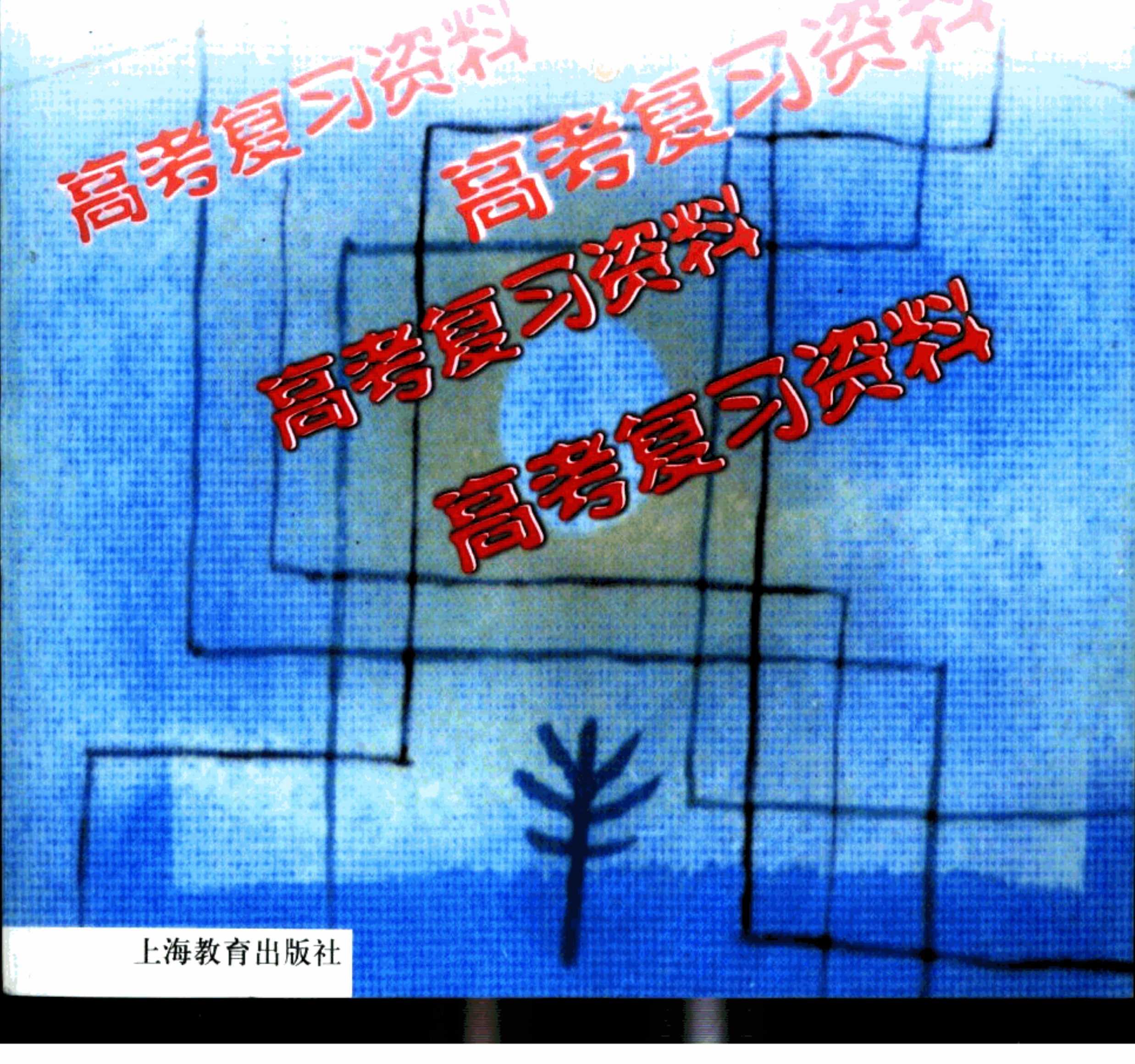
一分也不能少

高考数学

袁文彰　温秦富
崔　健　周丽华



上海教育出版社

前　言

完成高中数学第一轮复习的高三学生，进入综合练习阶段时，常常会因为第一轮复习的时间较长而遗忘一些重要的知识点以及解题方法，而第一轮复习的内容繁多，若抓不住重点、难点和某些关键问题，则在高考中很容易失分。对于高考迫在眉睫的学生来说，如何在最短的时间内把高中数学的重点回顾一遍，把高考中容易失分的地方滤一遍，使自己参加高考时能考出最高的水平，拿到本该拿到的每一分，取得最好的成绩，这是每位高三学生面临的现实问题。

基于以上想法，我们编写了这本数学考点梳理资料——《一分也不能少·高考数学》。本书编写的理念是：通过各章重点内容整理，经典例题选讲，使高三临考学生在短时间内，在原有基础上，在应考能力上有较明显的提高。在数学知识点的整理上，我们不求全，不贪深，只求突出各章的重点、难点，加深理解，明确考查点；在例题的挑选上不求难，只求把高考的重点，考生容易失分的地方指出来，调整解题心态。同样地，在每章所附的少量练习题中，也完全贯穿着最新的高考趋势。

参加本书编写的有温秦富（第一、二、三、六章及模拟试卷三）；崔健（第七、八章及模拟试卷四）；周丽华（第四、五章），袁文彰（模拟试卷一、二）。

由于时间紧迫，又限于编者的水平，书中的疏漏和错误在所难免，请读者赐教指正，以便再版时及时改进。

编　者

2003.3.16

目　录

第一章　集合与函数

一、集合与命题

【考点分析】

集合是每年高考必考的知识之一,一般考查两点:一是集合本身的知识;二是集合语言与集合思想的应用.复习时要抓住元素这个关键,集合的元素具有确定性、互异性、无序性.掌握集合的表示法和集合的分类,牢固掌握集合的交、并、补运算这一命题热点,会计算集合中子集的个数.

