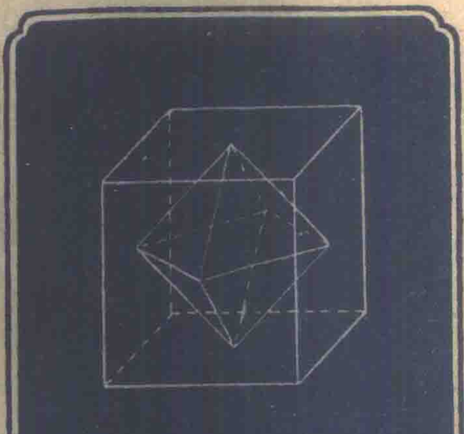
高級中学課本

立体幾何

LITI JIHE



人民教育出版社

目　錄

高級中学課本

立 体 几 何

北京市书刊出版业營业許可証出字第二号

人民教育出版社編輯出版（北京 景山 东街）

重庆人民出版社重印（重庆嘉陵路 344 号）

新 华 书 店 发 行

重庆新华印刷厂印刷

統一书号：K7012·655　字数：113千

开本：787×1092公厘　1/32　印张：$5\frac{7}{16}$

1955年第一版

1959年6月第一版第十七次印刷

重庆：183,591—229,590册

定价0.28元

第一章　直綫和平面

I　平面位置的確定

1. 引言　立体幾何所研究的是空間圖形的性質．空間圖形是所有的點不全在同一个平面內的圖形，幾何体就是空間圖形的一种例子．

空間圖形可以按照某些規則，用画在一个平面內的圖形來表示，这些圖形給予我們類似於实际空間圖形的印象．

2. 平面的表示法　我們在日常生活中見到的物体的表面，有些很像平面的一部分的，大都具有矩形的形狀，例如窗玻璃面和課桌面等．当我們在適当的角度和適当的距离观察这些物体的表面的時候，它們類似平行四边形．因此，我們通常都画平行四边形來表示平面，如圖 1．一个平面常用一个大寫的拉丁字母來表示，如圖 1（甲）中的平面 M；有時也用兩个字母來表示，如圖 1（丙）中的平面 AC 或平面 AD．

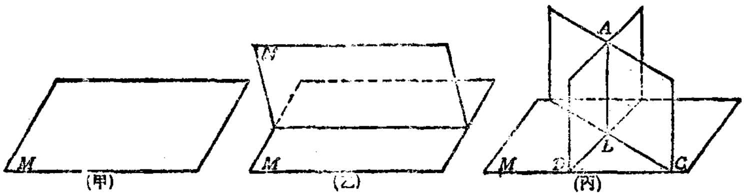


圖　1

必須注意，虽然我們在这裏画的只是一些平行四边形，但要想像它們是表示在空間無限伸展着的平面的．

3. 平面的基本性質

公理 1　如果一条直綫上的兩點在一个平面內, 那末这直綫上所有的點都在这平面內.

在这种情形我們說直綫在平面內, 或平面过直綫.

公理 2　如果兩个平面有一个公共點, 那末它們相交於过这點的一条直綫.

公理 3　过不在一条直綫上的任意三點可以作一个平面, 並且只可以作一个平面. (就是說, 不在一条直綫上的三點確定一个平面.)

推論 1　过一条直綫和这直綫外的一點可以作一个平面, 並且只可以作一个平面.

因为在直綫上的任意兩點, 同着直綫外的这一點, 組成了不在一条直綫上的三點. 根据公理 3, 过这三點可以作一个平面, 並且只可以作一个平面; 又因为这直綫上有兩點在这平面內, 所以根据公理 1, 这平面是过这直綫的. 因此这平面是过这直綫和直綫外的这一點的唯一的平面.

推論 2　过兩条相交直綫可以作一个平面, 並且只可以作一个平面.

因为这兩条直綫的交點, 同着每条直綫上交點以外的任意一點, 組成了不在一条直綫上的三點. 根据公理 3, 过这三點可以作一个平面, 並且只可以作一个平面; 又因为这兩条直綫各有兩點在这平面內, 所以根据公理 1, 这平面是过这兩条直綫的. 因此这平面是过这兩条相交直綫的唯一的平面.

推論 3 过兩条平行直綫可以作一个平面，並且只可以作一个平面.

