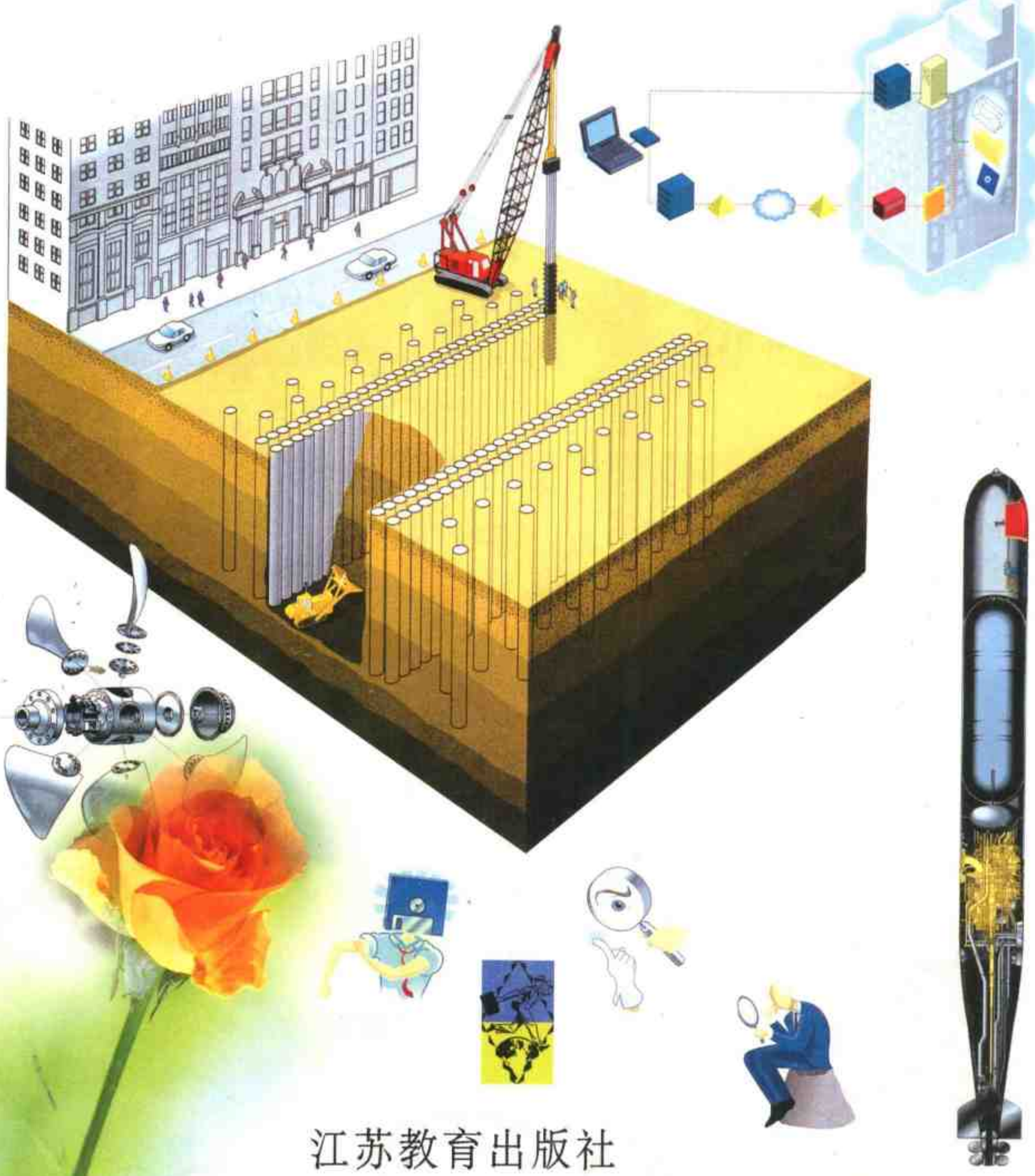
苏兆龙 编著

考研数学辅导教程

（理工类）



江苏教育出版社

考研数学
辅导教程
（理工类）

苏兆龙 编著

江苏教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

考研数学辅导教程:理工类/苏兆龙编著. 南京:江苏教育出版社,2000

ISBN 7-5343-3874-3

Ⅰ. 考… Ⅱ. 苏… Ⅲ. 高等数学-研究生-入学考试-教材 Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 63069 号