关于命题的考题,主要是判断命题的真假、充要条件的题型.要求掌握有关的术语和符号,能够灵活运用逆否命题的等价性判别真伪.

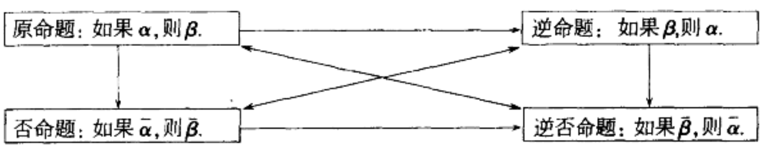
【复习要点】

1. 集合的基本性质:集合的元素具有确定性、互异性、无序性.

2. 集合的下述内容是考查的重点:

子集与真子集	$A\subseteq B$:若 $x\in A$,则 $x\in B$. $A\subset B$:$A\subseteq B$ 且存在 $x\in B$,而 $x\notin A$.
交　集	$A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$(注意逻辑联结词"且").
并　集	$A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$(注意逻辑联结词"或").
全集和补集	全集 I 是给定的集合,所讨论的集合都是它的子集;$\overline{A}=\{x\mid x\in I$ 且 $x\notin A\}$.补集概念是与全集概念连在一起的.

3. 命题的四种形式:



4. 充分条件与必要条件:对于命题:若 α,则 β.

$\alpha\Rightarrow\beta$.	α 是 β 的充分条件.
$\beta\Rightarrow\alpha$.	α 是 β 的必要条件.
$\alpha\Leftrightarrow\beta$.	既有 $\alpha\Rightarrow\beta$,又有 $\beta\Rightarrow\alpha$,那么 α 是 β 的充分且必要条件.

【典型例题评价】

例 1 设全集 $I=\{-2,3,a^2+2a-3\}$，$A=\{|a+1|,-2\}$，$\overline{A}=\{5\}$，写出集合 $M=\{x|x=\log_2|a|\}$的全部子集.

解 因为 $A\cup\overline{A}=\{|a+1|,-2,5\}$，又因为 $I=\{-2,3,a^2+2a-3\}$，

所以$\begin{cases}a^2+2a-3=5\cdots①,\\|a+1|=3\cdots②.\end{cases}$

解①得 $a=2$ 或 $a=-4$，均满足 $|a+1|=3$.

所以 $M=\{\log_2 2,\log_2 4\}=\{1,2\}$，其全部子集为$\varnothing$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{1,2\}$.

评析 本题考查了集合的三个特性：元素的确定性、互异性和无序性. 另外，集合问题注意利用文氏图与逻辑推理相结合，常能使解题思路清晰.

例 2 如果集合 $M=\{(x,y)|y\geqslant x^2\}$，集合 $N=\{(x,y)|x^2+(y-a)^2\leqslant 1\}$，那么使 $M\cap N=N$ 成立的充要条件是 ( )

(A) $a\geqslant\frac{5}{4}$； (B) $a=\frac{5}{4}$；

(C) $a\geqslant 1$； (D) $0\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$.

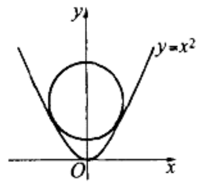


图 1-1

解 M、N 均为平面直角坐标系中的点集，M 为抛物线 $y=x^2$ 上及内部所有点的集合，N 为圆 $x^2+(y-a)^2=1$ 上及内部所有点的集合，如图 1-1，要使$M\cap N=N$ 成立，即使圆 $x^2+(y-a)^2=1$ 包含在抛物线 $y=x^2$ 的内部(包括相切)，此时，解方程组$\begin{cases}x^2+(y-a)^2=1,\\y=x^2,\end{cases}$消元整理得 $y^2+(1-2a)y+a^2-1=0$，由 $\Delta=(1-2a)^2-4(a^2-1)\leqslant 0$，得 $a\geqslant\frac{5}{4}$. 因此 $a\geqslant\frac{5}{4}$，即选(A).

评析 本题表明集合问题经常与其他知识联系在一起，以考查学生的综合运用知识与解决问题的能力.

例 3 已知集合 $A=\{(x,y)|y=ax+b,x\in\mathbf{Z}\}$，集合 $B=\{(x,y)|y=3x^2+15,x\in\mathbf{Z}\}$，集合 $C=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 144,x、y\in\mathbf{R}\}$，是否存在 a、$b\in\mathbf{R}$，使①$A\cap B\neq\varnothing$；②$(a,b)\in C$ 同时成立？并说明理由.

解法一 若存在实数 a、b，使两个条件成立，则有

$$\begin{cases}ax+b=3x^2+15, & ①\\a^2+b^2\leqslant 144. & ②\end{cases}$$

对 $x\in\mathbf{Z}$ 成立，由①式，得 $3x^2-ax+15-b=0$.

所以 $\Delta=(-a)^2-12(15-b)\geqslant 0$，即 $a^2\geqslant 180-12b$.

因此 $a^2+b^2\geqslant(180-12b)+b^2=(b-6)^2+144\geqslant 144$，而 $a^2+b^2\leqslant 144$.

故在 $b=6$ 时 $a^2+b^2\leqslant 144$ 成立，此时 $a^2+b^2=144$，解得 $a=\pm 6\sqrt{3}$.

从而 $ax+b=3x^2+15$，即$\pm 6\sqrt{3}x=3x^2+9$，求得 $x=\pm\sqrt{3}$，与 $x\in\mathbf{Z}$ 矛盾.

因此，不存在这样的实数 a、b，使其满足题设的两个条件.

