量子力学教学丛书 喀兴林 主编

量子力学中的角动量

林辛未 殷传宗 编著

福建科学技术出版社

量子力学中的角动量

林辛未 殷传宗 编著

福建科学技术出版社

一九八九年·福州

量子力学中的角动量
林辛未　殷传宗　编著
*
福建科学技术出版社出版
（福州得贵巷27号）
福建省新华书店发行
福建新华印刷厂印刷
开本787×1092毫米 1/32 6印张 127千字
1989年2月第1版
1989年2月第1次印刷
印数：1—1,750
ISBN 7—5335—0201—9/O·13
定价：2.25元

前　言

量子力学这门学科自1925年诞生以来，至今已有60多年了。在这60多年中，它已从“原子的理论”发展成为微观现象的普遍理论，成为一切近代物理学的理论基础。目前，量子力学是大学物理系的一门重要基础课，是所有学物理的人都必须学习的一门必修课，学习的份量在增加、内容也在提高。不仅如此，理科的化学、生物学等学科和工科的材料科学、激光和半导体等学科也都要学习这门课程。

然而，由于量子力学所反映的微观世界中的许多概念和规律，不能像经典概念那样根据人们的生活经验去体会，使量子力学这门课程显得有些抽象难懂。加上量子力学所用的数学方法又与人们所熟悉的经典物理有较大的差别，使得这门课程变得既不容易教又不容易学。

我们经常听到不少担任量子力学课的年轻教师提出，希望能看到一些有助于他们提高教学水平、能解决他们备课和教学中问题的参考资料；也听到许多学习量子力学的大学生提出，希望能看到帮助他们理解概念、学好这门课程的参考读物。为此，全国高校量子力学研究会针对广大师生的要求，组织编写了这一套《量子力学教学丛书》。该丛书紧密配合大学的量子力学课程，把课程内容分为若干个单元，每一分册针对一个单元，对其中所涉及的概念和规律、重点、难点以及用到的数学技巧，作了较详细、全面和深入的分析和讲解，有些地方还对有关的知识加以拓宽和加深。目的是帮助

读者更好地掌握量子力学中的概念和理论，以及教好和学好这门十分重要和有用的课程。

《丛书》的每一分册都是请有丰富教学经验并对本专题有深入研究的教授或副教授执笔。各书具有相当大的独立性，自成体系，与其他分册联系不多，这是为了使各位作者充分地写出自己的教学经验和特定风格，同时，对《丛书》的体例和格式等方面没有过分地追求一致，使每本书带有自己的特色。

我们希望这套《丛书》能够在一定程度上满足不同方面的读者需要，对读者的教学工作和学习有所帮助。同时也希望各位读者对这套《丛书》的内容和编排等各个方面，给予批评和指教。

全国高校量子力学研究会理事长

喀兴林

1987.4.

引　言

不论在经典物理学，还是在量子力学中，大到天体、星系的运动，小到原子结构，甚至中微子；在所有这些领域中，角动量都扮演着十分重要的角色。对于微观粒子来说，角动量的重要性更显得突出。例如，能谱的分类，自旋特性，磁矩，碰撞截面，服从什么样的统计分布……等等，都与角动量有关。

本书主要是研究量子力学中角动量的一般特性，但为了把问题说明白，有必要对经典力学中有关角动量的特性作一些分析。第一章，从经典角动量入手，明确角动量定义，找出角动量守恒的条件，用有效势能曲线分析角动量与能量、角动量与可能的运动及可能的运行轨道之间的联系；进而阐明玻尔理论中的角动量的有关性质，然后说明为什么要从经典走向量子化。第二章，在上述分析的基础上，利用阶梯算符法求角动量算符的本征值和本征函数及其递推关系。讨论角动量量子化的物理意义，与经典力学或玻尔理论中角动量的联系与区别，分析球谐函数所反映的几率分布的含义及其基本特性。第三章，主要讨论有心力场情况下径向运动的规律，利用阶梯算符法求满足角动量定义的所有角动量算符的本征值。第四章，讨论自旋角动量，这里引入的自旋角动量方法是，先定义磁矩方向（也就是自旋角动量方向）的单位矢量$\hat{\sigma}$，然后根据实验结果写出$\hat{S}=\frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}$。再求出$\hat{\sigma}$的

