-5408-0014-3/G·15

统一书号：7344·765

定价：2.36元

内 容 提 要

本书原名《苏格兰咖啡馆数学问题集》(The Scottish Book Mathematics from the Scottish Café)。

全书分为两部分，第一部分收入了当今知名学者所做的几篇报告，第二部分是《苏格兰数学问题集》，书中收集了从1935年到1941年期间，由波兰利沃夫学派的一批数学家，在利沃夫的苏格兰咖啡馆历次聚会中提出的193个数学问题。这些问题涉及到泛函分析、无穷级数、实变函数、拓扑学、概率论、测度论、群论等领域。本书不失为现代数学历史上一本极为珍贵的文献。

书中的每一个问题，都由有关专家按现代观点写了精辟的评论或解答，还附有参考文献。全部问题有四分之三现在已经解决，其余的四分之一尚未解决，这些问题至今仍有一定的研究价值。数学研究工作者和广大的数学爱好者，如能按图索骥，无疑是大有裨益的。

本书适合高等院校师生、研究生和数学研究工作者阅读，对于广大数学爱好者也不无学习价值。

译 序

本世纪两次世界大战之间的二十年，是波兰数学从兴起到繁荣的黄金时代，这一时期的波兰数学工作对世界数学的发展做出了卓越的贡献，其影响一直持续至今，在现代数学史上占有不容忽视的地位。可是，第二次世界大战期间，不少出类拔萃的人物，有的遭到纳粹迫害，相继去世，有的为逃避战争劫难，飘零异国，这无疑使波兰的数学事业受到重创，大大影响了战后的发展。相比之下，两次大战之间那一段蓬勃发展的时期就显得特别引人注目，似乎构成现代数学史上一个独特的篇章。

第一次世界大战后，波兰重获独立，人们一扫过去的压抑心情，迸发出巨大的热情。数学，显然是最便于表现才智的地方，那里不需要过多的物质设备，一张纸，一支笔便可驰骋翱翔。当时正值集合论、拓扑学、泛函分析这些现代数学方兴未艾之际，一些有数学才能的人便抓住这些大有可为的领域开始崭露头角。他们志趣相投，亲密合作，专心致志开拓出一片片的处女地，逐渐形成当时世界知名的两个数学学派：华沙学派和利沃夫学派。前者以S·马茹尔克耶维契，W·谢尔宾斯基和K·库拉托夫斯基为代表，主要从事集合论与拓

扑学的研究；后者以S.巴纳赫和H.斯德因豪斯为代表，主要从事泛函分析的研究。这两个学派的开创性工作为这些领域后来的发展定下了基调。

特别是在利沃夫，那里的学术气氛异常浓郁，人们对于数学真可以说是如痴如醉。S.乌拉蒙在他的自传《一位数学家的经历》^①中对这种气氛有一段生动的描写：

“他（巴纳赫—引注）很喜欢同朋友和学生们长时间讨论数学，我记得同马茹尔和巴纳赫在‘苏格兰咖啡馆’的一次聚会，持续了17个钟头，除了吃饭以外没有中断，我印象最深的是，他就是在这样的交谈中讨论数学、论证数学、找出证明的。……桌面是白色大理石的，可以在上面用铅笔写字，更重要的是，写的东西很容易擦掉。”

“经常迸发出一阵交谈，在桌上写上几行，偶尔有人发出一阵笑语，接着就是长时间的沉默，其间我们只是喝着咖啡，彼此木然相向。邻桌的客人们想必为这些古怪的行为弄得莫明其妙，正是这种坚持不懈和专心致志的劲头，才是进行真正创造性数学工作最重要的前提。”

.....

“在咖啡馆里同巴纳赫，更经常是同巴纳赫及马茹尔一起进行的那些长时间的讨论，可能是一种独一无二的现象，合作的广度和深度迄今没有任何地方有超过、匹敌或相近

^① *Adventures of a Mathematician*, Charles Scribner's Sons, New York, 1978.

