

概 率 趣 题

50 例

施延龄 译 宋立校

中南工业大学出版社

概 率 趣 题 50 例

[苏] F·马斯捷连尔 著

施延龄 译

宋 立 校

责任编辑：田荣璋

✱

中南工业大学出版社出版发行

湖南省地质测绘印刷厂印装

湖南省新华书店经销

✱

开本：787×1092/32 印张：3.5 字数：81千字

1989年1月第1版 1989年1月第1次印刷

印数：0001—5000

✱

ISBN 7-81020-194-8/0·030

定价：1.20元

绪 言

本书实际上包含57个有趣的概率问题，而不是整整50个例子，尽管书名叫做《概率趣题50例》。书中的某些例题，是作为预备题而编入的。为了区别鉴赏能力，有部分例题可能会使读者兴趣不大。此外，还有七个题目连同它的解答，倒不如展开讨论更为合适些。

如果读者不乏兴趣的话，大可对第48题试作一下最终的解題论证。书中有道题是以研究好几位著名数学家作为对象的，可能会有哪位读者对该题作出最终的解答，估计难得，但也难料。

我的大部分数学概念的形成，应归功于演算了大量的各类题目。但随着岁月的流逝，我越来越感到从解題角度难以辨认所显示出来的难题，因为有些题目，初看起来真有点象“玩具题”那样。

我常常遇到，一些基本的算题在解答难题过程中会起到十分有益的作用。

题目的趣味性是非常重要的，这可以表现在许多方面：可以是假设条件很有趣味；可以是凭直觉意料不到的解答；可以是题目本身所展示出的极为重要的原理；可以是题目具有很大程度的共同性或者是相当难；可以是在解題中孕育着《特别风味》或是解答十分优美而流畅。

书中的大多数例题都比较容易，当然也有难解的。总的来说，只有少数几道需要有分析能力；即使是在这种情况下，对毫无准备的读者也能理解题目的提法并给以解答。

作者除了要使题目表现出统一的数学水平外，更着眼于题

目的趣味性。在解题中，有时需要引用某个公式。这时，有的读者很可能不甚记得或是全然不知所要用的那个公式，但这个公式却会油然而生。例如，第18题为阶乘用的斯特林公式及第14题求调和级数之和用的欧拉公式，都是上述情况的例证。

或许，读者也和作者一样会奇怪地感到 π 与 e 这两个数在概率题目中出现得如此之多。

作者借此机会特向在著书过程中给提供帮助的诸位朋友们致以衷心地感谢。

愿向对概率基本理论感兴趣的读者推荐作者与尔·鲁尔卡及杰·托马斯合著的《概率》教科书。该书已于1969年由《和平》出版社出版。

此外，符·费勒著的《概率引论及其应用》一书，已于1967年由《和平》书社出版。此书内容翔实，值得一读，故予推荐。

弗·马斯捷连尔

1964年

内 容 提 要

本书实际上包含57个有趣的问题，其中的7个问题是供讨论的。书中的大部份题目都不复杂，仅有寥寥数题才需要有一定的分析能力，即便是这样，在读者没有准备的情况下，也能够充分地理解题目，并且给出解答。

此书适合于高中学生课外阅读、对中学数学教师及低年级大学生也有一定帮助。

内 容

绪 言

问题的条件

1. 盛袜子的箱子 (1)
2. 连续取胜的抉择 (1)
3. 轻率的评判委员会成员 (1)
4. 取得头一次成功前的试验数 (2)
5. 投中正方形的硬币 (2)
6. 碰碰运气 (2)
7. 劝服固执的赌徒 (2)
8. 桥牌游戏中的《花色》 (3)
9. 掷骰子游戏 (3)
10. 参与硬赌的赌博者的心理试验 (3)

不拘格式的问题 (第11题和第12题)

11. 默契的结盟 (4)
12. 往哪里走? (4)
13. 囚犯的抉择 (5)
14. 选择息票 (5)
15. 在戏院里 (5)
16. 决赛中能否产生名符其实的第2名 (5)
17. 孪生骑士 (6)
18. 投掷硬币时的均衡状态 (7)
19. 谢苗尔·彼派斯的命题 (7)
20. 三方决斗 (7)
21. 选择放回去还是不放回去? (7)

22. 选 举..... (8)
23. 抛翻硬币不分胜负的概率..... (8)
24. 古怪的地下铁道..... (8)
25. 随机弦的长度..... (9)
26. 性急的决斗者..... (9)
27. 狡黠的伪造硬币者..... (9)
28. 贪婪的伪造硬币者..... (9)
29. 发霉的胶片..... (10)
30. 卖蛋糕小贩的算计..... (10)

有关生日的题目 (第31—34题)