对易关系，从而证明$\hat{S}$满足角动量的普遍定义。此外，还以自旋为$\frac{1}{2}$的粒子为例，分析它在各种条件下的运动规律，如拉摩进动，磁共振等，最后分析史特恩—盖拉赫实验，说明当坐标系按θ旋转变换时，自旋为$\frac{1}{2}$的粒子的态矢按$\theta/2$旋转变换。第五章，讨论角动量的耦合和C—G系数的应用。第六章，分析坐标系、态矢、基矢及标量波函数、旋量波函数和矢量波函数在旋转变换下的变换性质，还推导了球谐函数的加法定理和三个球谐函数的积分公式，球壳上的D函数积分等。第七章，主要介绍不可约张量算符与维格勒—埃伽定理，并由一秩张量投影定理推导出磁矩的普遍公式。最后一章，举例介绍上述各章角动量理论的应用。

我们阐明的物理概念，主要希望对教与学会有所帮助。但也不排斥有关角动量的运算方法的介绍，而且注意引入新的观点与方法。例如，有关含参变量量子数的一类算符本征值方程的阶梯算符解法，这里以定理的形式引入，这对于应用是很方便的。自旋与磁矩的新讲法其物理意义也明确。此外，采用阶梯算符法，因而只要求有微积分和矢量代数的数学基础就可以顺利阅读。

目　录

第一章　有趣的旋转对称性……………………………… 1
§ 1　有心力场……………………………………………… 1
§ 2　角动量………………………………………………… 3
§ 3　角动量守恒定律……………………………………… 7
§ 4　有效势能曲线的应用………………………………10
§ 5　角向运动的分析……………………………………17
§ 6　平方反比力作用下的运动…………………………20
§ 7　从经典走向量子化…………………………………24

第二章　量子力学中的角动量……………………………30
§ 8　量子力学中的角动量………………………………30
§ 9　旋转对称性和角动量守恒…………………………33
§ 10　轨道角动量算符的本征值和本征函数……………36
§ 11　角动量量子化的物理意义…………………………41
§ 12　轨道角动量算符的球坐标形式和轨道角动量算符的本征函数……………………………………46
§ 13　球谐函数与几率分布………………………………51
§ 14　球谐函数的基本特性………………………………55

第三章　若干有心力场问题与阶梯算符法………………59
§ 15　平方反比力作用下运动的分析……………………59
§ 16　另外两种有心力场情况及$\hat{J}^2$和$\hat{J}_z$的本征值……………68

附录　含参变量量子数的力学量算符本征值方程的阶梯算符解法……71

第四章　自旋角动量……76
§17　电子自旋……76
§18　自旋算符……82
§19　磁场中的自旋为1/2的粒子……87
§20　双史特恩—盖拉赫(Stern—Gerlach)实验和旋转……96

第五章　角动量的耦合……99
§21　两个角动量的耦合……99
§22　计算C—G系数的一般原则、C—G系数的拉卡表式及C—G系数的对称性……103
§23　C—G系数应用举例……113
§24　三个角动量的耦合……118

第六章　角动量与转动……124
§25　角动量与转动……124
§26　矢量波函数和旋量波函数的旋转变换算符……131
§27　转动矩阵……134
§28　D函数和球谐函数……143
§29　力学量算符的旋转变换……149

第七章　不可约张量算符……152
§30　不可约张量算符……152
§31　维格纳—埃伽定理……156
§32　一秩张量投影定理与磁矩的计算……160

第八章　应用举例…………………………………………………… 162
§ 33　干涉现象…………………………………………………… 162
§ 34　有关角动量投影问题的E．P．R佯谬………………… 165
§ 35　塞曼效应的强度和偏振情况分析……………………… 167
§ 36　对称陀螺…………………………………………………… 179

第一章　有趣的旋转对称性

我们在实验室里做实验时，不管桌子或仪器的朝向如何，实验的结果相同(不考虑地磁的影响时)，这是由于空间各向同性，所以具备了旋转对称性。在原子中，由于原子核带有$+ze$电荷，所以距原子核r处场强为$\frac{ze}{r^2}$，这场强只与r的大小（即绝对值）有关，而与r的方位无关。我们称这种只与r的大小有关而与r的方位（或方向）无关的场为有心力场。由于有心力场场强只是r的绝对值的函数，所以有心力场具有旋转对称性。

在不存在外场或外场是有心力场情况，空间都具有旋转对称性。一定的对称性总是和一定的守恒量联系在一起的，具有旋转对称性的空间它的守恒量是什么呢？下面将证明在具有旋转对称性的空间中运动的粒子，它的角动量守恒。

