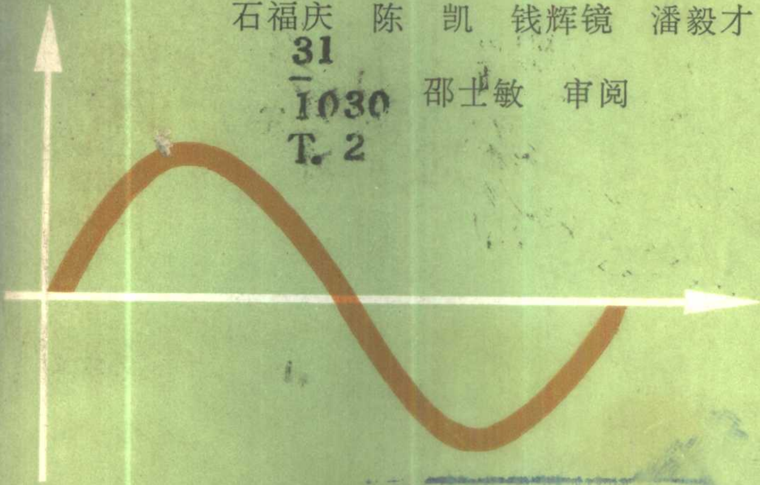
GAO DENG SHU XUE FU DAO

石福庆　陈　凯　钱辉镜　潘毅才　编

邵士敏　审阅



（下册）

高等数学辅导

中国铁道出版社

高等数学辅导

（下册）

编　者

石福庆　陈　凯　潘毅才（清华大学）

钱辉镜（中央广播电视大学）

审阅者

邵士敏（北京大学）

中国铁道出版社

1983年·北京

高等数学辅导（下册）

石福庆　陈　凯
钱焴镜　潘毅才　编

邵士敏　审阅

中国铁道出版社出版

责任编辑　冯秉明　封面设计　王毓予

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

中国铁道出版社印刷厂印

开本：787×1092 $\frac{1}{32}$ 印张：10　字数：229千

1983年1月　第1版　1983年1月　第1次印刷

印数：0001－60,000册　定价：1.25元

内容简介

本书是结合樊映川等编写的《高等数学讲义》（下册）和广播电视大学讲课内容而写的辅导教材。每章分基本内容提要、要求、典型例题分析和思考题四部分。第一部分说明了本章学习的内容，给出了基本概念的定义、定理和常用公式。第二部分提出了应掌握的程度。第三部分为本书的重点，是按工科院校辅导课的要求编写的，针对容易出错的难点加以剖析和总结，以提高学员分析问题和解决问题的能力。第四部分是为巩固学习编的思考题。

目　录

第十章 级 数

级数是数学分析的一个有力工具。它既可以作为一个函数或一个数的表达形式，同时又可以用它求得一些近似公式或对某些数值进行近似计算。

无穷级数是与数列有密切联系的一个概念。在学习中要用到极限理论，因此应对数列的极限理论进行适当的复习。

本章的重点是，级数的收敛和发散概念、数项级数的判敛法、幂级数收敛半径的求法、五个基本初等函数的幂级数展开式、幂级数在近似计算中的应用，以及将已给函数展开为富氏级数的方法。

一、内 容 提 要

本章主要学习数项级数和函数项级数。在数项级数中，介绍了数项级数的收敛和发散的定义，数项级数的性质。着重研究了数项级数收敛的条件：必要条件和充分条件（分别讨论正项级数和任意项级数两种情况）。在函数项级数中，除了介绍一致收敛、和函数的性质外，重点研究了两类重要级数：幂级数和富氏级数。详细地讨论了幂级数的性质，将一个函数展为幂级数的两种方法（直接展开和间接展开），以及幂级数在近似计算中的应用；富氏级数的性质，将一个函数展为富氏级数的方法以及收敛情况。下面列表详细说明。

