# 實用微積分學

劉薰宇著

# 實用微積分學

劉薰宇著



開明書店

L

# 實用微積分學

每册售價人民幣14,000元　　10(積4480)

| | |
|---|---|
| 著者 | 劉薰宇 |
| 出版者 | 開明書店<br>（北京西總布胡同甲50號） |
| 印刷者 | 華義印刷廠<br>（北京東單鬧市口30號） |
| 發行者 | 三聯·中華·商務·開明·聯營<br>聯合組織<br>中國圖書發行公司<br>（北京絨線胡同66號） |

1952年4月初版(1—4000)　　128 P　25 K

# 前言

教了不少年、不少次的微積分，一直都是用英文課本，美國的、英國的．美國的也好，英國的也好，不用說都是爲他們的讀者編的．他們的讀者生活在他們的和中國不同的環境裏，有着不同的習慣以及不同的需要．用英文課本來教中國讀者，當然就免不了有時要‘削足適履’；並且讀者增加了一些文字上的負擔，有時就不免顧此失彼．

七八年來，一直打算動手試編一本‘大一’用的微積分課本，卻始終沒有一個自己感到滿意的腹稿，也沒有連續寫作的比較從容的時間，除了擬過幾次章目，沒有寫過一個字．1947 年暑期友人高士光兄主持高級工業學校，很以找不到適用的教本爲苦．偶然談起，使我轉了一個念頭，先試編一本爲高級技術學校用的、比較簡單而實用的教本吧．自然，所謂比較簡單實用，並不等於把大學用的課本來壓縮或刪減．經過一年多地盤算，我得到了一個基本原則，要打破把微分和積分截然分成兩部分的老辦法．從這一個原則出發，我的計劃漸漸地具體，漸漸地成熟，然而已是 1949 的歲暮了．

今年，基本上全國都解放了，經濟建設和文化建設已成爲迫切的需要，一切本國文的讀物也就非大量生產不可．這使我很興奮．三四月間，開明書店給我一封信，說有意出本供技術學校用的實用微積分，問我有興趣編沒有．我沒考慮過我的時間許不許可，就無條件地答應；並且預約七八月間交稿．興趣，老實說在解放以前，一點也提不起；政治那樣地烏煙瘴氣，國家的前途誰知道哪一天纔會見到曙光！

答應編寫的信發出去，就病了一個多月，直到五月中纔能開始，

一開始就感到時間實在太不從容. 有時兩三天纔寫四五行,但有時也就盡一個星期日從上午六時到下午十二時,寫它一萬幾千字,很有把握在七月內完成初稿. 七月中旬,工作有了變動,我離開貴陽到北京,寫作中斷. 初稿的完成已是九月中旬,地點已在北京了. 照我的慣例,初稿寫完後,總要讓它躺相當的時間,十月中旬開始整理. 整理完,又放了幾天,纔重看一次,現在算是完成了.

關於它的內容,在這裏簡單地提一下:

第一,我是把微分和積分,分段對照着編的.

第二,對於各種概念,我都放在用到的地方纔個別提出,而不採用集中的辦法.

第三,我將全書分成二卷,上卷專講基本的運算,下卷專講應用.

第四,主要的是照顧實用,理論有乾脆不提的,也有比較粗疏的.

第五,主要的對象雖是高級技術學校的讀者,但我還想到,供'大一'的讀者做參考,讓讀者比較能够把握住這一門學科的基本的輪廓.

