

從《算數書》到《九章算術》

《算數書》比另一部中國古代數學巨著《九章算術》的成書年代至少要早三個世紀^②。儘管兩書相隔了許久，但彼此間有着千絲萬縷的緊密聯繫。

兩書都是以數學問題集的形式出現。《算數書》列出了六十個算題名和九十二道算題，《九章算術》則列出了二百四十六個算題。每道完整的算題下包括：題名、

彭浩·著



張家山漢簡 《算數書》 註釋

從《算數書》到《九章算術》

張家山漢簡《算數書》註釋

責任編輯：王震霞 · 封面設計：高海英

《算數書》比另一部中國古代數學巨著《九章算術》的成書年代至少要早三個世紀^②。儘管兩者成書時間有着千絲萬縷的緊密聯繫。但這兩部書都是以數學問題集的形式出現。《算數書》共有二十一個算題名和九十二道算題，《九章算術》共有八十六個算題。每道完整的算題下包

鄰里有女惡自喜也，織曰：自再五寸，其次各幾何。曰：始織一寸六分，次三寸六分，次六寸六分，次一尺五寸六分，次二尺五寸六分，次三尺五寸六分，次四尺五寸六分，次五尺五寸六分，次六尺五寸六分，次七尺五寸六分，次八尺五寸六分，次九尺五寸六分，次十尺五寸六分，次十一尺五寸六分，次十二尺五寸六分，次十三尺五寸六分，次十四尺五寸六分，次十五尺五寸六分，次十六尺五寸六分，次十七尺五寸六分，次十八尺五寸六分，次十九尺五寸六分，次二十尺五寸六分，次二十一尺五寸六分，次二十二尺五寸六分，次二十三尺五寸六分，次二十四尺五寸六分，次二十五尺五寸六分，次二十六尺五寸六分，次二十七尺五寸六分，次二十八尺五寸六分，次二十九尺五寸六分，次三十尺五寸六分，次三十一尺五寸六分，次三十二尺五寸六分，次三十三尺五寸六分，次三十四尺五寸六分，次三十五尺五寸六分，次三十六尺五寸六分，次三十七尺五寸六分，次三十八尺五寸六分，次三十九尺五寸六分，次四十尺五寸六分，次四十一尺五寸六分，次四十二尺五寸六分，次四十三尺五寸六分，次四十四尺五寸六分，次四十五尺五寸六分，次四十六尺五寸六分，次四十七尺五寸六分，次四十八尺五寸六分，次四十九尺五寸六分，次五十尺五寸六分，次五十一尺五寸六分，次五十二尺五寸六分，次五十三尺五寸六分，次五十四尺五寸六分，次五十五尺五寸六分，次五十六尺五寸六分，次五十七尺五寸六分，次五十八尺五寸六分，次五十九尺五寸六分，次六十尺五寸六分，次六十一尺五寸六分，次六十二尺五寸六分，次六十三尺五寸六分，次六十四尺五寸六分，次六十五尺五寸六分，次六十六尺五寸六分，次六十七尺五寸六分，次六十八尺五寸六分，次六十九尺五寸六分，次七十尺五寸六分，次七十一尺五寸六分，次七十二尺五寸六分，次七十三尺五寸六分，次七十四尺五寸六分，次七十五尺五寸六分，次七十六尺五寸六分，次七十七尺五寸六分，次七十八尺五寸六分，次七十九尺五寸六分，次八十尺五寸六分，次八十一尺五寸六分，次八十二尺五寸六分，次八十三尺五寸六分，次八十四尺五寸六分，次八十五尺五寸六分，次八十六尺五寸六分，次八十七尺五寸六分，次八十八尺五寸六分，次八十九尺五寸六分，次九十尺五寸六分，次九十一尺五寸六分，次九十二尺五寸六分。王已讎^⑤。



算，“一尺”之“一”是“二”之比。……直卅二”，是本題設定的比率，是一等比數列。……本題也可設作“直一、直二、直四、直八、直……文的“直二、直四、直八、直十六、……的比率。……述方法求得之數是以尺為單位，……需擴大十倍，化作以寸為單位。……本題答