解法二 若存在实数 a、b，使两个条件成立，设 $x=n\in\mathbf{Z}$，则有

$$\begin{cases}na+b=3n^2+15, & ①\\a^2+b^2\leqslant 144. & ②\end{cases}$$

这表明点(a,b)在直线 $nx+y=3n^2+15$ 上，又在圆 $x^2+y^2=144$ 的圆周上或其内部. 于是要使这样的点存在，只需圆心到直线的距离不超过半径，即

$$\frac{|3n^2+15|}{\sqrt{n^2+1}}\leqslant 12 \Rightarrow n^4-6n^2+9\leqslant 0\Rightarrow (n^2-3)^2\leqslant 0.$$

当且仅当 $n^2=3$ 时成立，即 $n=\pm\sqrt{3}$，这与 $n\in\mathbf{Z}$ 相矛盾.

因此，不存在这样的实数 a、b 满足题设的两个条件.

评析 由 $A\cap B\neq\varnothing$，可知方程 $ax+b=3x^2+15$ 有整数解，再由$(a,b)\in C$，得 $a^2+b^2\leqslant 144$，从而将原问题转化为解二次不等式的问题，或转化为直线与圆的位置关系问题.

例 4 说出下列命题的一个等价命题：

(1) 已知 a、$b\in\mathbf{R}$，若 $a+b>0$ 且 $ab>0$，则 $a>0$ 且 $b>0$；

(2) 若 x_1、x_2 是实系数方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个实数根，则 $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$.

解 (1) 若 a、$b\in\mathbf{R}$，若 a、b 中至少有一个不大于 0，则 $a+b\leqslant 0$ 或 $ab\leqslant 0$.

(2) 若实数 $x_1+x_2\neq-\dfrac{b}{a}$，则 x_1、x_2 不全是实系数方程 $ax^2+bx+c=0$ 的实根.

评析 原命题的等价命题即为它的逆否命题. 条件的否定形式，要注意其全面性. 如(1)的否定是：两个实数全大于 0 的否定是不全大于 0，而不是全不大于 0. 另外，"$a>0$ 且 $b>0$"的否定是 $a>0$ 的否定与 $b>0$ 的否定的并集，即"$a\leqslant 0$ 或 $b\leqslant 0$".

练　习　题

1. 已知 I 是全集，非空集合 P、Q 满足 $P\subset Q\subset I$. 若 P、Q 的一个集合运算表达式，使运算结果为$\varnothing$，则这个运算表达式可以是________(只要写出一个表达式即可).

2. 已知集合 $M=\{2,3,a^2+1\}$，集合 $N=\{a^2+a-4,2a+1,-1\}$. 若 $M\cap N=\{2\}$，则 $a=$________.

3. 如果集合 $A=\{x\mid x>3\}$，集合 $B=\{x\mid x<4\}$，那么"$x\in A$ 或 $x\in B$"是"$x\in A\cap B$"的________条件.

4. 已知一个命题的否命题是"若 x、y 中至少有一个不等于 0，则 $x^2+y^2\neq 0$". 它的原命题是________.

5. 已知集合 M、集合 N 中各有 6 个元素，且 $M\cap N$ 有 4 个元素. 如果集合 P 同时满足 $P\subseteq M\cup N$和 $P\supseteq M\cap N$，那么满足条件的集合 P 共有________个.

6. 不等式$|x|+|y|\geqslant|x+y|$中等号成立的充要条件是 (　　)

(A) $xy\geqslant 0$；　(B) $xy>0$；

(C) x、y 中至少有一个为 0；　(D) x、y 中仅有一个为 0.

7. 如果 a、$b\in\mathbf{R}$，那么 $a+b>0$ 的一个充分非必要条件是下列四式中的 (　　)

① $ab>0$；② $a>0$ 或 $b>0$；③ $a+b>2$；④ $a>0$ 且 $b>0$.

(A) ①、②；　(B) ①、③；　(C) ③、④；　(D) ②、③.

8. 已知集合 $A=\{x\mid x=\lg(a^2+10),a\in\mathbf{R}\}$，集合 $B=\{y\mid y=b^2-2b-2,b\in\mathbf{R}\}$，试确定 A、B 的关系.

9. 已知集合 $I=\mathbf{R}$，集合 $M=\left\{x\,\middle|\,\left(\frac{1}{2}\right)^{(x+2)(x-3)}>1\right\}$，集合 $N=\{t\mid\log_3(t-a)<2\}$. 当 a

取何值时，$\overline{M}\cup N=\overline{M}$？

10. 已知集合 $A=\{(x,y)\mid y^2=x+1\}$，集合 $B=\{(x,y)\mid 4x^2+2x-2y+5=0\}$，集合 $C=\{(x,y)\mid y=kx+b\}$. 是否存在 k、$b\in\mathbf{N}$，使 $(A\cup B)\cap C=\varnothing$？证明你的结论.

二、函数及其性质

【考点分析】

本单元高考的主要内容有：函数的概念与性质；反函数的概念与图像；幂函数、指数函数、对数函数的定义、图像、性质及其应用，简单的指数方程和对数方程. 函数是高中数学的一条主线，函数的概念、性质及函数的思想方法贯穿于整个高中数学，函数思想是解决数学问题的重要思想方法之一，它的应用十分广泛. 因此，函数部分总是历年高考考查的重点. 近三年高考试题中，有关函数的平均约有 7 道，约占 50 分左右. 解答题、应用题经常以函数为背景，考查综合能力，可谓是“重中之重”.