因为根据平行直綫的定义，兩条平行直綫必在同一平面內，所以过这兩条平行直綫可以作一个平面；又根据推論 1，过这兩条直綫中的一条和另一条上的任意一點只可以作一个平面，所以过这兩条平行直綫的平面只有一个.

4. 平面繞着直綫的旋轉 过任意一条直綫可以作無數个平面. 設已知一条直綫 a（圖 2）. 在这条直綫外任意取一點 A，过直綫 a 和 A 點可以作一个平面，叫它为平面 M. 在平面 M 外另取一點 B，过直綫 a 和 B 點又可以作一个平面，叫它为平面 N. 因为 B 不在平面 M 內，所以平面 N 不能重合於平面 M. 再在平面 M 和平面 N 外另取一點 C，过直綫 a 和 C 點又可以作一个平面，叫它为平面 P. 因为 C 不在平面 M 或平面 N 內，所以平面 P 不能重合於平面 M 或平面 N. 这样継續取新的點，我們可以継續得到过已知直綫 a 的新的平面. 很明顯的，这样的平面可以得到無數个.

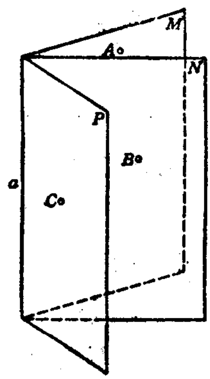


圖 2

所有这些平面都可以看做是一个平面繞着直綫 a 旋轉所達到的不同位置. 因此，平面还有下面的性質：**一个平面可以繞着在这平面內的任意一条直綫旋轉.**

5. 關於空間的作圖題 在平面幾何中的作圖，都是用作圖儀器在一个平面內完成的，但是空間圖形的作圖，却不能在一个平面

內完成．並且，空間圖形的作圖，还多了一种元素，平面；而要在空間作平面，是不能用像在平面內作直綫那样的簡單方法來完成的．

因此，对於空間圖形的作圖，首先要確定什麽叫做在空間完成各种圖形的作圖（包括平面的作圖）．

对於空間圖形的作圖，我們作下面的規定：

(1) **如果已知確定一个平面的位置的条件，这平面就認为是可以作成的．**这就是說，我們認为能作平面，使它：1)过不在一条直綫上的三个已知點；2)过一条已知直綫和这直綫外的一个已知點；3)过已知的兩条相交直綫；或4)过已知的兩条平行直綫．

(2) **如果已知兩个相交的平面，它們的交綫就認为是可以作成的．**

(3) **如果已知空間的一个平面，就認为可以在这平面內完成平面幾何中所能完成的一切作圖．**

所謂在空間完成作圖，就是指把它歸結到有限次的运用下面的三种基本作圖：

(1) 过不在一条直綫上的三个已知點作一个平面；

(2) 求已知兩个相交平面的交綫；

(3) 在一个已知平面內用圓規和沒有刻度的直尺作平面圖形．

例 1 求作已知平面（如圖 3 中的 P）和不在这平面內的已知直綫(a)的公共點．

在平面 P 內取任意一點 A．过 A 點和直綫 a 作平面 Q（已知確定平面位置的条件，这平面就認为是可以作成的）．平面 Q 和

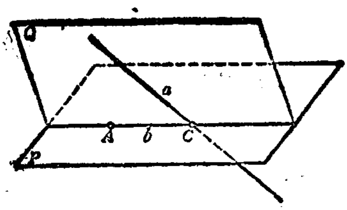


圖 3

平面 P 有公共點 A，所以相交於过 A 點的直綫 b（已知兩个相交的平面，它們的交綫就認为是可以作成的）．在平面 Q 內求直綫 a 和 b 的交點（已知一个平面，就可以在这平面內完成平面幾何的作圖）．

如果能求得直綫 a 和 b 的交點 C，那末 C 就是我們所求作的點．如果不能求得直綫 a 和 b 的交點（就是如果 $a \parallel b$），那末本題無解．

例 2　过已知直綫（如圖 4 中的 a）外的一个已知點（A），求作这直綫的平行綫．

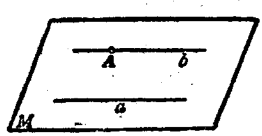


圖 4

过直綫 a 和 A 點作平面 M．在平面 M 內过 A 作平行於直綫 a 的直綫 b．直綫 b 就是所求作的直綫．

根据平行綫的定义，所求作的直綫必須和直綫 a 在同一平面內．求作的直綫所过的 A 點也必須在这同一平面內．但是过直綫 a 和 A 點只可以作一个平面，这就是平面 M．所以所求作的直

綫必須在平面 M 內. 因为在平面 M 內过 A 只可以作一条直綫与直綫 a 平行，因此本題只有一解.