为了研究具有旋转对称性的空间的特性，我们先分析有心力场的情况，只要把有心力场时的情况弄清楚，不存在外场的情况就自然了解。

§1　有心力场

如果运动质点所受的力的作用线在全部时间内都通过某一定点，而它的大小仅是离这一定点的距离的函数，这样的力称为有心力。只依赖于到某一定点的距离而与方向无关的

场称为有心力场。

现证明两个相互作用着的粒子的运动，可以化为两粒子的质心运动和一个假想的粒子在以质心为中心的有心力场中的运动。由于两个相互作用着的粒子，它们的位能只与距离有关，也就是说只与它们的向径之差的绝对值有关。设两粒子质量分别为μ_1和μ_2，向径为$\mathbf{r}_1$和$\mathbf{r}_2$，这样的体系的哈密顿函数是

$$H=\frac{\mu_1\dot{r}_1^2}{2}+\frac{\mu_2\dot{r}_2^2}{2}+U(|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|) \qquad 1\cdot1$$

令

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2 \qquad 1\cdot2$$

表示两粒子间的距离，根据质心定义，设质心的向径以$\mathbf{r}_c$表示，那么

$$\mathbf{r}_c=\frac{\mu_1\mathbf{r}_1+\mu_2\mathbf{r}_2}{\mu_1+\mu_2} \qquad 1\cdot3$$

如果把坐标原点移到质心上，即$\mathbf{r}_c=0$，那么

$$\mu_1\mathbf{r}_1+\mu_2\mathbf{r}_2=0 \qquad 1\cdot4$$

从1·2，1·4两式可求得

$$\mathbf{r}_1=\frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\mathbf{r} \qquad \mathbf{r}_2=\frac{-\mu_1}{\mu_1+\mu_2}\mathbf{r} \qquad 1\cdot5$$

利用上式 得

$$\frac{1}{2}\mu_1\dot{r}_1^2+\frac{1}{2}\mu_2\dot{r}_2^2=\frac{1}{2}\mu_1\left(\frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\right)^2\dot{r}^2+\frac{1}{2}\mu_2\left(\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}\right)^2\dot{r}^2$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{\mu_1\mu_2(\mu_1+\mu_2)}{(\mu_1+\mu_2)^2}\dot{r}^2$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\dot{r}^2 \qquad 1\cdot6$$

令

$$\mu=\frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1+\mu_2} \qquad 1\cdot7$$

称μ为折合质量。将以上三式代入1·1式中，得

$$H=\frac{\mu\dot{r}^2}{2}+U(r) \qquad 1\cdot 8$$

说明如果把坐标原点移到质心上，那么两粒子间由于相互作用而产生的运动，可以用一个假想的粒子的运动来代替。这个假想的粒子离质心的距离等于这两个粒子之间的距离（1·2式）。而这假想的粒子的质量是折合质量$\mu=\frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1+\mu_2}$，而它们间相互作用势能仅是相对位置矢量r的绝对值的函数，而与r的方向无关。

如果坐标原点不在质心上，而在任一点o上，两粒子相对于o点的向径是r_1和r_2。由于孤立体系的动量守恒，因而：

$$\mu_1\frac{dr_1}{dt}+\mu_2\frac{dr_2}{dt}=\text{常量}$$

根据1·3式，得

$$\frac{dr_c}{dt}=\text{常量} \qquad 1\cdot 9$$

即质心不动（体系原来处于静止状态）或质心作匀速运动。除此之外，上述的其余结论不变。有心力场中运动的例子很多，例如，行星绕太阳的运动和地球的卫星绕地球的运动，以及电子绕原子核的运动等。

§2 角动量

前面谈到不存在外场或外场是有心力场时，空间具有旋转对称性，在具有旋转对称性的空间中运动的粒子角动量守恒。什么是"角动量"？对于单粒子、N个粒子体系和具有一定对称性的刚性相联整体以角速度ω转动着的体系，角动

量与哪些量有关？角动量与质心的运动，角动量与固定参考点的选择又有什么样的关系？这些就是本节想了解的问题。

如果粒子A绕固定点o转动，为了表示转动“强度”的大小，我们定义相对于o点的角动量（又称动量矩）$\mathbf{L}$为

$$\mathbf{L}=\mathbf{r}\times\mu\mathbf{v}=\mathbf{r}\times\mathbf{p} \qquad 1\cdot10$$

