微积分学

（第三册）

金　霁

河北人民出版社

微积分学

第三册

金霁

河北人民出版社

微积分学

第三册

金 霁

河北人民出版社出版（石家庄市北马路45号）

河北新华印刷一厂印刷　河北省新华书店发行

787×1092毫米 1/32 16.75 印张 356,000 字　印数：1—4,500 1984年10月第1版

1984年10月第1次印刷　统一书号：7086·1150　定价：1.55 元

序　言

本书是为没有读过大学的广大科技人员、中学数学教师和社会知识青年进修高等数学而编写的，内容由浅入深、详明直观，只要有高中的数学程度就可看懂，可供自学。为了便于读者学习，对书中的习题都一一给出答案，并对较难的题目做了详细的解答。书中有 * 号的地方，初读者可先略过不读，待以后逐步掌握。

本书可做业余大学、电视大学和函授大学的试用教材，也可供工科院校的师生教学参考。

本书分四册出版。第一册：一元函数的微分学；第二册：一元函数的积分学，空间解析几何；第三册：多元函数的微分学，无穷级数，含参变量积分与广义积分；第四册：多元函数的积分学，场论，常微分方程。

本书由南开大学周学光教授审阅。胡梦郊副教授审阅了“场论”、“常微分方程”两章，烟学敏、许珍珍和范思根三位同志对本书也提出了一些改进意见。此外，卢桂华同志给本书绘制了全部插图。对以上同志表示衷心的感谢。

作　者

1982 年元月

目　　录

第五篇　多元函数微分学

第十一章　多元函数的微分法及其应用……………………（ 1 ）
§11.1　多元函数概念……………………………………（ 1 ）
习题　11.1…………………………………………………（ 12 ）
§11.2　二元函数的极限及连续…………………………（ 13 ）
习题　11.2…………………………………………………（ 21 ）
§11.3　偏导数……………………………………………（ 22 ）
习题　11.3…………………………………………………（ 28 ）
§11.4　全微分……………………………………………（ 29 ）
习题　11.4…………………………………………………（ 45 ）
§11.5　复合函数的微分法………………………………（ 46 ）
习题　11.5…………………………………………………（ 55 ）
§11.6　高阶偏导数………………………………………（ 57 ）
习题　11.6…………………………………………………（ 65 ）
§11.7　隐函数及其微分法（一）………………………（ 66 ）
习题　11.7…………………………………………………（ 71 ）
*§11.8　隐函数及其微分法（二）………………………（ 73 ）
*习题　11.8…………………………………………………（ 85 ）
§11.9　多元函数的参数表示法及其微分法………（ 86 ）

习题 11.9 ……………………………………………………(92)
§11.10 空间曲线的切线及法平面 ………………(92)
习题 11.10 ……………………………………………………(99)
§11.11 曲面的切平面及法线 ……………………(99)
习题 11.11 ……………………………………………………(107)
§11.12 方向导数 ……………………………………(108)
习题 11.12 ……………………………………………………(112)
§11.13 二元函数的台劳公式 ……………………(113)
习题 11.13 ……………………………………………………(120)
§11.14 二元函数的极值 …………………………(120)
习题 11.14 ……………………………………………………(133)
§11.15 条件极值——拉格朗日乘数法则 ………(134)
习题 11.15 ……………………………………………………(140)
§11.16 最小二乘法 …………………………………(141)
习题 11.16 ……………………………………………………(150)

第六篇 无穷级数

第十二章 数值级数……………………………………(151)
§12.1 数值级数概念 ……………………………(151)
习题 12.1……………………………………………………(155)
§12.2 无穷级数的基本定理 ……………………(156)
习题 12.2……………………………………………………(161)
§12.3 同号级数 ……………………………………(162)
习题 12.3……………………………………………………(167)
§12.4 正项级数的两个收敛判别法 ……………(169)
习题 12.4……………………………………………………(177)