函数概念的深化是以集合、映射（或函数关系的建立）的概念为基础. 重点和难点是函数的概念、函数的奇偶性、单调性、周期性、图像、函数的最大值与最小值，以及几类常见的函数（一次函数、二次函数、指数函数和对数函数等）. 含参数的函数问题和复合函数也是近年来高考的热点，重点与难点. 以能力立意，注重综合运用函数的知识和思想，以建立函数的关系式和求最大值或最小值为载体，注重解决实际问题强化应用意识的考查，也是近年来高考考查的一个显著特点.

【复习要点】

1. 函数与反函数.

(1) 函数的定义域.

求解函数的定义域时，要尤其注意以下几点：

① 分母不为零；

② 偶次根号内被开方式非负；

③ 对数中的真数为正；

④ 对数式的底 $a=f(x)$ 时，要求 $f(x)>0$，且 $f(x)\neq 0$.

(2) 函数的值域.

求函数值域较灵活，并且只要求某些较简单的函数值域，常见方法有：

① 利用已知函数表达式从自变量的允许范围求出值域；

② 利用二次方根的判别式（注意函数式变形时的等价问题）；

③ 配方法；

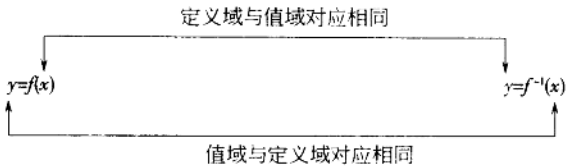
④ 换元法；

⑤ 不等式法；

⑥ 反函数法；

⑦ 单调性法.

(3) 求函数 $y=f(x)$ 的反函数：从 $y=f(x)$ 中解出 $x=f^{-1}(y)$，再将字母 x、y 互换，得 $y=f^{-1}(x)$，并要注意反函数的定义域. $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称. $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的定义域和值域的对应关系如下：



2. 函数的性质.

(1) 奇偶性.

若 $f(-x)=-f(x)$，则 $f(x)$为奇函数，它的图像关于原点对称.

若 $f(-x)=f(x)$，则 $f(x)$为偶函数，它的图像关于 y 轴对称.

具有奇偶性的函数必有定义域关于原点对称.奇偶性是一种特殊的对称性，是全局性质.如函数 $y=x^2-2x+2$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称，但这个函数不是偶函数.

(2) 单调性.

在某个区间内，若 $x_1<x_2$，使 $f(x_1)<f(x_2)$成立，则在此区间上 $f(x)$为增函数.

在某个区间内，若 $x_1<x_2$，使 $f(x_1)>f(x_2)$成立，则在此区间上 $f(x)$为减函数.

单调性是函数的局部性质.例如 $y=\frac{1}{x}$在$(-\infty,0)$或$(0,\infty)$上单调递减，但不是定义域上的单调函数.判别函数单调性的方法如下：

① 作 $f(x_1)-f(x_2)$的差与 0 比较大小；

② 作$\frac{f(x_1)}{f(x_2)}$的商与 1 比较大小(要求 $f(x_1)$、$f(x_2)$同号).

(3) 周期性.

若存在不为零的常数 T，使 $f(x)=f(x+T)$成立，则 $f(x)$为周期函数，其中 T 为它的周期.若 T_0 是 T 中的最小正数，则称 T_0 为函数的最小正周期.周期性也是函数的全局性质.

3. 函数的图像.

(1) 已知函数的解析式，作函数的图像，一般是列表、描点、连线.

(2) 图像变换：利用的图像，作下列函数的图像：

$y=\|f(x)\|$	$y=f(\|x\|)$	$y=f(x-a)-b$
翻折到 x 轴上方	关于 y 轴对称	平移变换

(3) 关于对称：已知曲线 C：$y=f(x)$的图像，求作 C 关于不同对称轴或对称点的图像：

关于 x 轴对称	关于 y 轴对称	关于原点对称	关于 $y=x$ 对称	关于点(a,b)对称
$y=-f(x)$	$y=f(-x)$	$y=-f(-x)$	$y=f^{-1}(x)$	$y=2b-f(2a-x)$

其中关于点(a,b)对称：“设(x,y)是 $y=f(x)$上点(x_0,y_0)的对称点，则 $a=\frac{x+x_0}{2}$，$b=$

$\dfrac{y+y_0}{2}$，得 $x_0=2a-x$，$y_0=2b-y$，代入 $y=f(x)$，有 $2b-y=f(2a-x)$."

(4) 函数 $y=f(a-x)$ 和 $y=f(x-a)$ 的图像关于直线 $x=a$ 对称；如果函数 $y=f(x)$ 满足 $f(a+x)=f(a-x)$（或者 $f(x)=f(2a-x)$），则函数图像本身关于直线 $x=a$ 对称.

(5) 一般地，函数 $y=f(x)$ 的图像如果有两条竖直对称轴 $x=a$，$x=b(a<b)$，那么这是以 $T=2(b-a)$ 为周期的周期函数. 这是因为：

$$f(x)=f(2a-x)=f[2b-(2a+x)]=f[(2b-2a)+x].$$

4. 重点复习的函数主要有以下几种：

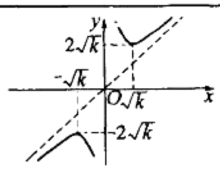
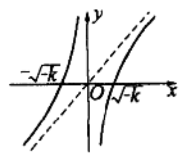
(1) 二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 是最基本的、也是与其他知识综合应用最频繁的函数. 其应用的主要依据是它的图像的对称性（关于直线 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 对称）和对称轴一侧的单调性，还有它的图像与 x 轴的交点（如果存在的话）. 基本形式：

标准代数式	$y=ax^2+bx+c(a\neq0)$
配方顶点式	$y=a(x+m)^2+n$
分解标根式	$y=a(x-\alpha)(x-\beta)(\Delta\geqslant0)$

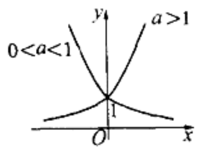
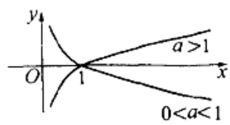
(2) 反比例函数.