的。(也许战争年代在洛斯阿拉莫斯的情形是个例外^①。)”

上面提到的“苏格兰咖啡馆”就是本书的诞生地，利沃夫学派光彩夺目的数学思想正是在这成年累月的咖啡馆讨论中迸发出来的。所谓《苏格兰数学问题集》是指一本非正式的记录，收入了从1935年到1941年期间在苏格兰咖啡馆历次聚会中提出的总共193个数学问题（关于本书的轶事详见后面S.乌拉蒙的文章），涉及泛函分析、无穷级数、实变函数论、拓扑学、概率论、测度论、群论等等领域。全部问题有四分之三现在已经解决，从现在的观点看，有些也许已是当然之理，但在当时却是开拓者们相当关注的问题，其余四分之一尚未解决，而且“据专家说，仍有一定价值”（乌拉蒙语）。本书是现代数学史上一份极为珍贵的文献，读者从中可以想见当年利沃夫学派的大师们辛勤耕耘的风貌、开拓者们意气风发的形象、当年苏格兰咖啡馆里热烈讨论的场面，甚至还能听到偶尔发出的一阵笑语，如果读者心慕手追，那就无异于自己也置身苏格兰咖啡馆参与了这些讨论，想必会从中获得不少乐趣和知识。

原书由S.乌拉蒙据波兰文原稿复本译成英文，于1957年出版了油印本，分送世界各地，一时声誉鹊起，多年来不断有人索取，后来于1977年正式出版，1979年在美国北德克萨斯州立大学召开了“《苏格兰数学问题集》专题讨论会”，讨论该书的历史与影响，1983年出版了会议录，本书就是这

^① S. 乌拉蒙在第二次世界大战期间在美国洛斯阿拉莫斯试验场从事原子弹的研制工作。他由于这一工作以及后来提出氢弹构造理论基础与火箭核推力思想而名扬美国。——引注。

个会议录的中译本：第一部分是会议报告选编，收入了当今知名学者所做的几篇报告；第二部分是《苏格兰数学问题集》。与1977年版不同，这一版的编者M·莫尔丁几乎对每个问题都约请有关专家按照现代观点写了精辟的评论或解答，还附有参考文献，可以从中了解到问题的来龙去脉和现状，一般的读者如能按图索骥无疑是大有裨益的。

关于中译本有一点应当提请读者注意。由于《苏格兰数学问题集》是一份历史文献，当年利沃夫学派的大师们一目了然的一些术语，今天有的已不流行，或者意义有所改变。例如，拓扑空间 (X, τ) 的“尺化” (metrization)，现在的含义是指可以赋予 X 一个尺度 d ，使得 (X, τ) 与 (X, d) 同胚。因此，把一个尺度空间 (X, d) 重新尺化，就是指赋予 X 一个新尺度 d_1 ，使得 (X, d) 与 (X, d_1) 同胚。所以

$$d(x_n, x) \rightarrow 0 \iff d_1(x_n, x) \rightarrow 0,$$

从而它们的紧致性也是等价的。在这种意义下，“问题1”的解答是显而易见的，就是原空间应该是紧致的，这当然不是巴纳赫所要的答案。事实上，“问题1”中所谓的“重新尺化”，仅仅是指赋予一个新的尺度，并不要求拓扑结构的一致。尽管如此，但是正如S·乌拉蒙在1957年英译本序言中所说：“尽管我是某些问题的作者或合作者，我仍然觉得唯一可行的正确办法是照字面直译，对问题不加任何解释或改写”，我们的中译本也本着这种保存历史风貌的精神，对原来的问题基本上照字面直译，问题的提法、术语的运用，按照今天的观点即便不尽恰当，也不加更动。这就是要请读者注意

的。不过，好在本书已经增加了许多有益的评论和解答，有助于澄清读者的疑团。

个别排印错误或可能产生误解之处，我们以“译注”形式做了说明，供读者参考。这里应该指出的是，莫尔丁教授费心为我们编制了原书的勘误表，消除了许多排印错误（这些我们就没有一一加注了）；此外，乌拉蒙夫人也为中译本撰写了《乌拉蒙传略》。译者对他们的热情表示衷心的感谢。