§12.5 变号级数 绝对收敛 ……………………(178)
习题 12.5……………………………………(192)
第十三章 函数级数……………………………(194)
§13.1 函数级数的收敛域 ……………………(194)
习题 13.1……………………………………(198)
§13.2 一致收敛 ………………………………(198)
习题 13.2……………………………………(207)
§13.3 一致收敛级数的性质 …………………(207)
习题 13.3……………………………………(214)
第十四章 幂级数………………………………(215)
§14.1 幂级数的收敛半径 ……………………(215)
习题 14.1……………………………………(223)
§14.2 幂级数的运算 …………………………(224)
习题 14.2……………………………………(231)
§14.3 台劳级数 ………………………………(232)
习题 14.3……………………………………(237)
§14.4 初等函数的展开式 ……………………(237)
习题 14.4……………………………………(244)
§14.5 幂级数在近似计算上的应用 …………(245)
附录 绝对误差界 有效数字………………(255)
习题 14.5……………………………………(260)
§14.6 复数、复变量的指数函数、尤拉公式 ……(261)
习题 14.6……………………………………(267)
第十五章 富里哀级数…………………………(269)
§15.1 三角级数、三角函数系的正交性 ………(269)
习题 15.1……………………………………(273)

§15.2　尤拉——富里哀公式……………………………(273)
习题　15.2……………………………………………(276)
§15.3　富里哀级数……………………………………(276)
习题　15.3……………………………………………(284)
§15.4　偶函数及奇函数的富里哀级数……………(285)
习题　15.4……………………………………………(289)
§15.5　函数展开为正弦或余弦级数………………(290)
习题　15.5……………………………………………(294)
§15.6　在任意区间上的函数的富里哀级数………(294)
习题　15.6……………………………………………(301)
*§15.7　富里哀级数的复数形式…………………(301)
习题　15.7……………………………………………(307)

第七篇　广义积分与含参变量的积分

第十六章　广义积分……………………………………(308)
§16.1　无穷区间上的积分…………………………(308)
习题　16.1……………………………………………(312)
§16.2　无界函数的积分……………………………(313)
附录　广义积分的主值…………………………………(316)
习题　16.2……………………………………………(318)
§16.3　无穷限积分收敛性判别法…………………(318)
习题　16.3……………………………………………(336)
§16.4　瑕积分收敛性判别法………………………(336)
习题　16.4……………………………………………(341)
第十七章　含参变量的积分……………………………(343)
§17.1　有限积分……………………………………(343)

习题　17.1……………………………………………………(356)
§17.2　无穷限积分 ……………………………………………(357)
习题　17.2……………………………………………………(374)
§17.3　Γ——函数 ………………………………………………(375)
习题　17.3……………………………………………………(382)
§17.4　B——函数 ………………………………………………(382)
习题　17.4……………………………………………………(386)
答案与题解……………………………………………………(387)

第五篇　多元函数微分学

第十一章　多元函数的微分法及其应用

多元函数微分学是一元函数微分学的进一步发展，因而多元函数微分学与一元函数微分学有许多共同点，也有相异之处．读者学习时，应将多元函数微分学的概念、定理以及处理问题的方法与一元函数微分学的相应部分加以比较和联系，自然会得到不少裨益．

§11.1　多元函数概念

以前学过的一元函数 $y=f(x)$，是函数只依赖于一个自变量 x，但是在很多实际问题中，经常要遇到一个量依赖于两个、三个或更多个变量的情形．

例 1　动能

$$W=\frac{1}{2}mv^2$$

就是跟随物体质量 m 和运动速度 v 两个量的变化而变化的．

例 2　理想气体的体积 V 与温度 T 成正比，而与压力 p 成反比，它们之间的关系由下面的公式给出：

$$V=\frac{RT}{p}.$$

其中 R 是常数。即体积 V 是跟随温度 T 与压力 p 两个量的变化而变化的。

例 3 长方体的体积 V 是跟随长 a、宽 b 和高 c 三个量的变化而变化的。它们之间的关系为

$$V=abc.$$

例 1、例 2 给出的是二元函数，例 3 给出的是三元函数。二元、三元以至 n 元① 的函数都是我们研究的对象，但是我们主要的是研究二元函数。因为二元函数的理论很容易地就能推广到三元以上的函数，所以对二元函数要着重地讲，而对于三元以上的函数理论，不加以特别研究。

定义 设有三个变量 x、y 和 z，如果对于 x、y 所能取的每一对值，z 按一定法则有一个或多个确定的值与之对应，则称 z 是 x、y 的函数。记作

$$z=f(x,y) \quad \text{或} \quad z=z(x,y).$$

x，y 叫做**自变量**，函数 z 也叫**因变量**，这个函数又称为**二元函数**。

当 x，y 每取一对值时，若 z 仅有一值与之对应，则称 z 是**单值函数**；若 z 有两个以上的值与之对应，则称 z 是**多值函数**。和前面一样，我们主要研究单值函数。

为了研究上的方便，我们引入 n 维空间的概念。

定义 一切 n 元有序（实数所构成的）数组 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 所组成的集合称为 n 维空间，记为 R_n。

---

① n 元函数是有 n 个自变量的函数的简称。

沿用几何术语，我们把 n 维空间内的任一元素 P 叫做 n 维空间内的一个点 $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

不难看出，二维空间就是平面上一切二元数组 (x, y) 所组成的集合 R_2，换言之，R_2 就是平面上一切点 (x, y) 的集合；类似地，三维空间 R_3 就是空间直角坐标系中一切点 (x, y, z) 的集合.