$y=\dfrac{k}{x}(k\neq0)$ 是奇函数，所有分式函数 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 的图像都可由它经过平移和翻折得到，这是因为 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 可化为 $y=\dfrac{k}{x+m}+n$.

(3) 函数 $y=x+\dfrac{k}{x}(k\neq0)$ 也是奇函数.

图　像	$k>0$  图　1-2	$k<0$  图　1-3
单调性	在 $(-\infty,-\sqrt{k})$ 和 $(\sqrt{k},+\infty)$ 上单调递增；在 $(-\sqrt{k},0)$ 和 $(0,\sqrt{k})$ 上单调递减.	在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 单调递增，经过点 $(\sqrt{-k},0)$ 和 $(-\sqrt{-k},0)$.
最　值	当 $x>0$ 时，有最小值 $2\sqrt{k}(x=\sqrt{k})$；当 $x<0$ 时，有最大值 $-2\sqrt{k}(x=-\sqrt{k})$.	无最值.

(4) 指数函数和对数函数.

函　数	$y=a^x(a>0,a\neq1)$	$y=\log_a x(a>0,a\neq1)$
定义域	**R**	$\mathbf{R}^+$
值　域	$\mathbf{R}^+$	**R**
单调性	当 $a>1$ 时递增，当 $0<a<1$ 时递减	当 $a>1$ 时递增，当 $0<a<1$ 时递减
奇偶性	无	无
图　像	 图　1-4	 图　1-5

【典型例题评析】

例 1　已知 $f(x)=\dfrac{2^x}{1-2^x}(x\in\mathbf{R})$，求 $f^{-1}\left(\dfrac{1}{3}\right)$的值.

解　由函数与反函数的关系，得 $\dfrac{2^x}{1+2^x}=\dfrac{1}{3}$. 解得 $x=-1$.

所以 $f^{-1}\left(\dfrac{1}{3}\right)=-1$.

评析　理解与运用函数与其反函数之间的关系，是高考常考的知识点.

例 2　已知 $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{|x+2|-2}$. 求证：

(1) $f(x)$是奇函数；

(2) $f(x)$在区间$(0,1)$上是减函数.

解　(1) 函数的定义域为$-1\leqslant x\leqslant 1$，原函数化简得 $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

因为 $f(-x)=-\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}=-f(x)$，所以 $f(x)$是奇函数.

(2) 设 $0<x_1<x_2<1$，则

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{\sqrt{1-x_1^2}}{x_1}-\frac{\sqrt{1-x_2^2}}{x_2}=\frac{x_2\sqrt{1-x_1^2}-x_1\sqrt{1-x_2^2}}{x_1x_2}$$

$$=\frac{x_2^2(1-x_1^2)-x_1^2(1-x_2^2)}{x_1x_2(x_2\sqrt{1-x_1^2}+x_1\sqrt{1-x_2^2})}=\frac{(x_2-x_1)(x_2+x_1)}{x_1x_2(x_2\sqrt{1-x_1^2}+x_1\sqrt{1-x_2^2})}.$$

因为 $0<x_1<x_2<1$，所以 $f(x_1)-f(x_2)>0$，因此 $f(x_1)>f(x_2)$.

所以，$f(x)$在区间$(0,1)$上是减函数.

评析　函数的奇偶性、单调性是需要重点掌握的知识点，是高考考查的热点. 关于增减性的证明，在解答题中，往往需要先证明函数的单调性，再运用增减性质进行解题，是不可忽略的得分要点.

例 3 解关于 x 的方程 $\lg x+\lg(4-x)=\lg(a+2x)$，并讨论解的个数.

解 原方程化为：$a=-x^2+2x, 0<x<4$.

设 $y=a, y=-x^2+2x(0<x<4)$，观察图像，如图 1-6.

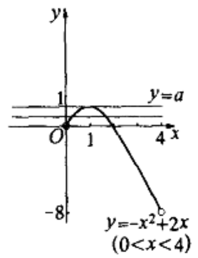


图 1-6

当 $a>1$ 或 $a\leqslant-8$ 时，无解；当 $0<a<1$ 时，有两解 $x=1\pm\sqrt{1-a}$；当 $-8<a\leqslant0$ 时，有一解 $x=1-\sqrt{1-a}$；当 $a=1$ 时，有一解 $x=1$.

评析 数形结合的思想方法，是重要的解题方法. 运用好数学思想方法，对分析问题的辅助作用极大，往往使问题难度降低，产生比较好的解题方法.

例 4 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且恒满足 $f(2+x)=f(2-x)$ 和 $f(6+x)=f(6-x)$. 当 $2\leqslant x\leqslant6$ 时，$f(x)=2-\frac{1}{2}x$.

(1) 求证：$f(x)$ 是以 8 为周期的周期函数；

(2) 求 $f(x)$ 的表达式.

(1) **证明** $\because$ $f(2+x)=f(2-x)$，

$\therefore$ $f[2+(x-2)]=f[2-(x-2)]$，即 $f(x)=f(4-x)\cdots$①.

又 $\because$ $f(6+x)=f(6-x)$，

$\therefore$ $f[6+(2+x)]=f[6-(2+x)]$，即 $f(x+8)=f(4-x)\cdots$②.

由①、②，可知 $f(x+8)=f(x)(x\in\mathbf{R})$ 恒成立.

$\therefore$ $f(x)$ 是以 8 为周期的周期函数.

(2) **解** 由 $f(2+x)=f(2-x)$，知函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=2$ 对称.