考研数学辅导教程(理工类)

苏兆龙

责任编辑 蔡 立

出 版:江苏教育出版社

(南京市马家街 31 号,邮政编码:210009)

发 行:江苏省新华书店

印 刷:淮阴新华印刷厂

(淮阴市淮海北路 44 号,邮政编码:223001)

开本 787×1092 毫米 1/16 印张 35.75 字数 817 300

2000 年 6 月第 1 版 2000 年 6 月第 1 次印刷

ISBN 7 5343-3874-3

G·3568 定价:33.00 元

江苏教育版图书若有印刷装订错误,可向承印厂调换

序　言

在朋友及学生们的鼓励(也算是“怂恿”吧)下，我编写了这本《考研数学辅导教程》，以满足朋友及同学们对考研辅导书面资料的要求，也可使更多的学生从我这本书中受惠，也希望有个机会将我前一阶段所做的工作做一个小结.

我从事考研辅导已有许多年了，甚至在全国实行统考之前就开始了.自从研究生入学考试实行全国统考以来，我所在的南京通信工程学院(现解放军理工大学的组成学院)就正式开办了“研究生入学考试辅导班”，每年都是由我担任全部数学课程的讲授.讲授获得了全体听课学生的欢迎和好评，也获得了很好的成绩.每年的及格率均在全省(工科、数学一)名列第一位(已经有十多年了)，97 届辅导班学生的及格率达 70%，99 届辅导班的及格率比全省平均及格率高出 20 个百分点.

这本书就是我在多年上辅导课的教学实践的基础上编写而成的，她是我多年工作的总结，她实际上就是我的(最新一稿的)备课笔记加以提高、加以扩充而成.既然我的讲授能使得学生的成绩普遍提高，那么相信也可以使阅读本书的读者得到许多的收益，帮助他们在考研中取得更好的成绩.

现在考研辅导书有许多种，我并不想评论谁优谁劣，我只想谈谈我这本书异于其他书的一些特点：

1. 本书是综合型的、混合型的，并不拘泥于原教材中一章一节的讲述，而是把前后的内容有机地、交叉地融合在一起，重新编排了章节.本书特别适合于在大学一、二年级已经学过高等数学课程的学生作为复习资料阅读和使用.我们这样做的原因是：考研试题大量的是综合型的、集多考点于一题的题目.

2. 本书把必要的定义、定理、公式都罗列在有关的章节，以备学生查阅.可以让学生做到：考研有此一本书足矣.

3. 本书以考试大纲为原则，凡是考纲中列举的内容都进行了复习，但在内容的安排上有简略、有详尽.对容易考到且考生掌握相对比较困难的内容作了较为详尽的讨论，列举了大量的例子，分析了各种可能的变化，力争让学生感到“难点不难”.而对虽列在考纲中但不太可能考到的内容也作了适当的讨论，一方面使学生不牵扯过多的精力；另一方面，万一考到(小概率事件发生了)，考生也不会惊慌失措、无从应对.

4. 在讲到每一章节、每一内容时，我们都对该内容在考试中出现的可能性作一估计，对整个试卷的构成也作了一个估计. 也即我们对考研考题的内容、类型、范围作一猜测. 作者每年都要进行这方面的工作，而且颇有成效，命中率相当高. 我的体会是：要站在出题人的立场来考虑今年的考题会是什么样，也即假如由我来出今年的考题，那么我应该出什么样的题呢？这样换位考虑，命中率就会提高.

5. 书中有大量的例题，包含了众多的解题技巧，许多技巧是作者自创的（不见于任何已知的书），对求解某些问题有奇效. 经过多年考试实践的证明，这些例题和技巧把整个考试范围都覆盖了，从无遗漏.

例题的讲解特别详尽，就是为了解决不能面授的缺憾. 每个例题都有分析、解答和附注，交代如何入手，如何做好第一步，讲解作者是如何想到用这个技巧的. 例题中也详细交代了解题时要注意哪些要素. 作者每年都参加阅卷工作，根据历年阅卷的经验，注意指出学生容易犯错误的地方及错误的类型，甚至列出错误的做法，以引起学生的重视和警惕.