式中$\mathbf{r}$是粒子相对于固定点o的向径，$\mathbf{p}=\mu\mathbf{v}$是粒子A的动量。按矢量叉乘积的定义$\mathbf{L}$垂直于$\mathbf{r}$和$\mathbf{p}$所在的平面，指向遵守右手螺旋法则。

如果考虑的是N个粒子组成的体系，设各粒子的质量分别为μ_1、μ_2、μ_3、……μ_i……μ_N，各粒子的速度分别为$\mathbf{v}_1$，$\mathbf{v}_2$、$\mathbf{v}_3$……$\mathbf{v}_i$……$\mathbf{v}_N$，各粒子相对于固定点o的向径分别为$\mathbf{r}_1$，$\mathbf{r}_2$，$\mathbf{r}_3$……$\mathbf{r}_i$……$\mathbf{r}_N$，而整体的角动量以$\mathbf{L}_0$表示，那么

$$\mathbf{L}_0=\sum_i \mathbf{r}_i\times\mu_i\mathbf{v}_i=\sum_i \mathbf{r}_i\times\mathbf{p}_i=\sum_i \mathbf{L}_i \qquad 1\cdot11$$

其中$\mathbf{p}_i$是第i个粒子的动量，$\mathbf{L}_i$是第i个粒子的角动量。

我们给角动量下定义时，强调的是相对于o点的角动量，角动量与固定参考点的选择有什么样的关系呢？如果是单个粒子作运动时角动量不是确定的量，因为它和参考点o的选择有关。如果是两个以上的粒子运动，就存在确定的内部角动量和质心相对于固定点o的角动量。

以两个粒子为例，如两粒子的质量为μ_1和μ_2，相对于参考点o的向径为$\mathbf{r}_1$和$\mathbf{r}_2$，引进两粒子相对于质心的向径$\mathbf{r}_1'$、$\mathbf{r}_2'$和速度$\mathbf{v}_1'$和$\mathbf{v}_2'$，即

$$\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_1'+\mathbf{r}_c \qquad \mathbf{r}_2=\mathbf{r}_2'+\mathbf{r}_c \qquad 1\cdot12$$

$$\mathbf{v}_1=\mathbf{v}_1'+\mathbf{v}_c \qquad \mathbf{v}_2=\mathbf{v}_2'+\mathbf{v}_c \qquad 1\cdot13$$

于是

$$\mathbf{L}_0=\mathbf{r}_1\times\mu_1\mathbf{v}_1+\mathbf{r}_2\times\mu_2\mathbf{v}_2$$

$$= (\mathbf{r}_1' + \mathbf{r}_c) \times \mu_1 (\mathbf{v}_1' + \mathbf{v}_c) + (\mathbf{r}_2' + \mathbf{r}_c) \times \mu_2 (\mathbf{v}_2' + \mathbf{v}_c)$$

$$= \mathbf{r}_1' \times \mu_1 \mathbf{v}_1' + \mathbf{r}_2' \times \mu_2 \mathbf{v}_2' + (\mu_1 \mathbf{r}_1' + \mu_2 \mathbf{r}_2') \times \mathbf{v}_c$$

$$+ \mathbf{r}_c \times (\mu_1 \mathbf{v}_1' + \mu_2 \mathbf{v}_2') + \mathbf{r}_c (\mu_1 + \mu_2) \times \mathbf{v}_c$$

写成 $$\mathbf{L}_0 = \mathbf{L}_c + \mathbf{r}_c \times M\mathbf{v}_c \qquad 1\cdot14$$

式中 $$\mathbf{L}_c = \mathbf{r}_1' \times \mu_1 \mathbf{v}_1' + \mathbf{r}_2' \times \mu_2 \mathbf{v}_2' \qquad 1\cdot15$$

是相对于质心的角动量，$M = \mu_1 + \mu_2$。1·14式成立的原因是根据质心的定义$\mu_1 \mathbf{r}_1' + \mu_2 \mathbf{r}_2' = 0$，$\mu_1 \mathbf{v}_1' + \mu_2 \mathbf{v}_2' = 0$。

1·14式说明两个粒子相对于任一参考点的总角动量是两个粒子相对于质心的角动量之和，再加上质心相对于o点的角动量。如果质心处于静止状态，那么，相对于任一参考点的总角动量的值都相同。对于多粒子体系计算的结果和结论一致。