象平面及三维空间一样，设 $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 及 $Q(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 为 n 维空间中的两点，我们规定两点 P、Q 间的距离为

$$\rho = |PQ| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

又规定方程

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2 = R^2$$

为 n 维空间的球面方程，其中心为 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，半径为 R. 依此类推，我们规定下列不等式分别表示一个 n 维球体及 n 维长方体：

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2 \leqslant R^2;$$

$$\alpha_1 \leqslant x_1 \leqslant \beta_1, \quad \alpha_2 \leqslant x_2 \leqslant \beta_2, \quad \cdots, \quad \alpha_n \leqslant x_n \leqslant \beta_n.$$ ①

这样，我们可以给出 n 元函数的概念.

定义　如果给定了 n 维空间中的点集 M，对 M 中任意一点 $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，u 按一定法则有一个或多个确定的数值与之对应，则称 u 是 n 个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的函数（n 元函数），或称 u 是点 P 的函数，记为

$$u = f(x_1, x_2, \cdots, x_n),$$

或简记为

---

① n 维空间中的点、球面、球体、长方体等不再有直观的几何解释.

$$u = f(P).\tag{1}$$

其中点P的坐标$x_1, x_2, \cdots, x_n$称为自变量．点集M称为函数$u=f(P)$的定义域．①

在(1)式中如果P点只在直线上变动，u是一元函数；如果P点只在平面上变动，u是二元函数；…；如果P点只在n维空间变动，u是n元函数．这样就把一元、二元以至n元函数都在点的函数概念下统一起来．一般地，我们用一个记号

$$u = f(P)$$

来代表任意个元的点函数．

点函数这个概念，不论在实用上或理论上都很重要，读者应该重视它．

例如，带电体的各点电位、物体内各点的温度或密度的分布等都是点函数．

对于多元函数要注意以下几个问题：

(i) 我们这里研究的是实函数，就是说，不论自变量或是因变量都只在实数域内取值．

(ii) n个自变量x_1，x_2，…，x_n彼此间是独立变化的．

(iii) 当点P遍取定义域M中一切点时，其对应函数值u所组成的集合G（G是一个数集）叫做函数的值域．

为了表示二元函数的定义域，我们先介绍平面点集的邻域概念．

---

① 设函数$u=f$(P)的定义域为点集M，值域为G，则函数f就是一个由点集M到数集G的映射．数u是点P在映射f下的象，而点P是u的原象．

定义 1 设 $\rho>0$，凡满足不等式

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\rho$$

的一切点 (x, y) 所成的集合，叫做点 $A(a,b)$ ρ 的圆邻域，记为 $U(A, \rho)$，如图 11-1(a) 所示。

从几何上看 $U(A, \rho)$ 是以点 A 为圆心，ρ 为半径的圆的内部的一切点。

定义 2 设 $\delta>0$，凡满足不等式

$$|x-a|<\delta \quad \text{和} \quad |y-b|<\delta$$

的点 (x, y) 的集合，叫做点 $A(a,b)$ 的 δ 方邻域，如图 11-1 (b) 所示。

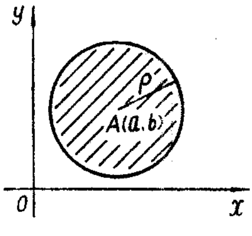

图 11-1(a)

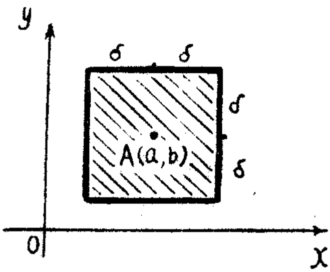

图11-1(b)