31. 同日诞生..... (10)
32. 寻找同日诞生的人..... (10)
33. 关于同日诞生各种题目之间的相互关系..... (11)
34. 休息日与生日..... (11)
35. 在峭壁边缘上行走的酒鬼..... (11)
36. 赌徒的破产..... (11)
37. 狠赌与怯赌..... (12)
38. 一枚厚硬币..... (12)
39. 笨拙的化学家..... (12)
40. 第一张爱司牌..... (13)
41. 火车算题..... (13)
42. 一根短棒..... (13)
43. 一根折断的棒..... (13)
44. 在吃亏的游戏中如何取胜? (14)

巧合算题 (第45、46题)

45. 巧合的平均数..... (14)
46. 巧合的概率..... (15)

47. 确定最大的嫁妆.....	(15)
48. 确定最大的随机变数.....	(15)
49. 加倍精确.....	(16)
50. 随机2次方程	(16)
在二维空间与三维空间里的随机迷路问题 (51题与52题)	
51. 二维空间的随机迷路.....	(16)
52. 三维空间的随机迷路.....	(17)
53. 比方针.....	(18)
54. 比方针与垂直直线及水平直线.....	(18)
55. 一根长针.....	(18)
56. 两只盛球罐.....	(18)
57. 素因数的分布.....	(18)
附: 问题的解答及讨论.....	(20)

问题的条件

1 盛袜子的箱子

袜箱里放着红色和黑色两种袜子。如果从袜箱里随意提取两双袜子，那么提取的两双袜子全是红色的概率是 $1/2$ 。现在问：

(1) 袜箱里最少的袜子数量可能是多少？

(2) 如果黑色袜子是偶数的话，那么袜箱内最少的袜子数量可能是多少？

2 连续取胜的抉择

为了鼓励儿子能在网球运动方面取得长进，做爸爸的给儿子允诺：如果儿子连续打赢就给他奖品；但儿子在跟父亲对赛或者与俱乐部的网球冠军对赛中至少得打赢两场，即父亲—冠军—父亲，或者是冠军—父亲—冠军，由儿子自由选择其中的一种赛法。

已知，俱乐部的网球冠军比父亲打得好。

问：儿子应当挑选哪一种赛法？

3 轻率的评判委员会成员



在由3人组成的评判委员会中，有两位成员互不通风，各自以概率 p 进行自认为正确的决定，而第3个成员为了得出正确的决定，抛出一枚硬币，但最终的裁决必须通过多数表决。若由一人构成评判委员会的话，会按概率 p 得出正确的决定。问：哪一个评判委员会会以更大的概率作出公正的决定？

4 取得头一次成功前的试验数

平均须掷多少次骰子才能掷出个六点？

5 投中正方形的硬币

在美国，有一种很普遍的游戏：由参加游戏的人从较远的距离将一枚硬币抛向桌面，桌面上划有许多一英寸见方的格子。如果直径为 $3/4$ 英寸的硬币正好落在方格之中，那么游戏者便可得到奖品，否则他便输掉这枚硬币。问：在硬币落到桌面上的条件下有多大的可能性取胜而赢得奖品。

6 《碰碰运气》

《碰碰运气》是种赌博，通常在赌场进行，有时也在大众娱乐时进行。

当参加赌博的人各自在1、2、3、4、5、6各点上投下赌注之后，庄家便掷出三颗骰子。这时如果赌博者押赌注的点数与三颗骰子中的一颗、两颗甚或三颗中点时，则庄家必须按每一中点数赔给中点者一份赌注，而原押的赌注仍归原主。如若点数不中，赌博者便输掉这份赌注。

问：赌博者在每次押赌注时会遭受什么样的平均损失？（实际上可同时在几个点上押赌注，但每份押注都被看成是单份独立的赌注。）

7 劝服固执的赌徒

勃朗先生不听好友劝告，总是在轮盘的13点上押注一块美元。

为了让勃朗先生戒赌，这位好友与勃朗先生打赌20块美元。好友断言：勃朗会在36盘之后输个精光。

问：勃朗先生会不会接受这个打赌？

注：在美国大多数的轮盘赌都有38挡具有相同中点机会的点数。如果赌博者押赌注的号码中点，那么他便可取回自己的赌注，再获得赌注35倍数额的赢钱；如果不中点，就输掉所押的赌注。

8 桥牌游戏中的《花色》

经常可以听到，没有哪一个人，在打桥牌的时候，能够一手抓上13张黑桃。

问：在经过均匀洗牌的条件下，拿到一色的13张牌的概率有多大？

注：这里说的13张牌是指4个人打桥牌，一副牌52张，每人分得13张牌。

9 《掷骰子游戏》

掷骰子游戏，只需要一副骰子，玩起来容易、省时，是美国的一种大众娱乐。但从数学角度看，这种游戏却是涉及概率计算的一道有益算题。

游戏规则：游戏者同时掷出两颗骰子，计算两骰子的点数之和。如果所得点数之和为7和11就算赢；如果点数之和等于2、3或12就算输。其余的点数之和归他得分。假如他第一次得分，便可以继续掷骰子，直到他要么丧失得分输了，要么掷到总分7点赢了为止。