如果我们考虑的是一个刚性相联的以角速度ω转动的体系，该体系具有一定的几何对称性，而且是绕通过体系质心的对称轴转动，这样的刚性相联的体系的角动量如何计算呢？

先考察如图1所示的相对于转轴的对称位置上的两个粒

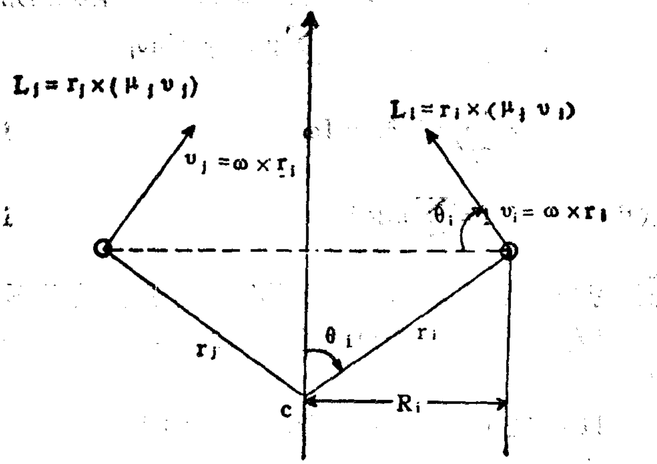

图1

子i和j，它们的质量应相等。由于是刚性相联的体系，因而这两个粒子的角速度ω相同，第i个粒子的线速度垂直于纸面朝里，其大小为

$$v_i = |\omega \times \mathbf{r}_i| = \omega r_i \sin\theta_i = \omega R_i$$

式中R_i是到转轴的距离，$\mathbf{r}_i$是相对于质心c的向径。由于$\mathbf{v}_i$和$\mathbf{r}_i$垂直，粒子的角动量为

$$L_i = |\mathbf{r}_i \times \mu \mathbf{v}_i| = \mu_i \omega R_i r_i$$

第j个粒子的线速度垂直于纸面朝外，其角动量

$$L_j = \mu_j \omega R_j r_j$$

由于L_i和L_j处于对称位置，因而可看出它们的垂直于转轴的分量相消，而平行于转轴的分量相加。这对于N个粒子构成的具有一定的几何对称性，而且是绕通过体系质心的对称转轴转动的刚体同样适用，同样的分析表明，处于对称位置上的粒子，它们垂直于转轴的角动量分量相消，因而只需将平行于转轴的角动量$L_i \sin\theta_i$相加，那么，整个体系的角动量

$$L_c = \sum_i L_i \sin\theta_i = \sum_i \mu_i \omega R_i r_i \sin\theta_i$$

$$= \sum_i \mu_i R_i^2 \omega = I\omega \qquad 1\cdot16$$

式中

$$I = \sum_i \mu_i R_i^2 \qquad 1\cdot17$$

而μ_i是第i个粒子的质量，R_i是第i个粒子到转轴的垂直距离。I称为该体系相对于通过体系质心的对称轴的转动惯量。

以上考虑的是分立的粒子，如果粒子是连续分布（例如粒子的几率密度连续分布），这时μ_i和$\mathbf{r}_i$都是连续变量，那么，我们就要以积分代替1·17式中的求和，将I写成

$$I=\int r^2 d\mu \tag{1·18}$$

式中$d\mu$是离转轴r处的质量元。例如，通过计算可得总质量为M，半径为R的

球体 $$I=\frac{2}{5}MR^2 \tag{1·19}$$

均匀圆环 $$I=MR^2 \tag{1·20}$$

圆盘 $$I=\frac{1}{2}MR^2 \tag{1·21}$$

以I值代入1·16式，即可求出刚体的总角动量。

§3 角动量守恒定律

为什么在不存在外场或外场是有心力场的空间中运动的粒子其角动量守恒？角动量守恒的地位与作用又如何？这就是本节要回答的问题。

我们研究角动量**L**对时间t的变化率。将1·10式对t求导

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{L}}{dt}&=\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\mathbf{P}+\mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{P}}{dt}\\&=\mathbf{V}\times\mu\mathbf{V}+\mathbf{r}\times\mu\frac{d\mathbf{V}}{dt}\\&=\mathbf{r}\times\mathbf{F}\end{aligned}\tag{1·22}$$

式中第三等符号是由于$\mathbf{V}\times\mathbf{V}=0$，且$\mu\frac{d\mathbf{V}}{dt}=\mathbf{F}$。因为$\mathbf{r}\times\mathbf{F}$就是力**F**相对于o点的力矩，因而上式可写为

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt}=\mathbf{M} \tag{1·23}$$

这就是单粒子的角动量定理。

如$\mathbf{M}=0$，即相对于o点的外力矩为零时，