$\because$ 当 $2\leqslant x\leqslant6$ 时，$f(x)=2-\frac{1}{2}x$，

$\therefore$ 当 $-2\leqslant x\leqslant2$ 时，$f(x)=f(4-x)=-\frac{1}{2}(4-x)+2=\frac{1}{2}x$.

$\because$ $f(x)=f(x-8k)(k\in\mathbf{Z})$ 恒成立，

$$\therefore\quad f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(x-8k) & (\text{当 } 8k-2\leqslant x\leqslant 8k+2 \text{ 时})\\ -\frac{1}{2}(x-8k)+2 & (\text{当 } 8k+2\leqslant x\leqslant 8k+6 \text{ 时})\end{cases}\quad(k\in\mathbf{Z}).$$

评析 一般地，如果 $f(x)$ 的图像若有两条竖直的对称轴 $x=a, x=b(a<b)$，那么 $f(x)$ 是以 $2(b-a)$ 为周期的周期函数. 这是因为：$f(x)=f(2a-x)=f(2b-2a+x)$，所以 $T=2(b-a)$.

例 5 已知 $f(x)=x+\frac{a}{x+1}, a\in\mathbf{R}, x\in[0,+\infty)$，求 $f(x)$ 的最小值.

解 (i) 当 $a\leqslant0$ 时，$f(x)=x+\frac{a}{x+1}$ 在 $[0,+\infty)$ 上是增函数.

$\therefore$ $f(x)_{\min}=f(0)=a$.

(ii) 当 $a\geqslant1$ 时，$f(x)=x+\frac{a}{x+1}=x+1+\frac{a}{x+1}-1\geqslant2\sqrt{a}-1$，当且仅当 $x+1=\frac{a}{x+1}$，

即 $x=\sqrt{a}-1\in[0,+\infty)$时等号成立.

$\therefore\ f(x)_{\min}=2\sqrt{a}-1$.

(ⅲ) 当 $0<a<1$ 时,对任意 $x_1>x_2>0$,

$\because\ f(x_1)-f(x_2)=(x_1-x_2)\left[1-\dfrac{a}{(x_1+1)(x_2+1)}\right]$,

又$\because\ a\in(0,1),(x_1+1)(x_2-1)>1$,

$\therefore\ f(x_1)-f(x_2)>0$,即 $f(x)$是增函数. $\therefore\ f(x)_{\min}=f(0)=a$.

综上所述,$f(x)_{\min}=\begin{cases}a, & 当\ a<1\ 时;\\ 2\sqrt{a}-1, & 当\ a\geqslant 1\ 时.\end{cases}$

评析 利用基本不等式求最值或值域时,一种情形是满足不等式取等号的条件时的直接运用;一种情形是不满足不等式取等号的条件时的间接运用,如部分单调性.

例 6 已知函数 $f(x)=\log_a\dfrac{x-3}{x+3}(a>0,a\neq1)$的定义域为$[\alpha,\beta)$,值域为$(\log_a a(\beta-1),\log_a a(\alpha-1)]$.

(1) 求证:$\alpha>3$;

(2) 若函数 $f(x)$在$[\alpha,\beta)$上为减函数,求 a 的取值范围.

(1) **证明** 由$\dfrac{x-3}{x+3}>0$,得 $x\in(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$.

又因为 $a(\alpha-1)>0$ 且 $a>0$,所以 $\alpha>1$.

由已知函数 $f(x)$的定义域为$[\alpha,\beta)$,所以 $\alpha>3$.

(2) **解** 设函数 $g(x)=\dfrac{x-3}{x+3}=1-\dfrac{6}{x+3}$,在其定义域上 $g(x)$为增函数.

因为 $f(x)$在$[\alpha,\beta)$上为减函数,所以 $0<a<1$.

又$\because\ f(x)$的定义域为$[\alpha,\beta)$,值域为$(\log_a a(\beta-1),\log_a a(\alpha-1)]$,

$\therefore\ \log_a\dfrac{\alpha-3}{\alpha+3}=\log_a a(\alpha-1)$,$\log_a\dfrac{\beta-3}{\beta+3}=\log_a a(\beta-1)$,即 α、β 是方程 $\log_a\dfrac{x-3}{x+3}=\log_a a(x-1)$的两个相异实根,且 $\beta>\alpha>3$.

由上述方程,整理得 $ax^2+(2a-1)x+3-3a=0$,此方程有两个大于 3 的相异实根的充要条件是:

$$\begin{cases}\Delta=(2a-1)^2-4a(3-3a)>0,\\ -\dfrac{2a-1}{2a}>3,\\ 9a+3(2a-1)+3-3a>0.\end{cases}$$

解得 $0<a<\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$.

评析 本题的要点是运用函数概念中自变量与值域的对应关系,将问题转化为有关一元二次方程根的分布的问题.

例 7 为了确保交通安全,交通部门规定,在交通事故易发地段内的车距 d 与车速 v(km/h)的平方及车身长 s(m)的积成正比,且最小车距不得少于半个车身长.假定车身长为 s(m),且当车速为 50(km/h)时,车距恰为车身长 s.已知车流量 $Q=\dfrac{1000v}{d+s}$,交通繁忙时,应规定怎样的车速,才能使此地段的车流量 Q 最大?

解 设正比例系数为 k,则 $d=kv^2s$.

当 $d=s$ 时，$v=50$，∴ $k\cdot 2500=1$，解得 $k=\frac{1}{2500}$.

当 $d=\frac{1}{2}s$ 时，$v=25\sqrt{2}$.