ISBN 7-03-009370-4
9 787030 093707 >

ISBN 7-03-009370-4/K·15
定價：35.00

張家山漢簡《算數書》註釋

彭 浩 著



A1027284

科 学 出 版 社

2001

內 容 簡 介

本書對一九八四年出土於湖北江陵張家山二四七號漢墓中的《算數書》竹簡作了全面、系統的整理，對其中的術語、難詞、難句子以註釋；對書中的訛、衍、脫文及計算錯誤逐一校出，恢復了《算數書》的原貌，為讀者提供了一個可靠的《算數書》文本。此外，本書還詳細論證了《算數書》的成書年代，確定了它是中國年代最早的數學著作；分析了《算數書》產生的社會背景；揭示了戰國晚期至西漢初年中國數學的發展和應用情況，填補了中國數學史研究的空白，為《九章算術》的研究拓開了新視野。中國數學史、世界數學史上的一些結論因本書也須重新認識。

讀者對象：中國古代經濟史、數學史研究者及中國古文獻整理與研究者。

圖書在版編目 (CIP) 數據

張家山漢簡《算數書》註釋/彭浩著. —北京:科學出版社, 2001
ISBN 7-03-009370-4

I. 張… II. 彭… III. 算數書-註釋 IV. O112

中國版本圖書館 CIP 數據核字 (2001) 第 26634 號

科學出版社 出版

北京東黃城根北街 16 號

郵政編碼: 100717

新蕾印刷廠印刷

科學出版社發行 各地新華書店經銷

*

2001 年 7 月第 一 版 開本: 850×1168 1/32

2001 年 7 月第一次印刷 印張: 4 3/8 插頁: 11

印數: 1—2 000 字數: 90 600

定價: 35.00 圓

(如有印裝質量問題, 我社負責調換〈新欣〉)

目 錄

| | |
|---------------------|----|
| 緒 論 | 1 |
| 一、《算數書》竹簡編次的復原與書寫格式 | 1 |
| 二、《算數書》的成書年代及相關問題 | 4 |
| 三、《算數書》的主要內容與成就 | 12 |
| 四、從《算數書》到《九章算術》 | 25 |
| 五、對《算數書》抄本的評價 | 32 |
| 註 釋 | 36 |
| 凡 例 | 36 |
| 註 釋 | 37 |
| 相 乘 | 37 |
| 分 乘 | 40 |
| 乘 | 40 |
| 增（增）減分 | 42 |
| 分當半者 | 42 |
| 分半者 | 43 |
| 約 分 | 43 |
| 合 分 | 45 |
| 徑 分 | 48 |

| | |
|----------|----|
| 出金 | 49 |
| 共買材 | 50 |
| 狐出關 | 52 |
| 狐皮 | 53 |
| 負米 | 54 |
| 女織 | 56 |
| 并租 | 58 |
| 金賈(價) | 60 |
| 舂粟 | 61 |
| 銅耗(耗) | 62 |
| 傳馬 | 62 |
| 婦織 | 64 |
| 羽矢 | 65 |
| 漆(漆)錢 | 66 |
| 繒幅 | 66 |
| 息錢 | 67 |
| 飲(飲)漆(漆) | 69 |
| 稅田 | 71 |
| 程竹 | 71 |
| 醫 | 73 |
| 石術(率) | 73 |
| 賈鹽 | 74 |
| 絲練 | 74 |
| 挈脂 | 75 |
| 取程 | 77 |

| | |
|-------------------|-----|
| 耗 (耗) 租 | 79 |
| 程 禾 | 80 |
| 取泉程 | 81 |
| 誤 券 | 82 |
| 租吳 (誤) 券 | 83 |
| 稗毀 (毀) | 84 |
| 耗 (耗) | 87 |
| 粟為米 | 88 |
| 粟求米 | 89 |
| 粟求米 | 89 |
| 米求粟 | 90 |
| 米粟并 | 90 |
| 粟米并 | 91 |
| 負 炭 | 92 |
| 盧 (簾) 唐 (筭) | 94 |
| 羽 矢 | 95 |
| 行 | 95 |
| 分 錢 | 96 |
| 米出錢 | 98 |
| 除 | 101 |
| 鄆 都 | 103 |
| 芻 | 104 |
| 旋 粟 | 105 |
| 困 蓋 | 107 |
| 畷 (園) 亭 | 107 |