级数基本内容表

数项级数

- 一般概念
  - 数项级数的定义 $u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ （1） 称为无穷级数。
  - 敛散性定义
- 判敛法
  - 基本性质
    - 乘以非零常数不改变其敛散性。
    - 加减有限项不改变其敛散性。
    - 收敛级数的和（差）仍然收敛，且有 $\sum_{i=1}^{\infty}(u_i \pm v_i) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i \pm \sum_{i=1}^{\infty} v_i$。
  - 收敛条件
    - 必要条件：$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$（$\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$ 是发散的充分条件）。
    - 充分条件
      - 正项级数
        - 比较法：若 $u_n \leqslant v_n$，则
          - $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；
          - $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散。
          - 常用的比较级数为几何级数、调和级数和 p 级数。
        - 达朗贝尔判别法：$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho \begin{cases} <1，收敛； \\ >1，发散； \\ =1，不能肯定。\end{cases}$
        - 根值法：$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho \begin{cases} <1，收敛； \\ >1，发散； \\ =1，不能肯定。\end{cases}$

积分法（柯西准则）：记（1）的$u_n = f(n)$，则 $\int_1^{\infty} f(x)dx$ $\begin{cases} 存在 \Rightarrow (1)\ 收敛; \\ 不存在 \Rightarrow (1)\ 发散。\end{cases}$

其它方法

任意项级数

设 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n, u_n > 0$，则当 $u_n > u_{n+1}$，且 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ 时级数收敛。

任意项级数判敛法对交错级数适用。

任意项级数：若 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛。称 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 是绝对收敛级数。

一般概念

一致收敛维氏准则：对于 $u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$　(2)　若存在 $\sum_{k=1}^{\infty} M_k (M_k > 0)$ 在 $[a,b]$ 上恒有 $|u_n(x)| \leqslant M_n (n = 1, 2, \cdots)$，则（2）在 $[a,b]$ 上一致收敛，而且绝对收敛。

和函数的解析性质

若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $s(x)$，而且 $u_n(x)(n=1,2\cdots)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $s(x)$ 在 (a,b) 上连续；对于 $[a,b]$ 的任意部分区间 $[x_1,x_2]$ 恒有 $\int_{x_1}^{x_2} s(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{x_1}^{x_2} u_n(x)dx$（简称可逐项积分）。

若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 (a,b) 上收敛于 $s(x)$，而且 $u_n'(x)(n=1,2,\cdots)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ 在 (a, b) 上一致收敛，则 $s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$（简称逐项微分）

函数项级数
- 两类重要的
  - 幂级数
    - 定义：$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ （3） 叫幂级数。
    - 一般性质：函数项级数的性质都适用。
    - 特殊性质
      - 收敛域：（3）的收敛域为 $(-R, R)$，$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$，端点要判断后再定。
      - 解析性质：在收敛区间内$s(x)$连续、可微、可积。
    - 展开法
      - 直接法：能在x_0点展开的条件，$f^{(n)}(x_0)$存在而且$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$。
      - 间接法：若$f(x)$能用幂级数表示，则必为其泰勒级数。常用方法为+、-、×、÷、积分、微分、复合。
    - 应用：近似计算；用幂级数表示函数；解微分方程。
  - 富氏级数
    - 定义：$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ （4） 叫三角级数。
    - 性质：函数项级数的性质都适用。

函数项级数

展开

在$[-\pi,\pi]$上：

以$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx$，$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$为系数构成的（4）叫$f(x)$的富氏级数。展开的条件：若$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上只存有限个极值点，有限个第一类间断点，则在函数的连续点$f(x)$的富氏级数收敛于$f(x)$。

在$[-l,l]$上：

$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$，$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

$f(x)$定义在$[0,\pi]$上，在$[-\pi,0]$上补一个满足狄氏条件的函数，构成新函数$g(x)[-\pi,\pi]$，一般$g(x)$为奇函数或偶函数。则$g(x)$在$[-\pi,\pi]$上可以展开，再由$g(x)$在$[0,\pi]$上的展开式，可得到$f(x)$在$[0,\pi]$上的展开式。