6. 各章后面都列有一定数目的习题，这是作者经过多年揣摩精心编撰而成的，而且题目的数量也是适当的. 作者一向反对题海战术，适量做一些题是可以的，也是应该的. 但是如果整日沉浸在题海中，四处搜寻一些怪题和偏题来做，就不能深入钻研基本概念和基本运算技巧，可以说是本末倒置. 考研和高考有显著的不同. 考研的试题（尤其是大题）一般不会见诸于任何已知的书籍，要求解它主要靠基本概念、基本理论和基本技巧. 我们习题的数量虽说是中等，但覆盖面相当宽广，非常适合考研学生使用. 并且习题均有答案，便于学生查对. 习题虽说列在各章的后面，但在求解过程中往往要用到其他各章的内容，因为我们很多的习题是综合性的.

这本书是我多年心血所凝成，但毕竟是一家之言. 如有不当之处，敬请各位专家、学者和使用本书的读者不吝指教，本人自当感激不尽.

作者

2000 年春

目　录

前　　言

本书是考研数学复习用书，所以常常是整个大学数学前后的内容参插在一起讲，而不像教科书那样严格按章节次序排列，所以读者应首先对整个“高等数学”、“线性代数”、“概率论与数理统计”有个全而的理解，再来阅读本书为好.

我们建议读者按以下的次序进行复习：

1. 首先全面地、系统地阅读一下课本. 作者建议读者阅读以下几本教科书：

(1) 高等数学(同济大学编，第三版)，上、下册，包括所有讲过的内容. 凡是小字排印的，或者打“*”号的内容可以跳过不看.

(2) 线性代数(同济大学编)，也包括所有讲过的内容. 但这本书内容相对较浅，读者可参考北大编的“高等代数”有关章节(凡是同济版未涉及的内容可以不看)以及习题.

(3) 概率论与数理统计(浙江大学编).

读书的时候要弄清各个基本概念、定义、定理、公式(基本极限、求导公式、积分公式、展开公式等要做到如数家珍般地熟练)，还要搞清几个重要概念(公式、定理)之间的关系. 关于课本后的习题，可以采用这样的处理原则：凡是感到熟悉的内容，所附习题可以不做或少做；而感到不太熟悉的内容，所附习题可以多做些甚至全做.

2. 阅读本书时一方而回忆所列的内容，另一方而要认真领会本书中所列的关系式、公式，注意这些定理和公式的条件、适用范围以及所针对的对象. 仔细阅读例题，揣摩作者是如何想到这些技巧和方法的(这些都是有规律可寻的).

我有个体会，就是“读书的时候别做题，做题的时候别读书”. 最忌讳的是：读一点书，然后开始做题；做题做不会了，再到前而去翻书、找公式，完了再去做题. 这样做效果甚微，是白白浪费时间. 待掩卷之后，你会发现书上的内容在脑中成了一锅粥，毫无头绪可言. 因而作者觉得正确的做法是：先读书，先理解内容，在自认为把基本概念、基本定义、基本定理(公式)、基本运算、基本技巧都搞明白了的时候，再来做题. 做题起着巩固、加深书本知识的目的，是为了熟熟手，是为了检验自己掌握书本知识的状况，决不能试图通过做题来达到学习的目的，这样做就本末倒置了.

3. 在读完本书后可以做一些书中的习题，题量不是很大，但覆盖面比较广，我们应付考试所需要的基本内容都已经包括. 做题的目的是为了熟熟手，并检验一下自己对前面的基本知识是否已经掌握. 如果嫌所列习题的题量太大(主要是针对那些基础比较好的同学)，可以挑一些题做.

我比较反对题海战术，因此不建议同学们除此书外再找别的题做. 我不是说考试的题必出自于我这个习题集，而是说我这个习题集几乎涵盖所有的考试要求(即考点). 考研试题(尤其是大题)一般不见之于任何已知的书籍，都是出题人自编的. 因而对考生而言，取

得好成绩的关键是掌握基本概念、基本定义、基本定理、基本运算、基本技巧，而仅仅靠多做题是不能解决问题的，也许还会适得其反. 所以我建议同学们做题要“少而精”，做一个题是一个题.

