高等学校教学用书

线性代数、概率论与数理统计

（专科教材）

治金工业出版社

高等学校教学用书

线性代数、概率论与数理统计

（专科教材）

北京钢铁学院　何品三　主编

冶金工业出版社

高等学校教学用书

线性代数、概率论与数理统计

（专科教材）

北京钢铁学院　何品三　主编

*

冶金工业出版社出版

（北京北河沿大街嵩祝院北巷39号）

新华书店北京发行所发行

冶金工业出版社印刷厂印刷

*

850×1168 1/32　印张 10 1/4　字数 268千字

1986年9月第一版　1986年9月第一次印刷

印数00,001～19,500册

统一书号：15062·4494　定价2.05元

前　　言

本书是根据冶金类专科教学计划编写的，与已出版的《高等数学》上下册配套，专供专科学校工程数学课使用，也可作为业余大学、函授大学的教学用书。本教材总学时为70课时。

我们认为专科工程数学教学不能照搬本科，应当体现专科的特色；在内容选取上要有针对性，要侧重概念和应用；还要适应不同专业的需要，有一定的灵活性。为此，我们是这样安排的：线性代数以矩阵运算、线性方程组和二次型为主要内容，适当介绍线性空间等基本知识；概率与统计以概率论和数理统计的基本概念、结论和方法为主要内容，并以一维随机变量和常用统计方法为重点。打星号的内容，可根据各专业的需要选用。

本书由北京钢铁学院何品三教授任主编，沈阳黄金专科学校郑宏业任副主编，参加编写工作的有：郑宏业(第一、二章)，上海冶金机械专科学校李兰舫(第三、四、五章并整理第一篇)，武汉冶金建筑专科学校向进和（第六、七、八章）沈阳黄金专科学校熊汉斌(第九章)。

本书定稿前东北工学院刘溢名副教授曾详细审阅修改。参加本书审稿的还有冶金系统各专科学校和部分职工大学的有关同志，他们提出了许多宝贵意见，特在此表示感谢。

本书的编审工作主要是熊汉斌和郑宏业同志组织的，武汉冶金建筑专科学校黄伟策同志也参加了审稿的组织工作。

由于我们水平有限，编写时间仓促，书中难免有不少缺陷甚至谬误，敬请同志们批评指正。

编者

1986.1月

AN 1/12

目　录

第一篇　线 性 代 数

第一章　矩阵与行列式

矩阵是线性代数中一项重要的内容．是线性代数的主要研究对象之一。矩阵不仅对讨论向量组线性关系，研究线性方程组的解是有用的，而且在高等数学其它分支以及自然科学、工程技术的许多问题中都成了一个有力的工具。行列式是线性代数中一项必不可少的基本内容，它不但是研究线性方程组和矩阵的有力工具，而且在许多理论和实际应用中发挥着重要的作用。本章先引入矩阵的概念，给出n阶行列式的定义，讨论其性质及其应用——Cramer法则。

第一节　矩阵的概念

一、矩阵的定义

设某日两家电视机商店S_1和S_2销售4种不同规格的彩色电视机T_1、T_2、T_3、T_4，销售量用如下表格表示（单位：台）

	T_1	T_2	T_3	T_4
S_1	10	15	20	15
S_2	20	10	25	10

彩色电视机T_1、T_2、T_3、T_4的单价C用如下表格表示(单位：元)

$$\begin{array}{cc} & C \\ T_1 & 1000 \\ T_2 & 1200 \\ T_3 & 1400 \\ T_4 & 1800。\end{array}$$

所以彩色电视机的销售量和单价可以分别用下列矩形数组表示：

$$\begin{pmatrix} 10 & 15 & 20 & 15 \\ 20 & 10 & 25 & 10 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1000 \\ 1200 \\ 1400 \\ 1800 \end{pmatrix}$$

又如线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m。\end{cases}$$

如果给出了一个线性方程组的全部系数和常数项，那末这个线性方程组就基本上确定了，至于用什么文字来代表未知量不是实质性的。线性方程组中的系数可以用下面的矩形数组表示：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mn} \end{pmatrix}$$

定义 由 $m \times n$ 个数 a_{ij} $(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 排成 m 行 n 列的数组