从这个作圖題可以知道：**过已知直綫外的一个已知點，可以作一条直綫，並且只可以作一条直綫平行於这直綫.**

習題一

1. 画平行四边形來表示平面.

2. 四點中如果有三點同在一条直綫上，这四點必在一个平面內；为什麼？

3. 四點不都在一个平面內，如果过其中的任意三點各作一个平面，一共可作幾个平面？

4. 一条直綫分別与兩条平行直綫相交，这三条直綫是不是在一个平面內？为什麼？

5. (1)过一點任意作三条直綫，这三条直綫是不是一定在一个平面內？为什麼？

(2)把一點分別与不过这點的一条直綫上的三點連結起來，这样得到的三条直綫是不是一定在一个平面內？为什麼？

6. 三条直綫兩兩平行，但不在一个平面內. 如果过其中的任意兩条各作一个平面，一共可作幾个平面？

7. 如果直綫 a 不在平面 M 內而与平面 M 有一个公共點，那末繞着直綫 a 旋轉的一切平面各与平面 M 有一条公共直綫，並且只有一条公共直綫；为什麼？

8. 在已知平面內，求作一条直綫，使它过这平面內的一个已知點，並且与不在这平面內的一条已知直綫相交.

9. 过已知直綫外的一个已知點，求作这直綫的垂綫.

10. 过已知直綫上的一个已知點，求作这直綫的垂綫；这样的垂綫有多少条？

II 直綫与直綫、直綫与平面、平面与平面的平行關係

6. 兩直綫的位置關係 在同一平面內，兩条不重合的直綫或者相交，或者平行．反过來，如果兩条直綫相交或平行，那末它們必在同一平面內．

在空間还存在着不在同一平面內的兩条直綫．例如，在圖5中，直綫 a 是不在平面 M 內而与平面 M 有公共點 A 的一条直綫，直綫 b 是在平面 M 內而不过 A 點的另一条直綫，那末直綫 a 和 b 就不在同一平面內．（否則过直綫 b 和 A 點就可以作兩个平面，但这是不可能的．）

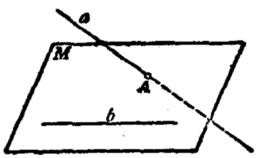


圖 5

不在同一平面內的兩条直綫叫做**異面直綫**，它們既不相交，也不平行．

7. 作圖題 过已知點（如圖6中的 A）求作一条直綫，使它与不过这點的兩条已知異面直綫（a 和 b）分别相交．

因为所求作的直綫要与直綫 a 相交，並且要过 A 點，所以它必在过直綫 a 和 A 點的平面內．同样，因为所求作的直綫要与直綫 b 相交，並且要过 A 點，所以它又必在过直綫 b 和 A 點的平面

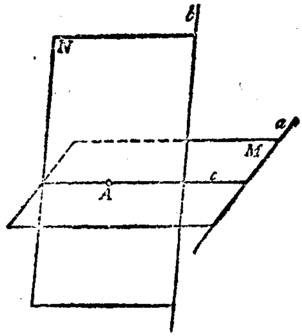


圖 6

内. 因此得到下面的作法: 过直綫 a 和 A 點作平面 M, 过直綫 b 和 A 點作平面 N 平面 M 与平面 N 相交於直綫 c.

如果直綫 c 与兩条已知直綫分別相交, 它就是所求作的直綫. 如果 $c \parallel a$, 或 $c \parallel b$, 那末本題無解.

8. 一条直綫和一个平面的位置關係 如果一条直綫与一个平面有兩个公共點, 那末这直綫就在这平面内. 如果一条直綫与一个平面只有一个公共點, 那末这直綫就与平面相交.

如果一条直綫与一个平面沒有公共點, 那末我們說直綫与平面互相平行.

从下面的定理可以知道互相平行的直綫和平面是存在的.

9. 定理 不在一个平面内的一条直綫, 如果与在这平面内的一条直綫平行, 那末这直綫与这平面平行.