书后附有习题的答案，以供同学们参考，不过也仅仅是参考而已. 我非常反对围绕着答案去做题，至少我本人从不去查对后面的答案(包括在我当学生的时候). 答数对了，并不意味你的题一定做对了；而答数错了，并不意味着你的思路一定是错的(甚至不排除有些答数本身就错的可能性).

做习题的时候，我希望同学们能认真做，包括注意书写格式. 我不赞同仅用读题和粗略思考来代替做题. 读者应该清楚，“想”和“写”是有本质性的区别的. 有些解题的关键步骤在“想”的时候可能会被忽略过去，只有在“写”的时候这些问题才会明显地表露出来. 同学们也要养成按正确格式书写的习惯. 有时候思路虽然是正确的，但由于书写的颠倒和混乱，会让阅卷的老师读不懂你的思路；即使能读懂，也会因为不满意你的书写而扣分.

最后还要说一句，部分考生在复习时存在着只注意钻研一些难题而忽略对整个理论体系的回顾和对定义、概念的复习，只注意解题的技巧而忽略基本计算能力的培养和基本求解程序的复习的问题，这些是不可取的，是只见树木而不见森林的做法. 做任何一件事都要按它的内在规律性系统地进行，复习也是如此. 这虽然是老生常谈，但如果考生能注意到这一点，自当获益匪浅.

第一章

空间解析几何

§1 向量的概念与运算

一、向量的概念

几何中向量的概念是来自于物理学的，是指既有大小又有方向的量.

两个向量相等是指它们的大小和方向完全相同.换言之，若把一个向量平行移动，使得它的起点和另一个向量的起点重合，如果两向量的终点也重合，则我们称这两个向量相等.

向量，我们一般用黑粗体小写字母表示，例如 $\boldsymbol{a}$，我们也可用上面带箭头的小写字母来表示，例如 $\vec{a}$.

如果两个向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 相等，我们记作为 $\vec{a}=\vec{b}$.

我们也有向径的概念.设 A、B 是空间中的两个点，则 $\overrightarrow{AB}$ 表示以 A 点为起点，以 B 点为终点的有向线段，$\overrightarrow{AB}$ 就是向径，向径是一种特殊的向量.向径相等同样按向量相等的原则处理.

我们可以这样定义向量的坐标：把向量 $\vec{a}$ 平行移动，使得 $\vec{a}$ 的起点与坐标原点相重合，则 $\vec{a}$ 的终点在空间坐标系中的坐标就是 $\vec{a}$ 的坐标.

向径 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标即为 B 点的坐标（的各个分量）相应地减去 A 点的坐标（的各个分量）.

以后我们讨论向量的问题时，既要考虑它的几何定义，又要考虑它的坐标，因为后者对于进行向量的运算是较为简便的.

两个向量相等的充要条件是它们对应的坐标相等.

定比分点的问题是一个或许可能考到的问题，设有点 $A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$，求 $C(x,y,z)$，使得 $AC/CB=\lambda$，λ 是一个预先给定的数(甚至可以是零，或是一个负数).

事实上我们应有$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\lambda$，解之得 $x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$. 类似地，$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$，$z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$.

$\lambda<0$ 的意义是向径$\overrightarrow{AC}$和$\overrightarrow{CB}$的方向相反.

特别重要的是 $\lambda=1$ 的情况，即 C 点是线段 AB 的中点，此时，

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},y=\frac{y_1+y_2}{2},z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

二、向量的线性运算

向量的线性运算有两种：加法和数乘.

向量 $\vec{a}$加上向量 $\vec{b}$(记作为 $\vec{a}+\vec{b}$)是将 $\vec{b}$平行移动，使 $\vec{b}$的起点和 $\vec{a}$的终点相重合，则以 $\vec{a}$的起点为起点，$\vec{b}$的终点为终点的向量即为 $\vec{a}+\vec{b}$.

这样的定义是严密的，但是不易具体操作，我们还可用坐标的运算来表示 $\vec{a}+\vec{b}$.

设 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$，则 $\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$.

向量加法的性质是通常的：交换律，结合律，含有零元素(即为零向量)，任何向量都有负向量等等.