点 $A(a,b)$ 的 δ 方邻域是以点 A 为中心，2δ 为边长的正方形的内部的点集。今后如不指明，就认为遇到的点 (a,b) 的邻域是圆邻域。

满足不等式 $x_1<x<x_2$ 和 $y_1<y<y_2$ 的点 (x, y) 的点集叫做矩形域。本书很少用到矩形域。

下面用邻域概念给出内点与界点的定义。

定义 设 M 是平面点集，P 是平面上一点，

1° 对于点 P 如果存在一个邻域 $U(P、\rho)$，它全部包含在M中，即 $U(P,\rho)$的每一点都属于 M，那么称点 P 是点集 M 的**内点**（如图 11-2）；

2° 如果点 P 的任意邻域内有点属于M，同时也有点不属于 M，那么称点 P 是点集M的**界点**（如图11-3）。

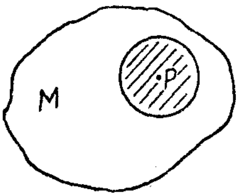

图 11-2

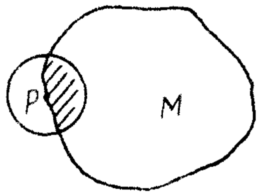

图 11-3

例 1 设点集 M 为

$$M=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\},$$

则 M 中任何点都是内点；单位圆的圆周 $x^2+y^2=1$ 上的点 (x,y)皆为 M 的界点（如图 11-4）。

例 2 设点集 N 为

$$N=\{(x,y)\mid x^2+y^2\geqslant 1\}$$

即 N 是单位圆周以外及单位圆周上一切点的集合。其中单位圆外面的点，即满足

$$x^2+y^2>1$$

的点(x,y)是N的内点；而单位圆的圆周

$$x^2+y^2=1$$

上的点都是N的界点，或者说单位圆周是集合N的境界线（边界线），如图 11-5 所示。

由这两个例子可以看出，一个点集的界点可能属于这个

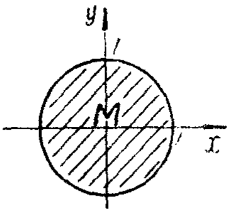

图 11-4

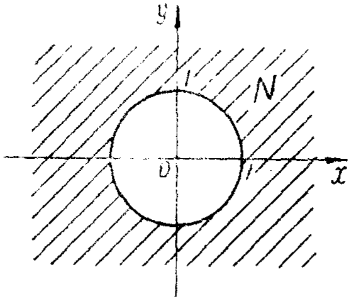

图 11-5

点集（如例 2），也可能不属于这个点集（如例 1）。

如果集合M完全由内点组成，则称M为开集. 如例 1 中的点集 M 就是一个开集，而例 2 中的点集 N 就不是开集。

现在我们给出区域的定义

定义　设 M 是一个平面点集，

1° 若 M 中每个点都是内点，并且 M 中任意两个点都能用属于 M 的折线连接起来，则称点集 M 是开区域①；

2° 若将开区域 M 加上它的一切界点，则所成的新点集叫做闭区域.

如果不需要区分是开区域还是闭区域，就把它们简称为区域.

例如，例 1 中点集 M 是一个开区域，而例 2 中的点集N是一个闭区域．但是两个不相交的开圆

① 若一集合 M 中任意两点皆能用属于 M 的折线连结起来，则称 M 是连通的集合．
采用连通集的说法，开区域就是连通的开集．

$$x^2+y^2<1,\quad (x-3)^2+y^2<1$$

构成的点集是一个开集G，而不是区域。因为在两个单位圆中分别取两个点 P、Q，无论如何也不能用属于G的折线把它们连接起来，所以开集G不是开区域（如图11-6）当然就不是区域了。

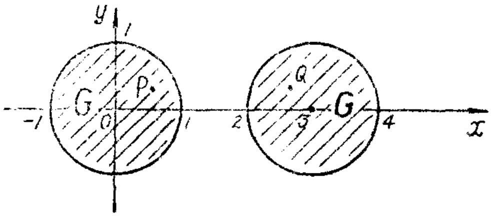

图 11-6

说得通俗些，所谓平面区域指的是由一条曲线或几条曲线（这些曲线可以延伸到无穷远）所围成的平面上的一部分。例如，三角形、平行四边形、椭圆形、第二象限、两同心圆围成的环形等等都是区域。

如果一个区域可以被包含在一个以原点为中心、半径足够大的圆内，那么，称这个区域为**有界区域**；否则，称之为**无界区域**。如例1的点集 M 就是有界（开）区域，例2的点集 N 就是无界（闭）区域。

关于多元函数 $u=f(P)$ 的定义域，与一元函数类似，**使函数 u 有定义的一切点的集合称为函数 u 的定义域**。

例3 求函数