译 者



《苏格兰数学问题集》的诞生地“苏格兰咖啡馆”，据七十年代初一张明信片复制。苏格兰咖啡馆在右边，罗马咖啡馆在左边。据S.乌拉蒙说，这个场面与第二次世界大战前相比变化不大。

目 录

引 言	R.D.莫尔丁 (1)
1957年洛斯阿拉莫斯限量版序言	S.乌拉蒙 (5)
1977年正式版序言	S.乌拉蒙 (9)
S.乌拉蒙传略	弗·乌拉蒙 (10)
第一部分 《苏格兰数学问题集》	
专题讨论会报告选编	(16)
《苏格兰数学问题集》轶事	S.乌拉蒙 (18)
《苏格兰数学问题集》个人纪事	M.卡兹 (34)
斯德因豪斯与波兰数学的发展	A.日依格蒙德 (47)
与《苏格兰数学问题集》有关 的我的几个“问题”	P.厄尔迪什 (55)
KKM映象及其对非线性问题 的应用	A.格拉纳斯 (66)
第二部分 《苏格兰数学问题集》	(95)
人名地名译名表	(347)

引 言

有一次，我在搞一个问题，有人善意地向我指出，我搞的问题在《苏格兰数学问题集》里已经有了。当时，我从未听说过什么《苏格兰数学问题集》，而且确实没想到这本书与苏格兰竟然是毫无瓜葛。不过，自从这次介绍以后，我对与该书诞生有关的数学家以及他们搞数学的那种魅力，就有了越来越多的认识。

《苏格兰数学问题集》使我们得到独一无二的机会，能够同时对数学发展产生过巨大影响的波兰利沃夫学派一代数学家及其思想切磋琢磨。S. 乌拉蒙在后面的报告里详尽叙述了《苏格兰数学问题集》的历史，使人对第二次世界大战前利沃夫浓郁的数学气氛得到身临其境的感受。

现在的问题集汗牛充栋，但这个集子却已是世界知名的了。其所以有此声誉，一个主要的理由也许是问题的提法清晰而简洁，数学界人士一般都能了解，而且触及有关概念的要害。

编辑本版《苏格兰数学问题集》，这是我引以为荣的赏心乐事。本版收入了1979年5月在北德克萨斯州立大学举行的“《苏格兰数学问题集》专题讨论会”上的几篇讲演。那

次会议的目的是考察《苏格兰数学问题集》的历史、进展和影响。正如J. 阿克斯托拜在会上祝酒时所说，这次会议“波兰人荟萃一堂”，其中有《苏格兰数学问题集》的原撰稿人，如乌拉蒙教授、卡兹教授以及日依格蒙德教授。本书发表了他们经过审订的讲演，还有P. 厄尔迪什教授的一篇讲演。厄尔迪什教授与前面三位志趣相投，合作紧密，但与《苏格兰数学问题集》的关系则各不相同。本书也收入了年轻一代的数学家A. 格拉纳斯教授的讲演，其中讨论了斯豪德尔的一个问题及其多方面的关联。这次会议在德克萨斯举行，这应该是不足为怪的，因为德克萨斯学派与波兰学派在数学上的相似是早就引人注目的了，首先是因为在Fundamenta Mathematicae^①上发表文章的第一个美国人是R. L. 莫尔。

只要稍事浏览就可以发现，这些问题涉及的数学范围很广，我想这是反映了为这个集子金砖铺瓦的那一群不同凡响的人的广泛兴趣。这些问题侧重于可求和理论、泛函分析与实分析、群论、点集拓扑、测度论、集合论以及概率论这些方面。此外，不难证实，这个集子的某些撰稿人，正如R. H. 宾在祝酒时所说，是这些领域里的“开路先锋”。

我一直想方设法对各个问题搜求合适的评论，不过好些问题的评论仍告阙如，其中有些问题以及若干有评论的问题至今仍未解决。还有一些问题，我就是找不到合适的专门评论（要是本版的读者能为此撰稿，我倒是感谢不尽的）。