向量的数乘是用一个数 k(在我们讨论的范围内，k 取实数)去乘以一个向量 $\vec{a}$. 如果 $k>0$，则 $k\vec{a}$的方向不变，而长度是原来的 k 倍；如果 $k<0$，则 $k\vec{a}$的方向与 $\vec{a}$的方向相反，而长度是原来的 $|k|$倍；如果 $k=0$，则 $k\vec{a}$即为零向量 $\vec{0}$，$\vec{0}$的长度为零，不定义它的方向，即零向量没有方向.

同样，上面的定义也不利于操作，我们可用坐标运算来表示 $k\vec{a}$.

设 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$，则 $k\vec{a}=(ka_1,ka_2,ka_3)$.

向量数乘的性质也是通常的：$1\cdot\vec{a}=\vec{a}$，$\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$，以及两个分配律：

$$(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a},$$

$$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}.$$

我们通常用 $\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$来记 x 轴上、y 轴上、z 轴上的单位向量(方向是正向)，则若 $\vec{a}$的坐标是(a_1,a_2,a_3)的话，$\vec{a}$可以写作为

$$\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}.$$

考试中几乎不会有这一部分的试题，但这些是基本内容，还是希望读者能熟练地掌握. 我的口头禅是：肯定不会考 $1+1=2$，但 $1+1=2$ 都不知道的人就不要去参加考试了.

三、向量的内积

向量 $\vec{a}$和 $\vec{b}$的内积又称为 $\vec{a}$和 $\vec{b}$的点乘，记作为 $\vec{a}\cdot\vec{b}$. 注意 $\vec{a}\cdot\vec{b}$这时是一个数，不再是一个向量了，因而诸如 $\vec{a}\cdot\vec{b}+3\vec{b}$的式子是没有意义的. 因为前者是个数，而后者是个向量，而向量加数是没有任何意义的. 这一点请考生加以注意. 考试时，有可能在选择题中出

现这样混乱的式子，让你进行判别和选择.

内积的定义如下：

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle,$$

其中$|\vec{a}|$，$|\vec{b}|$分别表示向量$\vec{a}$和向量$\vec{b}$的长度，$\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$表示向量$\vec{a}$与向量$\vec{b}$的夹角.

由定义我们立刻可以得到几何向量内积的 Schwarz 不等式：

$$|\vec{a}\cdot\vec{b}|\leqslant|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|.$$

上面给出的内积的定义不便于具体的操作，下面我们给出用向量坐标来表示的内积.

若$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$.

内积运算有如下性质：

(1) 严格正性　$\vec{a}\cdot\vec{a}\geqslant 0$，且$\vec{a}\cdot\vec{a}=0$的充要条件是$\vec{a}=\vec{0}$；

(2) 对称性　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$；

(3) 对第一变元的线性　$(\lambda_1\vec{a_1}+\lambda_2\vec{a_2})\cdot\vec{b}=\lambda_1\vec{a_1}\cdot\vec{b}+\lambda_2\vec{a_2}\cdot\vec{b}$.

根据对称性，对第二变元当然也具有线性性质.

我们也可以反过来用内积定义向量的长度：

$$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}. \tag{1.1}$$

向量长度具有以下性质：

(1) 严格正性　$|\vec{a}|\geqslant 0$，且$|\vec{a}|=0$的充要条件是$\vec{a}=\vec{0}$；

(2) 正齐次性　$|\lambda\vec{a}|=|\lambda|\cdot|\vec{a}|$；

(3) 三角形不等式　$|\vec{a}+\vec{b}|\leqslant|\vec{a}|+|\vec{b}|$.

这些都是非常显然的事实.

一个向量$\vec{b}$，如果$|\vec{b}|=1$，则称$\vec{b}$是一个单位向量. 注意，单位向量有无数多个. 事实上，以原点为起点，以单位球面上任何一点为终点的向径，都是一个单位向量.

若$\vec{a}\neq\vec{0}$，则向量$\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$就是一个和$\vec{a}$平行而且方向相同的单位向量.

公式(1.1)在解题时经常使用. 遇到向量的长度，我们经常把它和向量自身的内积联系在一起. 当然为了避免令人讨厌的开方运算，我们经常考虑的是长度的平方.

例 1.1　证明：$|\vec{a}+\vec{b}|^2+|\vec{a}-\vec{b}|^2=2(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2)$.