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots & a_{ij} \cdots & \cdots\cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \leftarrow i\text{行} \\ \uparrow \\ j\text{列} \end{array}$$

叫做 $m \times n$ **矩阵**。

在一个矩阵中，横的各排称为矩阵的**行**，纵的各排称为矩阵的**列**，矩阵中的每个数称为它的**元素**，a_{ij}称为A的第 i 行第 j 列上的元素。元素都是实数的矩阵称为**实矩阵**，元素是复数的矩阵称为**复矩阵**。本书中的矩阵除特别说明外，都指实矩阵。

通常以大写字母A，B等表示矩阵。$m \times n$ 矩阵A可以写成$A_{m\times n}$或$(a_{ij})_{m\times n}$，有时也简记为(a_{ij})。

例 1 写出矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}$：

（1）$m=2$，$n=3$，$a_{ij}=2i-j$；

（2）$m=3$，$n=2$，$a_{ij}=|i-j|$。

解 （1）因为

$$a_{11}=2\times1-1=1$$
$$a_{12}=2\times1-2=0$$
$$a_{13}=2\times1-3=-1$$
$$a_{21}=2\times2-1=3$$
$$a_{22}=2\times2-2=2$$
$$a_{23}=2\times2-3=1$$

所以

$$A_{2\times3}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}。$$

（2）同样可得

$$A_{3\times2}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}。$$

二、几种重要的矩阵

1．n阶方阵

当$m=n$时，$A_{n\times n}$称为**n阶方阵**。一个 n 阶方阵从左上角元素到右下角元素间的连线（由a_{11}，a_{22}，…，a_{nn}组成）称为它

的**主对角线**。

2．对角矩阵

除了主对角线上的元素（a_{ii}，$i=1, 2, \cdots, n$）外，其余元素都为零的n阶方阵，叫做**n阶对角矩阵**，其形式为

$$A_{n\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

3．单位矩阵

主对角线上的元素都是1的n阶对角矩阵，叫做**单位矩阵**，记作E_n，简记为E。

$$E_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}。$$

4．三角形矩阵

主对角线一侧的所有元素都为零的方阵，叫做**三角形矩阵**。三角形矩阵分**上三角形矩阵**与**下三角形矩阵**，其形式为

$$L_{上}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$L_{下}=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}。$$

5．零矩阵

元素都是零的矩阵，叫做**零矩阵**，记作$0_{m\times n}$，简记为0。

6．行矩阵、列矩阵

当$m=1$时，仅由一行构成的矩阵

$$A_{1\times n}=(a_{11}\quad a_{12}\cdots a_{1n})$$

是一个$1\times n$矩阵，叫做**行矩阵**或**n维行向量**。

当$n=1$时，仅由一列构成的矩阵

$$A_{m\times 1}=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{pmatrix}$$

是一个$m\times 1$矩阵，叫做**列矩阵**或**m维列向量**。

向量常用小写黑体字母表示，所以行矩阵与列矩阵有时也用小写黑体字母表示。

三、矩阵的相等

如果$A=(a_{ij})$与$B=(b_{ij})$都是$m\times n$矩阵，并且它们的对应元素相等，即

$$a_{ij}=b_{ij}\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m;\ j=1,\ 2,\ \cdots,n),$$

则称**矩阵A与矩阵B相等**，记作

$$A=B。$$

例 2 求未知量x、y、z，满足

$$\begin{pmatrix}2x+y & x\\ x+3y & 2x-y-z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-y-2z+1 & x\\ y+1 & z+1\end{pmatrix}$$

解 根据矩阵相等的定义，得方程组

$$\begin{cases}2x+y=x-y-2z+1\\ x+3y=y+1\\ 2x-y-z=z+1\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}x+2y+2z=1\\ x+2y=1\\ 2x-y-2z=1\end{cases}$$