| | |
|--------------------------|------------|
| 井材 | 109 |
| 以冨(園)材(裁)方 | 110 |
| 以方材(裁)冨(園) | 111 |
| 冨(園)材 | 113 |
| 啓廣 | 113 |
| 啓從(縱) | 114 |
| 少廣 | 116 |
| 大廣 | 123 |
| 方田 | 124 |
| 里田 | 125 |
| 《算數書》竹簡整理號與出土號對照表 | 129 |
| 主要參考文獻 | 131 |
| 後記 | 133 |

緒 論

《算數書》竹簡於一九八四年初出土於湖北省江陵縣（今荆州市荊州區）張家山二四七號墓中，同出的竹簡有一千二百餘枚^①。經整理，這批竹簡含：《二年律令》、《奏瀝（讞）書》、《蓋廬》、《脈書》、《引書》、《算數書》、曆譜和遺策。它們都是失傳已久的文獻，因具有極高的學術價值而為世人所矚目。

一、《算數書》竹簡編次的復原與書寫格式

《算數書》竹簡位於同墓的一千二百餘枚竹簡的下部，如從竹簡堆積的一端觀察，是位於左下部，其上是《二年律令》竹簡。全部竹簡被淤泥包裹，竹簡之間的空隙亦充滿淤泥。因淤泥的壓擠，《算數書》竹簡失去了完整的搥

^① 荊州地區博物館：《江陵張家山三座漢墓出土大批竹簡》，《文物》1985年第1期，1~8頁；張家山漢簡整理小組：《張家山漢簡概述》，《文物》1985年第1期，9~15頁；張家山漢簡整理小組：《張家山漢簡〈算數書〉釋文》，《文物》2000年第9期，78~84頁。

束狀態，近一半的竹簡移至外部。因此復原竹簡的編次便成為全部整理工作的第一步。

我們按以下步驟復原《算數書》的編次：

(1) 確定竹簡出土時的堆積狀況及各部分的相對位置，儘可能復原移出卷外部分竹簡的原來位置。

(2) 確定全書的起始部分與結尾部分。《算數書》的起始部分是題有書名的那道算題，它位於全部竹簡的上層。結束部分是位於卷中的竹簡。

(3) 同一算題的各簡的繫連首先以是否合題意、算理作出判斷；其次參考它們之間的相對位置來確定各算題間的先後次序。

(4) 對散出卷外而又無把握復原其位置的算題，參考其出土位置插入鄰近或同類算題的排次中。

(5) 失去上下文的竹簡和不能綴合的殘簡排在與之內容相近的同類算題後。

按以上步驟確定的《算數書》竹簡的排序只能基本恢復其原貌。

《算數書》竹簡共一百九十枚，簡長 29.6~30.4 厘米，寬 0.6~0.7 厘米。編綫三道，上、中、下各一道。全書編成一卷。

文字皆書於竹黃一面。書名《算數書》題於全書首題的一枚竹簡背面，簡的頭端塗有黑色方塊，以為標誌。

題名皆書於竹簡頭端，即位於上編綫以上的部位。一般書作一行，偶有字數較多的則分寫兩行，如“分當半者”。

正文皆書寫於上下編綫之間，一般是寫滿一簡後再轉

入下簡，偶有前簡尚未寫滿便轉入下簡的現象。有兩枚竹簡的末端（即下編綫以下部分）寫有正文，如第 163 簡的“如法一”、第 167 簡的“乘”。

少數竹簡的末端記有“王”、“楊”和“楊已讎”、“王已讎”，以“王”、“楊”為多。由於“楊已讎”、“王已讎”明確指出校對者是楊姓和王姓，那末“楊”、“王”姓很可能是校對者的省稱。從字體觀察，全書是由一人抄寫的。