∴ $d=\begin{cases}\frac{1}{2}s\text{，当 } v\leqslant 25\sqrt{2}\text{时；}\\ \frac{1}{2500}v^2 s\text{，当 } v>25\sqrt{2}\text{时.}\end{cases}$ 因此 $Q=\frac{1000v}{d+s}=\begin{cases}\frac{2000}{3s}v\text{，当 } v\leqslant 25\sqrt{2}\text{时，}\\ \frac{1000v}{s\left(1+\frac{v^2}{2500}\right)}\text{，当 } v>25\sqrt{2}\text{时.}\end{cases}$

当 $v\leqslant 25\sqrt{2}$ 时，$Q(v)$ 为递增函数. ∴ $Q\leqslant\frac{50000\sqrt{2}}{3s}$.

当 $v>25\sqrt{2}$ 时，$Q=\frac{1000}{s\cdot\left(\frac{1}{v}+\frac{v}{2500}\right)}\leqslant\frac{1000}{s\cdot 2\sqrt{\frac{1}{2500}}}=\frac{25000}{s}$.

当且仅当 $\frac{1}{v}=\frac{v}{2500}$，即 $v=50\in(25\sqrt{2},+\infty)$ 时等号成立.

∵ $\frac{25000}{s}>\frac{50000\sqrt{2}}{3s}$，

∴ 最大车流量为 $\frac{25000}{s}$，此时应规定车速为 $v=50(\text{km/h})$.

评析 函数应用问题主要是将实际问题抽象成数学问题，并求其函数的最值. 一般步骤为：(1) 设计自变量；(2) 将涉及到的其他变量用自变量的解析式表示出来；(3) 建立目标函数，确定函数的定义域；(4) 根据目标函数的解析式的特征，运用相应的方法求解最值.

练 习 题

1. 函数 $y=\frac{\sqrt{x^2-3x-4}}{|x+1|-2}$ 的定义域为__________.

2. 函数 $f(x)=\sqrt{1-2x}-x$ 的值域为__________.

3. 若自变量 $x\in\mathbf{R}$，$x\neq 0$，且 $2f(x)-f\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}=0$，则 $f(x)=$__________，值域为__________.

4. 函数 $f(x)=\frac{x^2-4x-3}{x-1}$，$x\in[2,4]$ 的值域为__________.

5. 若函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{2}$ 的定义域与值域均为 $[1,b]$ $(b>1)$，则 b 为__________.

6. 若 $f(x)=ax^2+(a+1)x+2$ 是以 $[-2,2]$ 为定义域的偶函数，则 $f(x)$ 的值域是__________.

7. 已知奇函数 $f(x)$，$x\in\mathbf{R}$，对于任意 x 满足 $f(x+2)=-f(x)$. 若当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)=x$，则 $f(99)=$__________.

8. 若 $y=kx^2-4x-8$ 在区间 $[5,20]$ 上为减函数，则 k 的范围是__________.

9. 曲线 $y=\frac{x+2}{x+1}$ 的对称中心坐标为__________.

10. 函数 $y=a^{-x}$ 与 $y=\log_a(-x)$的图像关于直线____________对称.

11. 若 $f(x)=1-\sqrt{x}$,$g(x)=\sqrt{1-x}+\sqrt{x}$,则 $y=f(x)+g(x)=$______________.

12. 已知定义在 **R** 上的偶函数 $f(x)$在$[0,+\infty)$上是增函数. 若 $f(1)=0$,则满足 $f(\log_{\frac{1}{2}}x)>0$ 的 x 的取值范围是 ( )

(A) $\left\{x\,\middle|\,0<x<\frac{1}{2}\right\}$; (B) $\{x\mid x>2\}$;

(C) $\left\{x\,\middle|\,0<x<\frac{1}{2}\text{或 }x>2\right\}$; (D) $\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{2}<x<1\text{ 或 }x>2\right\}$.

13. 函数 $f(x)=|x|(|x-2|-|x+2|)$ ( )

(A) 既是减函数又是奇函数; (B) 是奇函数但不是减函数;

(C) 是减函数但不是奇函数; (D) 既不是减函数又不是奇函数.

14. 若函数 $f(x)=\dfrac{ax+1}{x+2}$在区间$(-2,+\infty)$上是增函数,则 a 的取值范围为 ( )

(A) $a>-2$; (B) $a<-1$ 或 $a>1$; (C) $0<a<\frac{1}{2}$; (D) $a>\frac{1}{2}$.

15. 已知函数 $y=f(x)$对于一切实数 x 都有 $f(3-x)=f(3+x)$. 若方程 $f(x)=0$ 有且只有两个不相等的实数根,则这两个实数根的和等于 ( )

(A) 0; (B) 2; (C) 3; (D) 6.

16. 已知定义在$[-1,1]$上的函数是减函数,且是奇函数. 若 $f(a^2-a-1)+f(4a-5)\geqslant 0$,求实数 a 的取值范围.

17. 渔场中鱼群的养殖量为 m 吨,为保证鱼群的生长空间,实际养殖量不能超过最大养殖量,必须留出适当的空闲量. 已知鱼群的年增长量 y 吨和实际养殖量 x 吨以及空闲率的乘积成正比,比例系数为 $k(k>0)$(空闲率:空闲量与最大养殖量的比值).

(1) 写出 y 关于 x 的函数关系式,并指出这个函数的定义域;

(2) 求鱼群年增长量的最大值.

18. 已知 $f(x)=\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2(x>1)$.

(1) 求 $f(x)$的反函数 $f^{-1}(x)$及其定义域;

(2) 判断 $f^{-1}(x)$在其定义域内的单调性;

(3) 若不等式$(1-\sqrt{x})f^{-1}(x)>a(a-\sqrt{x})$对 $x\in\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$恒成立,求实数 a 的取值范围.