【分析】　式中出现的都是长度的平方，我们当然应该应用前面所提及的技巧：把它化成向量自身的内积. 当然我们应该从较繁的左边出发.

【证明】　我们利用内积的性质，则有

$$\begin{aligned}
&|\vec{a}+\vec{b}|^2+|\vec{a}-\vec{b}|^2\\
=&(\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+\vec{b})+(\vec{a}-\vec{b},\vec{a}-\vec{b})\\
=&(\vec{a},\vec{a})+(\vec{b},\vec{a})+(\vec{a},\vec{b})+(\vec{b},\vec{b})+(\vec{a},\vec{a})-(\vec{b},\vec{a})-(\vec{a},\vec{b})+(\vec{b},\vec{b})\\
=&2(\vec{a},\vec{a})+2(\vec{b},\vec{b})=2(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2).\qquad\square
\end{aligned}$$

【附注】　1. 读者要清楚，$(\vec{a_1}+\vec{a_2},\vec{b_1}+\vec{b_2})$拆开后应是 4 项内积的和，部分读者也许会错误地认为是两项内积的和.

2. 这个例题所列的公式称为平行四边形公式，若记平行四边形的两条边分别为$\vec{a}$和$\vec{b}$，则$\vec{a}+\vec{b}$和$\vec{a}-\vec{b}$就表示这个平行四边形的两条对角线. 因此，这个公式的几何意义是：

平行四边形两条对角线的平方和等于四边的平方和.

例 1.2. 设 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 是两条非零向量,且 $|\vec{b}|=2$,$<\vec{a},\vec{b}>=\frac{\pi}{3}$,求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|\vec{a}+x\vec{b}|-|\vec{a}|}{x}$.

【分析】 向量的长度当然是分量的连续函数,这是因为实际上它是分量的平方和的开方,因而极限可以取到向量长度的符号里去.不过这样一来,分子分母都趋于零,变成一个不定式.看来应该用罗必达法则,但是分子是个开方,求导运算极其烦琐.所以我们首先应该把分子变为长度的平方.

【解】 分子分母同乘以 $|\vec{a}+x\vec{b}|+|\vec{a}|$,则

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{|\vec{a}+x\vec{b}|-|\vec{a}|}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{|\vec{a}+x\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2}{x(|\vec{a}+x\vec{b}|+|\vec{a}|)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{(\vec{a}+x\vec{b},\vec{a}+x\vec{b})-|\vec{a}|^2}{x(|\vec{a}+x\vec{b}|+|\vec{a}|)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{2x(\vec{a},\vec{b})+x^2(\vec{b},\vec{b})}{x(|\vec{a}+x\vec{b}|+|\vec{a}|)}\\&=\frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}|}=|\vec{b}|\cos<\vec{a},\vec{b}>=2\cdot\frac{1}{2}=1.\qquad\square\end{aligned}$$

根据内积的定义,我们也可利用向量的内积来计算两条向量的夹角.设 $\vec{a},\vec{b}$ 是两条非零向量,则

$$<\vec{a},\vec{b}>=\arccos\frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}.$$

根据 Schwarz 不等式,这样的定义是有意义的.

向量 $\vec{a}(\vec{a}\neq\vec{0})$ 和三个坐标轴的夹角的余弦称为方向余弦.若 $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$,则所对应的方向余弦分别为

$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\cos\beta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\cos\gamma=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

在讨论两个非零向量夹角的时候,最重要的情况是夹角为 $\frac{\pi}{2}$ 的情况,也即两条向量垂直的情况,在高等数学中,我们经常称之为正交,记作为 $\vec{a}\perp\vec{b}$.

根据定义我们可知,两个向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 正交的充要条件是它们的内积为零,即 $(\vec{a},\vec{b})=0$.

我们约定零向量和任何向量都正交,这是因为对任何向量 $\vec{a}$ 而言,都有 $(\vec{a},\vec{0})=0$.

例 1.3 证明向量 $\vec{\alpha}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ 和向量 $\vec{\beta}=4\vec{i}+9\vec{j}+\vec{k}$ 互相垂直.

【分析】 这个题的证明是直接的,计算内积即可.