竹簡使用的符號主要有如下幾種：

勾識 \angle （為排印方便，本書中寫作“ \lrcorner ”），用作斷句。在題中數字連續出現時多用以點斷上下句，避免誤讀，如“少廣”題。算題的末尾皆無句讀。

重文號 \equiv ，表示重複的文字，用於字和句子。簡文中未見合文號的使用，數字的合文均不加合文號，如卅（四十）、卅（七十）、卅（六十）等。

墨點 \bullet ，多用於另一段文字開始的標誌，兼有與上文相隔斷，如“旋粟”題：

旋粟高五尺，下周三丈，積百廿五尺。 \bullet 二尺七寸而一石，為粟卅（四十）六石廿七分石之八。其述（術）曰：下周自乘，以高乘之，卅六成一。 \bullet 大積四千五百尺。

文中兩處墨點後的一段文字都是對題文的補充。“以方材（裁）畧（圍）”題的“ \bullet 術曰：……”則是把墨點加在題文之中，標示以下文字為另一部分。在《算數書》的算題中，這祇是偶爾出現的例子。墨點也用作缺字的標識，如“誤券”題“……并為法，如 \bullet 得一步。”依文例，句中墨

點處應是“法”字，因某種原因未抄，而以墨點代替。墨點也兼有斷句的功用，如“裨毀（毬）”題“米少半升為麥半升，·三之，二而一”。墨點還被抄寫者用作某種記號，如“誤券”題“其券有〔斗〕者，直（置）與·田步數以為實”，墨點位於前一簡末尾，但兩簡文字相連，無須隔開，可能是抄寫者留下的記號。

二、《算數書》的成書年代及相關問題

與《算數書》共存有一份曆譜，所記最後一年是西漢呂后二年（公元前186年）^①，墓主人極可能於此後不久去世。因此，我們認定《算數書》成書年代的下限是西漢呂后二年，即公元前186年。

我們注意到，《算數書》中算題的形成年代並不一致，有早晚的不同。其中有一部分算題確是西漢初年的，如“繒幅”題：

繒幅廣廿二寸、袤十寸，賈（價）廿三錢……

題中標準計量單位是長十寸（一尺）、幅寬廿二寸（二尺二寸），與秦制“幅廣二尺五寸”^②不合，而與漢律的規定

① 荊州地區博物館：《江陵張家山三座漢墓出土大批竹簡》，《文物》1985年第1期，1~8頁。

② 睡虎地秦墓竹簡整理小組：《睡虎地秦墓竹簡·金布律》：“布袤八尺，福（幅）廣二尺五寸。布惡，其廣袤不如式者，不行。”（文物出版社，1978年）。由此可知，秦代布匹長八尺，幅寬二尺五寸。當時布帛可以替代貨幣作等價物，故對其幅寬有嚴格的規定。

相同^①。因此可知“繒幅”題應是西漢初年的作品。

《算數書》中的許多算題很可能出自戰國時期的秦地。題名“程禾”的算題是有關糧食互換比率的規定：

程曰：禾黍一石為粟十六斗黍（大）半斗，舂之為糲（糲）_{一石}，（糲米一石）為粳_九斗，（粳米〔九〕斗）為毀（毀）米八斗。

程曰：稻禾一石為粟廿斗，舂之為米十斗，為毀（毀）粳米六斗黍（大）半斗，麥十斗〔為〕麩三斗。

程曰：麥、菽、荅、麻十五斗〔為〕一石，粟毀（毀）粳（粳）者，以十斗為一石。

以上文字與《睡虎地秦墓竹簡·倉律》幾乎完全相同^②，引文中的三處“程曰”即指秦代的法律規定。由此可知，“程禾”題的形成是在戰國晚期。“困蓋”是有關體積的算題。困是圓倉，困蓋即圓倉呈正圓錐形的頂蓋。這種帶蓋的圓倉最早出現在關中的秦墓中，其年代可早到春秋晚期^③。以後隨着秦統一中國的戰爭逐步散佈於關東各地，