问：赢的可能性有多大？

10 参与硬赌的赌博者的心理试验

试验方法有二：

(1) 罐里放有10个黑球和10个白球，两种球完全相同，只是颜色不同。现在从罐里取出一球，如果这个球的颜色恰好与

你要的颜色一样，那么你可赢得10块美元；但如果颜色不一致的话，你就什么也得不到。

现在请你宣布为了参加这项赌博你准备缴纳的最大参赌费吧。赌博只准进行一次。

(2) 你的朋友有许多白球与黑球。他正按自己的意思把两种球装入罐内。待他装就之后你得先宣布所要选择的哪一种颜色的球：白色的或是黑色的，随后你就可以从罐内取球，碰碰你的运气。

问：你准备缴纳的参赌费最多是多少？赌博只准进行一次。



不拘格式的问题（第11题和第12题）

奥·海迈尔与杰·瓦伊里耶斯两位要作者注重那些被他们称谓《不拘格式的问题》。这些题目虽说不合情理，但毕竟具有概率性质。

11 默契的结盟

由两位素不相识的人，自发地想出一个任意的自然数记在心里，当他们两人同时说出各自的自然数时，如果完全一致的话，那么，他们两人都可以得奖。

请你猜猜看这是一个什么样的数？

12 往哪里走？^①

有两位素不相识的人，他们已经约定好，如何来彼此相认，他们必须在确定之日，约定之时在美国纽约市相会。他们

注① 原文系拉丁语，意思是往哪里走？

两都没到过纽约，然而他们却忘记指定相会的具体地点。

问：如果他们仍然企图相见的话，他们该往哪里走？②

13 囚犯的抉择

有3个囚犯，A、B和C，在牢里的表现都不错，并且都请求交保释放。经当局研究决定，3人中只释放两个。这个消息给3个囚犯知道了，可是他们都不晓得具体释放哪两个人。

囚犯A认得警卫队里的一个人，他知道将解释哪两个人。但A认为向警卫打听自己是否会被释放是种不道德的行为。不过A还是很想得知其中一个会被释放的人是谁。他在探听之前先估计到自己被释放的概率是 $2/3$ 。A思忖着：万一警卫说出：“B将获释。”那么他自己的获释机会就会降为 $1/2$ 。因为在这种情况下再获释的要么是A和B，要么就是B和C。然而，A的计算有误，现在就请您来给解释清楚。

14 选择息票

全部息票分放在几个盒子里，从1—5编了号。必须取足全套息票，即各种编号的五张息票才能取胜。如果从一个盒子里取出一张息票，那么平均须从几个盒子取，方能取满全套息票？