从而得

$$x=\frac{3}{5},\quad y=\frac{1}{5},\quad z=0。$$

第二节　n阶行列式及其性质

一、n阶行列式的定义

我们已经熟悉了二阶和三阶行列式，现在以此为基础，定义 n 阶行列式。

1．三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}。$$

它的规律是：把该行列式的第一行各元素乘以划掉该元素所在的行和列之后剩下的二阶行列式，前面冠以正负相间的符号，然后再求它们的代数和。如果我们把从该行列式中划去第 i 行第 j 列（$i=1,\ 2,\ 3,\ ;\ j=1,\ 2,\ 3$）后所剩下的二阶行列式记为 M_{ij}，那么，有

$$M_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$M_{13}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}。$$

故

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+a_{13}M_{13}。$$

若令

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij},$$

则

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}。$$

这里的M_{ij}称为元素a_{ij}的**余子式**，A_{ij}称为元素a_{ij}的**代数余子式**。

现在，每个三阶方阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

可以对应于一个数

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

我们称它为**方阵A的行列式**，记作$|A|$。

给定一个四阶方阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

我们可以类似地定义它的行列式为

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}-a_{14}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}。$$

如果同样用M_{ij}表示划去矩阵A的第i行第j列（$i=1$，2，3，4；$j=1$，2，3，4）后所剩的三阶方阵的行列式，仍令$A_{ij}=$

$(-1)^{i+j}M_{ij}$，那么，四阶方阵A的行列式的定义可简写为

$$|A|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}+a_{14}A_{14}。$$

这个定义是以三阶行列式的定义作为它的基础。显然，有了四阶方阵的行列式的定义，就可以类似地定义五阶方阵的行列式，等等。一般n阶方阵的行列式可用数学归纳法定义如下。

2．n阶行列式

定义 二阶方阵 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$的行列式定义为

$$|A|=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}。$$

设$n-1$阶方阵的行列式已经定义。给定n阶方阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

则定义A的行列式为

$$\begin{aligned}|A|&=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\\ &=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}\\ &=\sum_{k=1}^{n}a_{1k}A_{1k}。\end{aligned}$$

其中$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，M_{ij}表示划去方阵A的第i行第j列（$i=1, 2, \cdots, n$；$j=1, 2, \cdots, n$）后所剩下的$n-1$阶方阵的行列式。

M_{ij}称为元素a_{ij}的**余子式**，A_{ij}称为元素a_{ij}的**代数余子式**。n阶方阵的行列式称为**n阶行列式**，通常记为D。

为了讨论问题方便，我们补充一阶行列式为

$$|a_{11}|=a_{11}。$$

(注意一阶行列式就等于a_{11}自身，其值可正可负，所以上面的记号不是绝对值符号。)

n阶行列式与n阶方阵不同，n阶行列式是一个数，而n阶方阵是一个数值，不是一个数．但是n阶行列式是n阶方阵的数量函数。

上面我们是利用行列式的第一行元素来定义行列式的，这个式子通常称为**行列式按第一行元素的展开式**。我们可以证明，**行列式按第一列元素展开也有相同的结果**，即

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{n1}A_{n1}$$

$$=\sum_{k=1}^{n} a_{k1}A_{k1}。$$

我们还可以证明，**行列式按任意一行（列）展开，都有相同的结果**，其展开式为

$$|A|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+A_{in}A_{in}$$

$$=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\ A_{ik} \qquad (i=1、2，\cdots，n) \qquad (1\text{-}1)$$

$$|A|=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}\ A_{nj}$$

$$=\sum_{k=1}^{n} a_{kj}\ A_{kj} \quad (j=1，2，\cdots，n) \qquad (1\text{-}2)$$

例 1 在五阶行列式

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

中元素a_{34}的余子式是从A中划去第三行与第四列后由剩下的各元素所构成的四阶行列式，即

$$M_{34}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{25} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{55} \end{vmatrix},$$

元素a_{34}的代数余子式$A_{34}=(-1)^{3+4}M_{34}$，即

$$A_{34}=-M_{34}。$$

例 2 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 6 & 4 & -2 \end{vmatrix}。$$

解 按第三行元素展开，我们有

$$D=(-1)\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix}+2\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & -2 \end{vmatrix}$$

$$+3\cdot(-1)^{3+4}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 6 & 4 \end{vmatrix}$$

$$=75+180-105=150。$$

例 3 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}。$$

解 按第一行展开后，再按同一做法继续下去：

$$D=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\cdots=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

。