19. 已知函数 $f(x)=\sqrt{x^2+1}-ax$,其中 $a>0$.

(1) 解不等式 $f(x)\leqslant 1$;

(2) 求 a 的取值范围,使函数 $f(x)$在区间$[0,+\infty)$上是单调函数.

第二章 不 等 式

【考点分析】

不等式的有关内容是中学数学的基础内容和重要部分，也是高等数学的重要工具. 近三年高考试题中，有关不等式的题目约占 5 至 7 道，考试内容为不等式的概念和性质，两个重要不等式的应用，证明不等式与解不等式，绝对值不等式. 单独考查不等式的题目很少，而与函数、应用问题等内容结合在一起，综合考查的题目较多. 在这类综合题目中，不等式内容是问题解决的重要组成部分，或者是必须运用的解题方法与手段.

【复习要点】

1. 不等式的基本性质主要有：

(1) 若 $a>b$, $b>c$, 则 $a>c$.

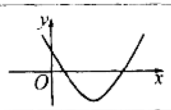
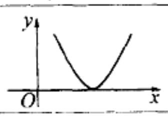
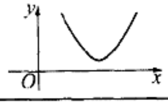
(2) 若 $a>b$, 则 $a+c>b+c$；若 $a>b, c>d$，则 $a+c>b+d$.

(3) 若 $a>b, c>0$，则 $ac>bc$；若 $a>b, c<0$，则 $ac<bc$；若 $a>b>0, c>d>0$，则 $ac>bd$.

(4) 若 $a>b>0, n\in \mathbf{N}$，则 $a^n>b^n$，$\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$.

不等式的基本性质是解不等式和证明不等式的基础.

2. 熟练掌握一元一次不等式(组)、一元二次不等式的解法. 一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$(或 $ax^2+bx+c<0$)的解集可以结合二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像求解，要求透彻理解与掌握. 列表如下：

二次函数	一元二次方程		一元二次不等式	
$y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$	$\Delta=b^2-4ac$	$ax^2+bx+c=0$	$ax^2+bx+c>0$ $(a>0)$	$ax^2+bx+c<0$ $(a>0)$
	$\Delta>0$	$x=x_1, x=x_2$	$x<x_1$ 或 $x>x_2$	$x_1<x<x_2$
	$\Delta=0$	$x=x_1=x_2$	$x\neq x_1$	$x\in\varnothing$
	$\Delta<0$	$x\in\varnothing$	$x\in\mathbf{R}$	$x\in\varnothing$

3. 分式不等式或高次不等式可用“数轴标根法”求解.

4. 指数不等式、对数不等式、绝对值不等式可化为一元一次不等式、一元二次不等式(组)等有理不等式来求解.

5. 不等式的证明有直接证法和反证法. 其中直接证法主要包括：比较法、分析法、换元法与公式法等，其中比较法与公式法是最常用和基本的方法. 比较法的等价性如下表：

$a>b\Leftrightarrow a-b>0$	$a>b\Leftrightarrow \frac{a}{b}>1, b>0$	$a<b\Leftrightarrow \frac{a}{b}>1, b<0$

6. 应用重要不等式求解最值或范围：

若 a、$b\in \mathbf{R}$ 时，$ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}$	当且仅当 $a=b$ 时，等号成立
若 a、$b\in \mathbf{R}^+$ 时，$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$	当且仅当 $a=b$ 时，等号成立
若 $x\in \mathbf{R}^+$ 时，$x+\frac{1}{x}\geqslant 2$	当 $x=1$ 时，等号成立
若 $x\in \mathbf{R}^+$ 时，$x+\frac{k}{x}\geqslant 2\sqrt{k}(k>0)$	当 $x=\sqrt{k}$ 时，等号成立

【典型例题评析】

例 1 已知 a、b 是两个实数，给出下列条件：

① $a+b>1$；② $a+b=2$；③ $a+b>2$；④ $a^2+b^2>2$；⑤ $ab>1$.

其中能推出"a、b 中至少有一个数是大于 1"的条件是 （　　）

(A) ②、③； (B) ①、②、③； (C) ③、④、⑤； (D) ③.

解 D.

评析 若取 $a=b=1$，则①不是符合要求的条件；类似地可以举反例的方法判断②、④、⑤皆不符合条件. 另利用逆否命题的等价性，"a、b 皆小于或等于 1"，从而得"$a+b\leqslant 2$"，所以仅③正确，故选(D).

例 2 已知 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，比较 $1-\cos x$ 和 $\sin x$ 的大小.

解法一 作差 $(1-\cos x)-\sin x=1-\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

$\because$ $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\therefore$ $1<\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant\sqrt{2}$. $\therefore$ $(1-\cos x)-\sin x<0$.

解法二 作商 $\frac{1-\cos x}{\sin x}=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. $\because$ $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\therefore$ $\frac{x}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，则 $\operatorname{tg}\frac{x}{2}<1$.

又 $\because$ $1-\cos x>0$，$\sin x>0$，$\therefore$ $1-\cos x<\sin x$.

评析 作差或作商是实数式比较大小的基本方法.

例 3 若 $x^2+4y^2=4x$，求 x^2+y^2 的最值.

解 由 $x^2+4y^2=4x$ 变形为 $y^2=\frac{4x-x^2}{4}$. 因为 $y^2\geqslant 0$，所以 $0\leqslant x\leqslant 4$.

所以 $x^2+y^2=\frac{3}{4}x^2+x=\frac{3}{4}\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{1}{3}\in[0,16]$.

评析 求解范围问题，经常需要挖掘隐含条件以及借用解析几何的性质进行计算.

例 4 已知 $\frac{1}{p}x^2+qx+p>0$ 的解集 $A=\{x\mid 2<x<4\}$，求实数 p、q 的值.