【证明】 我们有

$$(\vec{\alpha},\vec{\beta})=2\times 4+(-1)\times 9+1\times 1=0,$$

故 $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$. $\square$

例 1.4 向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 正交的充要条件是勾股定理成立,即

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2.$$

【分析】 我们还是利用前面使用过的技巧,把向量长度的平方看作是向量自身和自

身的内积.

【证明】 我们有

$$
\begin{aligned}
|\vec{a}+\vec{b}|^2 &= (\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+\vec{b}) \\
&= (\vec{a},\vec{a})+(\vec{b},\vec{b})+2(\vec{a},\vec{b}) \\
&= |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2(\vec{a},\vec{b}).
\end{aligned}
$$

$|\vec{a}+\vec{b}|^2$ 等于 $|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2$ 的充要条件是 $(\vec{a},\vec{b})=0$,也即 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 正交. □

【附注】 用同样的方法我们容易证明:若向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 两两正交,则有

$$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2.$$

希望读者把这个证明自行补上.

例 1.5 如图 1-1,在三棱锥 $O-ABC$ 中,$OA\perp BC$,$OB\perp AC$. 求证:$OC\perp AB$.

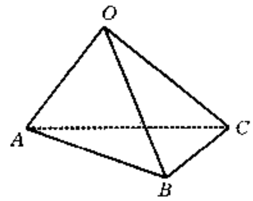


图 1-1

【分析】 也许有些学生会想到建立坐标系,以 A 点为原点,ABC 所决定的平面为 xy 平面. 当然这样也是可以进行的,但是计算量是相当的繁杂,一不留神就会出错,所以这种方法是不可取的.

我们注意到所给条件是某些向径正交,求证的也是某两个向径正交,于是想到可以用内积来做,即证 $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$. 当然在处理时我们要设法把已知条件用上,也就是要把 $\overrightarrow{OC}$ 和 $\overrightarrow{AB}$ 进行改写.

【证明】 我们有

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB} &= (\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB}) \\
&= \overrightarrow{OB}\cdot(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC})+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BC}\cdot(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB}) \\
&= \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{OB}.
\end{aligned}
$$

根据已知条件有 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$,$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$,即上式中的第一、三项为零. 再注意到 $\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{BC}$,于是

$$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{OB}=0,$$

即 $\qquad \overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{AB}$. □

【附注】 在这个题的求解中,我们没有建立任何的坐标,甚至都没有用到各线段的长度.

还有一个概念,就是向量 $\vec{a}$ 在向量 $\vec{b}$ 上的投影,我们定义其为(设 $\vec{b}\neq\vec{0}$)

$$\vec{a}\cdot\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}=|\vec{a}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle,$$

这是一个纯(有向)数量.

例 1.6 设 $\vec{m}=3\vec{i}+5\vec{j}+8\vec{k}$,$\vec{n}=2\vec{i}-4\vec{j}\quad 7\vec{k}$,$\vec{p}=5\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k}$,求向量 $\vec{a}=4\vec{m}+3\vec{n}-\vec{p}$ 在 x 轴上、y 轴上、$\vec{\beta}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ 上的投影.

【解】 我们有

$$
\begin{aligned}
\vec{a} &= 4\vec{m}+3\vec{n}-\vec{p} \\
&= 4(3\vec{i}+5\vec{j}+8\vec{k})+3(2\vec{i}-4\vec{j}-7\vec{k})-(5\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k}) \\
&= 13\vec{i}+7\vec{j}+15\vec{k}.
\end{aligned}
$$

于是 $\vec{\alpha}$在 x 轴上的投影为 13,在 y 轴上的投影为 7,在 $\vec{\beta}$上的投影为

$$\vec{\alpha}\cdot\frac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|}=\frac{13+7+15}{\sqrt{3}}=\frac{35}{\sqrt{3}}. \qquad \square$$

四、向量的外积

向量 $\vec{a}$和 $\vec{b}$的外积也称为 $\vec{a}$和 $\vec{b}$的叉乘,记作为 $\vec{a}\times\vec{b}$. 注意 $\vec{a}\times\vec{b}$是一个向量,这点与内积不同.

$\vec{a}\times\vec{b}$是一个向量,它的方向垂直于 $\vec{a}$和 $\vec{b}$所在的平面,即 $\vec{a}\times\vec{b}$既垂直于向量 $\vec{a}$,又垂直于向量 $\vec{b}$,且 $\vec{a},\vec{b},\vec{a}\times\vec{b}$成右手系.