① 張家山漢簡《二年律令》：“販賣繒布幅不盈二尺二寸者，沒入之。”

② 睡虎地秦墓竹簡整理小組：《睡虎地秦墓竹簡》44～45頁，文物出版社，1978年。

③ 可參閱中國科學院考古研究所：《禮西發掘報告》136～137頁，文物出版社，1962年；雍城考古隊：《陝西鳳翔高莊秦墓地發掘簡報》，《考古與文物》1981年第1期，12～38頁。在46座秦墓中出土圓頂式陶倉10件，其中10號墓6件，12號墓2件，18號墓2件。10、12號墓是春秋晚期，18號墓是戰國早期。

並延續使用到西漢早期。到西漢中期（漢武帝時），它被無蓋的直筒形圓倉所取代，形狀有很大變化。據此，我們推測“困蓋”一題是秦人的作品，其出現年代或可追溯至戰國時期。

在對《算數書》的內容稍作歸納後，便不難發現，許多算題與秦、漢時期尤其是秦朝縣級政府的管理職責有着極為密切的關係。主要反映在以下三個方面。

1. 對土地和租稅的管理

據現有資料，早在春秋晚期，晉國趙氏制田以二百四十步為一畝^①。戰國時期，商鞅在秦國推行改革，定二百四十平方步為一畝。在四川省青川發現的秦國《為田律》所記畝制正是如此^②。學者普遍認為，東周時期的楚國仍然維持井田制，並未推行以二百四十平方步為一畝的制度。《算數書》中與土地面積、邊長計算有關的算題如“啓廣”、“啓從（縱）”、“少廣”、“大廣”、“里田”等都是以二百四十平方步為一畝，與西周時期採用的“方里而

① 銀雀山漢墓竹簡整理小組：《銀雀山漢墓出土〈孫子兵法〉殘簡釋文·吳問》：“……趙是（氏）制田以百廿步為畹（畹），以二百卅步為畹（畝）”，《文物》1974年第12期，11頁。

② 四川省博物館等：《青川縣出土秦更修田律木牘》，《文物》1982年第1期，1~13頁。牘文所記是秦武王二年（公元前309年）頒佈的一項法令，改訂《為田律》為：“田廣一步，袤八則為畛。畝二畛，一百（陌）道。百畝為頃，一千（阡）道，道廣三步……”胡平生先生指出“則”長三十步，八則即二百四十步（《青川秦墓木牘“為田律”所反映的田畝制度》，《文史》第19輯）。也即田廣一步，袤二百四十步為一畝。

井”、“步百為畝”制度差距甚大。我們推測書中的這種畝制在很大程度上源自秦國。西漢時期的畝制與秦國同。

從睡虎地秦律和張家山漢律可以了解到，政府是按每戶居民所受土地的數量依一定標準徵收租稅。它是政府重要的財政來源。因此，對土地面積的丈量、計算是政府相關部門，尤其是縣、鄉、里的日常工作。有關土地面積的算題在《算數書》中佔有較大比例，既有萬頃以上的大面積，也有小至若干分之一平方步的小面積。“里田”所記是以平方里為單位的土地折算成頃、畝的算法，算題數字很大。這種算法的用途在題中有明確記載：“直（置）提封以此為之。”“提封”是指封疆地界內的總數，《漢書·地理志》有“提封田一萬萬二百五十二萬八千八百八十九頃”的記載，毫無疑問，這是出自政府的行為。