$f(x)$定义在$[0,l]$上，在$[-l,0]$上补一个满足狄氏条件的函数，构成$g(x)[-l,l]$，一般$g(x)$为奇函数或偶函数。$g(x)$在$[-l,l]$上可展开，再由$g(x)$在$[0,l]$上的展开式，可得到$f(x)$在$[0,l]$上的展开式。

二、要　　求

1. 掌握无穷级数收敛、发散的概念及其基本性质；

2. 熟悉p-级数（调和级数）、几何级数的敛散条件；

3. 掌握正项级数的比较判定法和比值判定法，了解根值判定法和积分判定法；

4. 掌握绝对收敛概念及莱布尼兹定理；

5. 了解广义积分的比较判定法和极限判定法；

6. 掌握幂级数的概念及主要性质（在收敛区间内和函数连续，可逐项微分、积分等），会求收敛半径；会求简单的幂级数的和函数；

7. 熟悉五个基本初等函数的泰勒级数及它们的收敛半径；

8. 会用泰勒级数进行近似计算；

9. 了解什么是三角级数和三角函数系；

10. 掌握富里哀级数的概念，会熟练地求出各种形式的富里哀系数；

11. 能正确叙述收敛定理；

12. 掌握偶函数、奇函数富里哀级数的特点以及如何将函数展成正弦级数或余弦级数；

13. 会在任意区间〔$-l$，l〕上将函数展成富里哀级数。

三、典型例题分析

数项级数部分

数项级数是研究函数项级数的基础；当函数项级数的自变量取确定值时它便是数项级数。

1． 基本概念

例1 试回答下列问题：①什么叫无穷数项级数？②试述u_n，S_n和S的意义以及它们之间的关系。③已给级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{9}{10}\right)^n$，写出$u_1, u_2, u_n$和$S_1, S_2, S_n$，并且求$S$。

解 ①已给数列$u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$，则式

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \tag{1}$$

$\left(\text{简记作}\sum_{n=1}^{\infty}u_n\right)$叫无穷数项级数，或简称级数。我们把（1）叫做数项级数，是因为（1）中每一项都是一个数。

② u_n的下标n指出它是级数（1）的第n项。S_n是（1）的前n项和。

$$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n=\sum_{i=1}^{n}u_n \tag{2}$$

若$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$存在，则将此极限叫级数（1）的和，记作$S$。即

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n \tag{3}$$

又
$$u_n=S_n-S_{n-1} \tag{4}$$

③ $u_1=\frac{9}{10}$，$u_2=\left(\frac{9}{10}\right)^2$，$u_n=\left(\frac{9}{10}\right)^n$；

$$S_1=\frac{9}{10},\ S_2=\frac{9}{10}+\left(\frac{9}{10}\right)^2$$

$$S_n=\frac{9}{10}+\left(\frac{9}{10}\right)^2+\cdots+\left(\frac{9}{10}\right)^n$$

$$=\frac{9}{10}\cdot\frac{1-\left(\frac{9}{10}\right)^n}{1-\frac{9}{10}}=9\left[1-\left(\frac{9}{10}\right)^n\right]$$

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}9\left[1-\left(\frac{9}{10}\right)^n\right]=9$$

例 2 已给级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}$和$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{5}{2n-2}$，试分别写出$u_3$和$S_3$以及$u_n$和$S_n$。

解 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots$,

$\therefore$ $u_3=\frac{1}{3^3}$, $S_3=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}$, $u_n=\frac{1}{3^n}$

$$S_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{2n}=\frac{5}{2}+\frac{5}{4}+\frac{5}{6}+\frac{5}{8}+\cdots$$