这一点是很重要的. 如果我们要找一个向量垂直于两个已知向量的话,往往可以通过叉乘来实现我们的目的(在后面关于直线、平面的讨论的时候,经常需要这么做).

$\vec{a}\times\vec{b}$的长度我们定义为由 $\vec{a}$和 $\vec{b}$两向量为边所组成的平行四边形的面积,即

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\langle\vec{a},\vec{b}\rangle.$$

我们给出了 $\vec{a}\times\vec{b}$的方向和大小,就完全给出了向量 $\vec{a}\times\vec{b}$.

由定义可知 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$的充要条件是向量 $\vec{a}$和 $\vec{b}$平行(记作为 $\vec{a}/\!/\vec{b}$).

我们约定零向量 $\vec{0}$和任何向量都平行,这是因为对任何向量 $\vec{a}$,都有 $\vec{0}\times\vec{a}=\vec{0}$.

向量叉乘这样的定义不宜于操作,我们可以用坐标的运算来定义向量叉乘.

设 $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k},\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$,则

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}\vec{i}+\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\vec{k}.$$

向量的外积运算具有下列性质:

(1) 关于数乘的结合律

$$(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\times\vec{b});$$

(2) 分配律

$$\vec{a}\times(\vec{b}_1+\vec{b}_2)=\vec{a}\times\vec{b}_1+\vec{a}\times\vec{b}_2,$$

$$(\vec{a}_1+\vec{a}_2)\times\vec{b}=\vec{a}_1\times\vec{b}+\vec{a}_2\times\vec{b};$$

(3) 反交换律

$$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}.$$

例 1.7 已知 $\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k},\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$,求$\vec{a}\times\vec{b},7\vec{a}\times2\vec{b},\vec{a}\times\vec{i}$.

【解】 根据定义,我们有

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}=3\vec{i}-7\vec{j}-5\vec{k}.$$

根据性质,可知

$$7\vec{a}\times2\vec{b}=14(\vec{a}\times\vec{b})=42\vec{i}-98\vec{j}-70\vec{k}.$$

至于 $\vec{a}\times\vec{i}$,我们有

$$\vec{a}\times\vec{i}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=-\vec{j}-2\vec{k}. \qquad \square$$

【附注】 做完叉乘之后可作一个不完整的检验，即用 $\vec{a}\times\vec{b}$ 分别和 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 作内积，看看结果是否为 0. 如果不是 0，则我们的结果肯定有误；如果两个结果均为 0，则我们的结果十有八九是正确的.

五、混合积

所谓的混合积是指类似于 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ 的乘积，它表示以 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 为三边的平行六面体的(有向)体积. 其值也有可能是负值，负值的意义是指 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 不组成一个右手系.

由定义可知，$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0$ 的充要条件是向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面.

我们也可用向量的坐标来计算向量的混合积. 设 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$，$\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$，则我们有

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}.$$

混合积具有线性性质. 根据上面的式于，我们知混合积还有"循环交换律"，即

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}=(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a},$$

但它们和

$$(\vec{b}\times\vec{a})\cdot\vec{c}=(\vec{c}\times\vec{b})\cdot\vec{a}=(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{b}$$

相差一个负号.

例 1.8 设 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=2$，求 $[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})]\cdot(\vec{c}+\vec{a})$.

【解】 利用线性性质，我们有

$$原式=(\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c})\cdot(\vec{c}+\vec{a}).$$

$\vec{b}$ 当然平行于 $\vec{b}$，则有 $\vec{b}\times\vec{b}=\vec{0}$，于是

$$\begin{aligned}原式=&(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}+(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{a}+(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{c}\\ &+(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{a}+(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{c}+(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}.\end{aligned}$$

注意到向量的共面性，故有

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{a}=(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{a}=(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{c}=0.$$

再利用循环交换律，就有

$$\begin{aligned}原式&=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}+(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}\\ &=2\cdot(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=4. \qquad \square\end{aligned}$$

【附注】 所谓的"循环交换律"是指：将 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 用圆上的三个点表示，则按逆时针(或顺时针)方向以任何一点为起点写混合积，结果都是相同的.