已知: 不在平面 P 内的直綫 a, 与在平面 P 内的直綫 b 平行 (圖 7).

求証: 直綫 a 平行於平面 P.

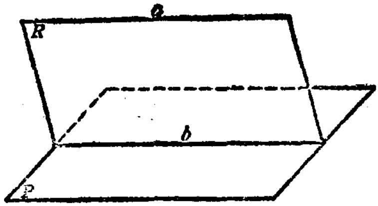


圖 7

証明： 过平行直綫 a 和 b 作平面 R.

假定直綫 a 和平面 P 有公共點，这公共點就既在过 a 的平面 R 内，又在平面 P 内，因此它就在平面 R 和 P 的交綫 b 上；这就是說，直綫 a 就要与直綫 b 相交．但这和已知的条件直綫 a 与直綫 b 平行相矛盾，所以是不可能的．

因此直綫 a 与平面 P 不能有公共點，即直綫 a 平行於平面 P.

10. **定理** 如果一条直綫与一个平面平行，並且过这直綫的一个平面与这平面相交，那末这直綫就与这交綫平行．

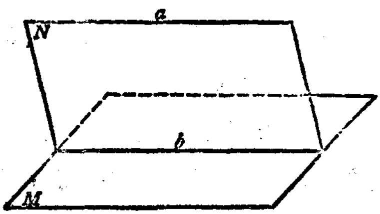


圖 8

已知： 直綫 a 与平面 M 平行，平面 N 过直綫 a 而与平面 M 相交於直綫 b（圖 8）.

求証： $a \parallel b$.

証明： 直綫 a 和 b 在同一平面 N 内，並且它們不能相交．

因为如果它們相交，那末直綫 a 就要与直綫 b 所在的平面 M 相交，这是不可能的．所以 $a \parallel b$．

11. 定理　兩个相交平面如果分别过兩条平行直綫中的每一条，它們的交綫就与这兩条直綫平行．

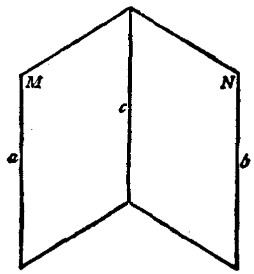


圖 9

已知：　直綫 a 与 b 平行，平面 M 和 N 分别过直綫 a 和 b，並且相交於直綫 c（圖 9）．

求証：　$c \parallel a$、$c \parallel b$．

証明：　因为直綫 a 与在平面 N 內的直綫 b 平行，所以直綫 a 与平面 N 平行（不在一个平面內的一条直綫，如果与在这平面內的一条直綫平行，那末这直綫与这平面平行）．因为直綫 a 与平面 N 平行，直綫 c 是过直綫 a 的平面 M 与平面 N 的交綫，所以 $c \parallel a$（如果一条直綫与一个平面平行，並且过这直綫的一个平面与这平面相交，那末这直綫就与这交綫平行）．

同理可証 $c \parallel b$．

12. 定理　如果兩条直綫各与第三条直綫平行，这兩条直綫互相平行．

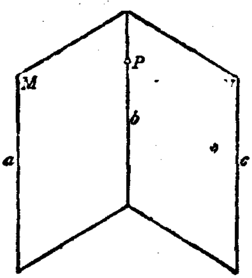


圖 10

已知: $a /\!/ c$、$b /\!/ c$ (圖 10).

求証: $a /\!/ b$.

証明: 如果三条直綫在同一平面內,这定理就是平面幾何中的定理.

如果三条直綫不在同一平面內. 在直綫 b 上任意取一點 P. 过直綫 a 和 P 點作平面 M,过直綫 c 和 P 點作平面 N、平面 M 和 N 相交於过 P 點的一条直綫,並且因为 $a /\!/ c$,所以这交綫必与直綫 a 平行,又必与直綫 c 平行(兩个相交平面如果分别过兩条平行直綫中的每一条,它們的交綫就与这兩条直綫平行). 但直綫 b 也是过 P 點而与直綫 c 平行的直綫,所以直綫 b 就是平面 M 和 N 的交綫. 因此 $a /\!/ b$.

13. 作圖題 求作过一条已知直綫(如圖 11 中的 a)而与另一条已知直綫(b)平行的平面.

(1) 設直綫 a 和 b 是異面直綫.