① 《数学基础》，波兰著名数学刊物，创刊于1920年。——译注。

一个问题之后可能会见到“附注”一词，这是指在利沃夫收集问题期间就已列入《苏格兰数学问题集》的评注。本版第一次提出的后来的评论、注释或解答，则列在原来的附注之后。

这里发表的问题和原来的附注，基本上是参照早先的两个英文版《苏格兰数学问题集》，这两版都是S.乌拉蒙编的（有一版还是他出版的）。1957年出了第一版，是乌拉蒙自己从原文翻译的油印本，原文集子里的问题是多种文字写成的（大多数是波兰文）。这一版是应个人要求散发给乌拉蒙在洛斯阿拉莫斯国家试验场^①业务圈子里的人的。到1977年，鉴于向乌拉蒙教授以及洛斯阿拉莫斯试验场图书馆函索量的巨大，只有筹备一个较为正式的版本才是合乎情理的。这一版还是只有问题的译文以及当时的附注，嗣后一直由洛斯阿拉莫斯试验场发行。最近，这个集子引起了更加广泛而浓厚的兴趣，例如1979年的专题讨论会，这就为新版创造了条件。这一版至少还要收入自这些问题第一次积累成册以来所推动的某些工作。

本版的工作得到若干人士和机构的帮助，首先是S.乌拉蒙和G. C. 若塔的帮助。我真诚地感谢所有评论员慷慨提供评论和建议。显然，本版的一位主要撰稿人是J. 密切尔斯基，他的鼓励以及源源不断地提供评论和参考文献，使本版的工作得以持续进行。B. 贝耶对问题的编排提出了许

^① 美国原子弹试验基地，S.乌拉蒙自第二次世界大战以来就在该处从事原子弹的研制工作。——译注。

多值得考虑的意见。

1979年5月在邓通^①举行的《苏格兰数学问题集》专题讨论会，则是我们努力的集中体现。要是会议能够使人对利沃夫当时当地的精神和气氛有所感染，那我就如愿以偿了。这多半是发言者努力的结果，其中也有R.D.安得森和D.A.马丁，他们两人在各自领域里某些最卓越的工作，追本穷源都可以回溯到《苏格兰数学问题集》。

国家科学基金会据MCS—79—0971号拨款以及北德克萨斯州立大学，都为会议提供了资助。若干评论的撰写得到北德克萨斯州立大学一笔学术研究拨款的赞助。我真诚地感谢L.霍莉克高超的打字技术，也感谢波士顿的伯克豪塞出版社的人士协助完成本书的出版工作。

R.D.莫尔丁

① 美国北德克萨斯州立大学所在地。——译注。

1957年洛斯阿拉莫斯限量版序言

这里收集的数学问题，其原始材料是一个笔记本，那是1935年在波兰的利沃夫开始记录的。如果我的记性不错，正是S.巴纳赫提议把当地一群数学家正在探索的一些问题记录下来。当时利沃夫的数学活动热火朝天：我们有些人实际上是天天见面，非正式地分成一些小组，随时讨论有共同兴趣的问题，相互交流最近的工作和结果。当地的数学分会会有比较正式的会议（几乎每星期六傍晚举行！），除此以外，还不断有非正式的讨论，往往是在利沃夫大学附近找一家咖啡馆举行，其中有一家叫“罗马咖啡馆”，另一家叫“苏格兰咖啡馆”。这就说明了这个集子名字的由来。巴纳赫买了一本大笔记本，把它存放在苏格兰咖啡馆的掌柜那里，只要我们一招呼，他就把笔记本从一个安全的隐藏处拿出来，放在我们的桌上。我们这些顾客走了以后，又把笔记本放回到那个隐秘的地方。

很多问题是在1935年以前早就提出来的，经过本书中列名的那些人详细讨论，后来才逐个正式记入“问题集”。所提出的问题考虑“正式”收入“问题集”以前，据信大多数