$u_3=\frac{5}{6}$,

$S_3=\frac{5}{2}+\frac{5}{4}+\frac{5}{6}$

$u_n=\frac{5}{2n}$,

$S_n=\frac{5}{2}+\frac{5}{4}+\cdots+\frac{5}{2n}$

例 3 利用$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$讨论下列级数的敛散性：

① $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ （1）

② $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ （2）

③ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ （3）

④ $\sum_{n=1}^{\infty}n$ （4）

解 ① $S_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}=\frac{1}{3}\ \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right) \qquad (5)$$

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)=\frac{1}{2}$$

故级数（1）收敛。

② $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$$S_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\cdots-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right) \qquad (6)$$

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}$$

故级数（2）收敛。

③ $S_n = -1+1-1+\cdots+(-1)^n = \begin{cases} -1, & \text{当} n \text{为奇数；} \\ 0, & \text{当} n \text{为偶数。} \end{cases}$

$S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$不存在，故级数（3）发散。

④ $S_n=1+2+\cdots+n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$ （7）

因为$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty$，故级数（4）发散。

小结：i）因为$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$，当 n 趋于无穷时项数无限增加，过去讲过的求极限法则（如和的极限等于极限的和等）是对有限项而言，对于作为无穷多项之和的级数不适用，因而不能直接利用此式求$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$。

ii）求$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$的关键是，把$S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}u_i$化为当$n\to\infty$时仍为初等函数的表示式，如（5），（6），（7）所示。但是这一步很难实现。因此，我们对用 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$判断敛散性的要求是，搞懂解题思路；会用 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$判断 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ 这种类型的敛散性。

2． 判敛法

1）利用基本性质判敛

例 4 已知

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n} \tag{1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \tag{2}$$

均收敛，试用基本性质判断下列级数是否收敛？

① $10^1+10^2+\cdots+10^{1000}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n}$ （3）

② $\sum\limits_{n=101}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ （4）

③ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{10^{100}}{n^2}$ （5）

④ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ （6）

解 ① 根据级数的基本性质：在一个级数的前边加（减）有限项不改变其敛散性。可知收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ 加有限项（1000项）仍然收敛。于是（3）收敛。

② （4）是收敛级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$去掉了前一百项构成的，根据①中所述性质，（4）仍收敛。

③ 根据性质：以不为0的常数乘一个级数的各项，所得新级数的敛散性与原级数相同。又由题意已知

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^{100}}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}10^{100}\frac{1}{n^2},$$

即⑤是由收敛级数（2）每一项乘 10^{100}。得到的，故（5）收敛。

④ 因已知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$都收敛，根据性质：收敛级数的和（差）构成的新级数仍然收敛，可知（6）收敛。

小结：由此例可见，要用数项级数收敛的基本性质判断某一级数是否收敛，首先要把该级数化为已知其敛散性的某个级数或加减有限项，或每项乘以非零常数所构成的级数；

或化为某两个已知收敛的级数之和（差）。这样就可以把未知敛散性的问题化为已知的问题解决。因此，用数项级数基本性质判断敛散性的先决条件是已知某些级数的敛散性。

在用级数收敛的基本性质判敛时，或用比较法判断正项级数的敛散性时，要牢记以下级数：

等比（几何）级数 $\sum_{n=1}^{\infty} q^n \begin{cases} q<1, & \text{收敛;} \\ q\geqslant 1, & \text{发散。} \end{cases}$

调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$，发散。

p 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} p>1, & \text{收敛;} \\ p\leqslant 1, & \text{发散。} \end{cases}$

2）利用必要条件判敛

已给级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

若级数收敛，则 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$；若 $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$，则级数发散。即 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ 是级数收敛的必要条件，而 $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$ 是级数发散的充分条件。

例 5 试用 $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$，说明下列级数是发散的：

① $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ （1）

② $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{n\pi}{2}$ （2）

解 ① $u_n = \frac{n}{n+1}$，$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$。故级数（1）发散。