如果过直綫 a 上的任意一點 A 和直綫 b 作平面 P,那末因为所求作的平面要与直綫 b 平行,所以它与平面 P 的交綫必与直綫

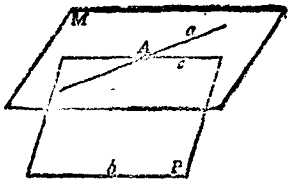


圖 11

b 平行. 因此得到下面的作法:

过直綫 a 上的任意一點 A 作与直綫 b 平行的直綫 c. 过 a 和 c 作平面 M. 平面 M 就是所求作的平面(不在一个平面內的一条直綫,如果与在这平面內的一条直綫平行,那末这直綫与这平面平行).

在这种情况下有一解,並且只有一解.

(2) 設直綫 a 和 b 是平行直綫.

因为过直綫 a 而不过直綫 b 的所有平面都是所求作的平面,所以在这种情况下有無數解.

(3) 設直綫 a 和 b 是相交直綫.

因为过直綫 a 的所有平面都和直綫 b 有公共點,所以在这种情况下無解.

14. 兩平面的位置關係 兩个不重合的平面如果有一个公共點,它們就相交於过这點的一条直綫.

如果兩个平面沒有公共點,我們說兩平面互相平行.

从下面的定理可以知道互相平行的平面是存在的.

15. 定理 如果兩条相交直綫分別与同一个平面平行,那末过这兩条直綫的平面也与这平面平行.

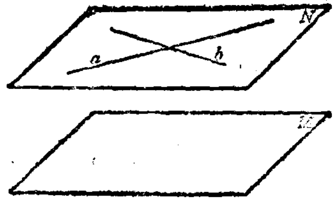


圖 12

已知：　兩条相交直綫 a 和 b 分別与平面 M 平行，平面 N 过直綫 a 和 b（圖 12）.

求証：　平面 N 平行於平面 M.

証明：　假定平面 N 和 M 相交於某一条直綫，那末兩条相交直綫 a 和 b 就都与这交綫平行，但这是不可能的. 所以平面 N 平行於平面 M.

推論　**如果在一个平面內的兩条相交直綫，分別与在另一个平面內的兩条直綫平行，那末这兩个平面平行.**

16. 定理　**兩個平行平面分別与第三个平面相交，它們的交綫平行.**

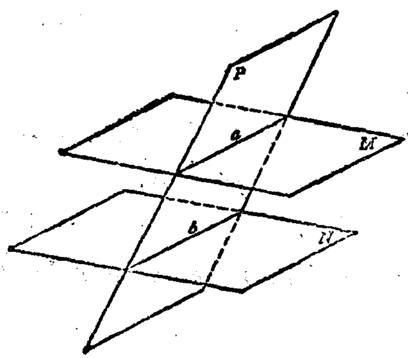


圖 13

已知：　平面 M 平行於平面 N，平面 M 和 N 与平面 P 分别相交於直綫 a 和 b(圖 13).

求証：　$a /\!/ b$.

証明：　直綫 a 和 b 在同一平面 P 內，並且它們不能相交．因为如果它們相交，那末它們所在的平面 M 和 N 就要相交，但这与已知的条件不合．所以 $a /\!/ b$.

17. 作圖題　过已知平面(如圖 14 中的 M)外的一个已知點(A)，求作这平面的平行平面．

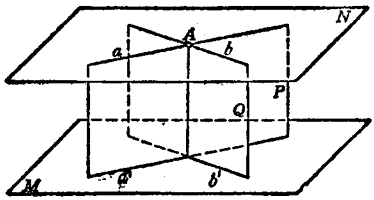


圖 14

在平面 M 內任意作两条相交直綫 a'、b'，並且过直綫 a' 和 A 點作平面 P，过直綫 b' 和 A 點作平面 Q．因为所求作的平面要与平面 M 平行，所以它与平面 P、Q 的交綫必分别与直綫 a'、b' 平行．因此得到下面的作法：

在平面 M 內任意作两条相交直綫 a'、b'．过 A 點作直綫 $a /\!/ a'$，作直綫 $b /\!/ b'$；过直綫 a 和 b 作平面 N.

平面 N 就是所求作的平面(如果在一个平面內的两条相交直綫，分别与在另一个平面內的两条直綫平行，那末这两个平面平行).

本題有一解，並且只有一解．