15 在戏院里

有8个男小伙和7个姑娘，每人弄到一张戏票。他（她）们全都坐在同一排座位上，总共占了15个位置。

问：这一排上由成对男女占有的邻接座位平均数是多少？

16 决赛中能否产生名副其实的第2名？

网球比赛共有8人参加。由各人自己碰运气抽得的号数确定每人在比赛梯队上的具体位置，见图1。

注② 为解此题，当然需要请教经常出入纽约的人士。请参见该题之讨论。

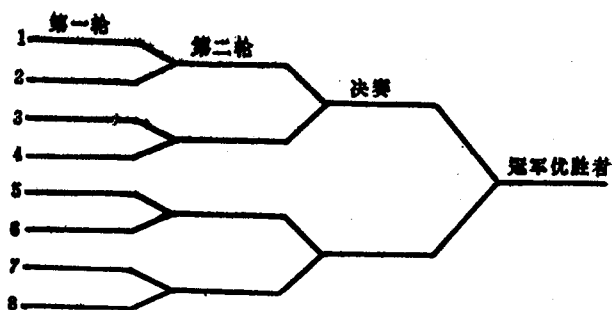


图 1 8人的比赛梯队队形

我们假定，优秀者总是能战胜按技能数第2的对手，并依次地打败所有其他参赛者而名列榜首。在决赛中被战败的则退居次位。

问：按技能高低数第2名的能占领亚军位置的 概率有多大？

17 孪生骑士



有个阿耳杜尔国王举行一次骑士比赛。比赛场上的顺序象网球比赛一样，由参加比赛的人自己抽签来确定（参阅第16题）。

参加比赛的共有8位骑士，都是当年驰骋沙场立过成功的骑马能手，他们中间有一对是孪生兄弟。

问：这对孪生兄弟在对手赛中见面的概率是多少？

(2) 在2^{*}骑士数条件下会有什么样的结局？

18 投掷硬币时的均衡状态

倘若你投掷100枚硬币，命中率达到百分之五十的概率是否存在？

19 谢苗尔·彼派斯的命题

谢苗尔·彼派斯先生向伊沙卡·牛顿提出这样一个问题：有下列A、B、C三种情况，其中哪一种的概率最大？

A：掷出6颗骰子，总有一颗是6点；

B：掷出12颗骰子，哪怕只有两个6点；

C：掷出18颗骰子，至少有三颗是6点的。

20 三方决斗

有A、B、C三个人聚到一起进行三方决斗。已知，对于A命中目标的概率为0.3；对C则为0.5；而对于B则是枪无虚发，百发百中。条件是参加决斗者以任选一个对手进行决斗。现在由A先射，再由B开枪，C则居三，以此顺序循环（受伤者退出决斗，直到最后只剩下一个人没有死伤）。

问：A应主持何种战略？

21 选择放回去还是不放回去？

面前摆着两只罐子，罐子里边都装着红球与黑球。两种球的手感完全一样。A罐中装着两个红球，一个黑球，B罐中装着101个红球，100个黑球。现在由你任选一罐，碰碰运气，当你选定之后，从该罐中取出两个球，然后请你说出你选的是哪一罐，如果说对了，就得奖品。当你从罐中取出第一个球并且猜准是什么颜色的时候，你就得拿定主意，在取第二个球之前是先把第一个球放回罐里呢，还是不放回去呢？

问：按您的战略应当怎么办？

22 选举

选举刚刚结束，参加选举的有两名候选人A与B。赞成他们的选票数为a与b，据初步统计 $a > b$ ，我们假定是3与2之比。

如果计算选票的方式是从票箱中按序列取票、唱票的方式进行的话，那么从已经取出的选票中赞同A与B的票数是否可能出现等同呢？哪怕是只出现一次。

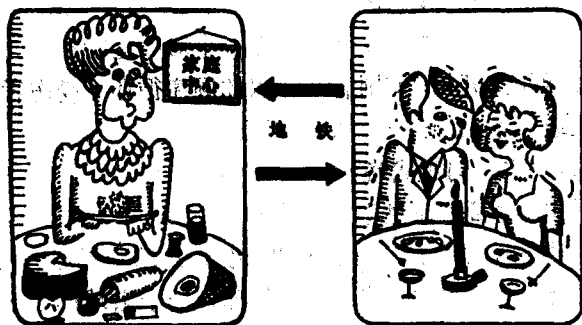
问：这种选票等同的概率有多大？

23 抛硬币不分胜负的概率

有A、B两名赌徒，他们进行抛硬币猜正反面的赌博，已经搞了N次。

问：当第一次抛出硬币之后将决定他两在整个赌钱过程中输赢不等的可能性有多大？

24 古怪的地下铁道



麦尔文先生，通常在午后3点到5点之间的偶然时间内结束当天的工作。他的母亲与未婚妻住在市里的两头。

下班后，麦尔文跳上第一列靠了站的火车，至于火车往哪个方向开对他倒是无所谓。麦尔文可以到母亲家里或到未婚妻家里，就是说到了哪家就在哪家用餐。麦尔文的母亲麦尔文娜

经常抱怨儿子很少到她身边来。但是麦尔文却自信：他与自己的母亲或未婚妻一道进食的机会是相等的。麦尔文与母亲一起进食的频率是20个工作日内仅有两次。

请您给解释一下这个现象。

25 随机弦的长度

如果在给定圆上任意取弦，那么弦的长度大于该圆半径的概率是多少？

26 性急的决斗者

凡在“小心城”里举行决斗很少有悲惨结局的，其原因是每个决斗者来到会暗地点的时间总是在清晨5至6点钟范围内的任意时刻，先到场的照例等候对手5分钟，若对手不来，先到者便会自行离去。

现在，假定后到者在5分钟之内到了场地，便举行决斗。

问：实际上进行对射的决斗所占的比例有多大？

27 狡猾的伪造硬币者

(1) 古代有个在皇宫里铸造硬币的人，他把伪造的硬币，往每个装100枚硬币的箱子里渗进一枚。后来国王怀疑铸币的人并下令要检查硬币。检查的办法是每100箱中抽查一箱，从该箱中任意取出一枚硬币做真伪鉴别。

问：伪造硬币的人未被暴露的概率有多大？

(2) 如果把100箱改成 n 箱，又会得到什么样的结局呢？

28 贪婪的伪造硬币者

有个伪造硬币的人，在装有 n 枚硬币的钱箱里放进 m 枚伪造的硬