田租和芻粟都是以穀物、草料按頃計數交納。秦律《田律》：“入頃芻粟，以其受田之數，無𧇗（墾）不𧇗（墾），頃入芻三石、粟二石。”漢律的規定與秦律同。由於農戶耕種的土地形狀、大小不一致，不完全適用頃、畝的計量，在計算租稅時，往往是以平方步為單位，兩種單位的換算是必不可少的。同時，還常常遇到各類特殊的情況，需要通過計算來解決，如“稅田”、“租吳（誤）券”等是因租券誤書而引出的計算；“秬（耗）租”、“取臬程”則是為解決穀物的濕重折算成乾重或損耗的計算而設計的。由於土地、氣候和種植習慣的不同，農戶交納的糧食品種也是不一致的，需要折算成統一的標準。秦律《田律》：“芻自黃蘗及薨束以上皆受之。相輸度，可毆。”黃

籩指乾葉，藿疑指亂草。相輸度指芻、粟相互折算。《算數書》的“稗毀（穀）”、“粟求米”、“米求粟”、“米粟并”、“粟米并”等題大約是為了解決田租徵收中經常遇到的換算問題而設置的。有的算題以“程”為題名，如“程禾”、“取泉程”、“程竹”等，它們與秦律中的“程”（如“工人程”）性質相似，是政府規定的對某種物品計量的標準。此類算題可能是為了解決與“程”不相符的問題而設置的。

2. 對倉儲物資的管理

秦律對政府的倉儲物資管理有十分細密的規定，主要集中在《倉律》和《效律》中。農戶向政府交納的田租、芻粟數量很大，這些糧食、草料的儲存、調運、收支是一項十分繁雜的工作。按秦律規定，一般的縣都設有糧倉。《倉律》：“入禾倉，萬石一積而比黎之為戶。縣嗇夫若丞及倉、鄉相雜以印之……”倉以萬石為一積，相互隔開。櫟陽二萬石、咸陽十萬石為一積。芻粟各萬石一積，咸陽二萬石一積。《算數書》的“芻”、“旋粟”就是與糧草倉儲直接相關的算題。“旋粟”題云：“•二尺七寸而一石”，是說長、寬、高各二尺七寸的積粟重一石（秦制一百二十斤），是按體積測算粟重的標準。這種算法對大倉容的糧庫十分實用、便捷。對萬石以至十萬石的糧食進行一次稱量將耗費大量的人力、物力。估計秦代的糧倉管理者普遍採用體積測算法來確定庫存，對小批量的糧食則沿用稱量的方法。芻粟體積龐大，不易稱量，可能更多地採用體積

測算法。糧倉的管理者還須負責日常的零星支付，如廩給、傳食等。以刑徒廩給為例，按照刑徒種類、年齡、性別、勞役負擔等的區別供應不同量的糧食^①，其中多有分數。這些口糧皆由糧倉管理者核發，相應的規定也多歸入《倉律》。秦漢時期，政府沿交通要道設置的驛站要對過往官吏、隨員、士卒及馬匹供給飯食和草料，其標準也因官階、職務有異^②，由糧倉管理者核發。《算數書》“傳馬”題很可能與這種制度有關。

秦漢時期的縣級官吏還要管理屬於政府的財物，生漆便是其中一種。東周以來，漆器廣為流行，生漆需求驟增。但漆樹僅生長於黃河中游和長江流域的部分地區，產量有限。為保證政府的需求，在產漆地設立漆園，按產漆量對管理者考核^③。漆園收穫如少於它處，縣令、丞及佐都要受到處罰，可見漆園是由縣派員管理的。秦律《效律》對生漆質量的檢驗有明確的規定：

工粟鬻它縣，到官試水，飲水，水減二百斗以上，貲工及吏將者各二甲；不盈二百斗以下到百斗，貲各一甲；不盈百斗以下到十斗，貲各一盾；不盈十斗以下及粟鬻縣中而負者，負之如故。

① 可參閱睡虎地秦墓竹簡整理小組：《睡虎地秦墓竹簡·倉律》49～53頁，文物出版社，1978年。

② 睡虎地秦墓竹簡整理小組：《睡虎地秦墓竹簡》之《倉律》47頁、《傳食律》101～103頁，文物出版社，1978年。

③ 睡虎地秦墓竹簡整理小組：《睡虎地秦墓竹簡·秦律雜抄》138頁，文物出版社，1978年。