一九五〇年十一月十日於北京

# 目　次

## 上　卷

# 下 卷

# 上　卷

## 一　導　函　數

**1.【常數和變數】** 在平面幾何中，我們若用 $r$ 表圓的半徑，$C$ 表圓周的長，$A$ 表圓的面積，則

$$\text{(i)}\quad C=2\pi r, \qquad\qquad \text{(ii)}\quad A=\pi r^2.$$

在這兩個公式中，由於圓的大小不同，它們的半徑 $r$ 也就不同．自然，跟着它們的周長 $C$ 和面積 $A$ 也就不同．但是這兩個公式中，2 和 $\pi$（3.1416）的值卻是不變的．

在物理學中，一個物體，從高處自由落下，若用 $t$ 表落下所經過的時間，$S$ 表經過這段時間所落下的距離，而我們不把空氣的阻力計算在內，則

$$S=\frac{1}{2}gt^2.$$

在這個公式中，落下的時間有長有短，跟着落下的距離也有長有短．但是係數 $\frac{1}{2}$ 和指數 2 的值固然是不變的，而 $g$ 所表的重力加速度，在地球上的一定地點，也是不變的．

在研究一類問題中，例如圓的周長和面積以及物體自由落下的距離，數值固定不變的數，稱為常數；如上例的 $\frac{1}{2}$，2，$\pi$ 和 $g$．

反過來，在研究一類問題中，數值是隨着所研究的具體的、特殊的情況而不同的，稱為變數；如上例的圓的周長 $C$，面積 $A$ 和半徑 $r$，以及物體自由落下的距離 $S$ 和時間 $t$．

**2.【絕對常數和任意常數】** 我們在平面解析幾何中,已經知道:

(i) $y=x+b$ 表示和 $X$ 軸相交成 $45°$ 角的一系平行線 (圖 1).

(ii) $y=mx+3$ 表示和 $Y$ 軸相交於距原點 3 個單位長的一束直線 (圖 2).

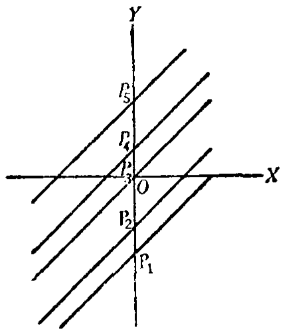


圖 1

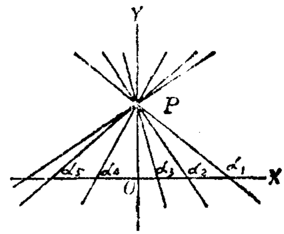


圖 2

(iii) $(x-2)^2+y^2=r^2$ 表示圓心是 $(2,0)$ 的一系同心圓 (圖 3).

(iv) $x^2+(y-b)^2=4$ 表示圓心在 $Y$ 軸上,半徑爲 2 的一串相等的圓 (圖 4).

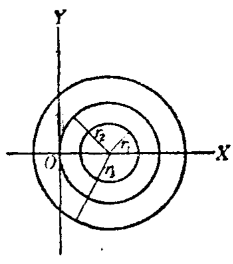


圖 3

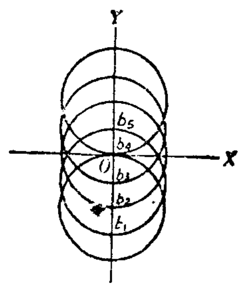


圖 4

這四個式子中, $1,3,2,4,b,m,r$ 都是常數;但性質卻不相同. 1 是 $\tan 45°$ 的值, 3 是 $P$ 點的縱坐標, 2 在(iii)是圓心 $C$ 的橫坐標, 4 是圓半徑的平方;它們的值都是確定不變的. 這種常數稱爲絕對

常數.

至於,(i)的$b$表直線和$Y$軸的交點$P_1,P_2,P_3,\cdots\cdots$的縱坐標,是隨某一條直線的位置而變的;(ii)的$m$表直線的斜率$\tan\alpha_1,\tan\alpha_2,\tan\alpha_3,\cdots\cdots$,也是隨某一條直線的位置而變的;(iii)的$r$表圓的半徑$r_1,r_2,r_3,\cdots\cdots$,隨着某一圓的大小變動;(iv)的$b$表圓心的縱坐標$b_1,b_2,b_3,\cdots\cdots$,隨着某一圓的位置變動.　這種常數稱爲任意常數.

(注意)　絕對常數,$2,3,4,\pi,g$的符號是一定的.　任意常數,習慣用英文字母或希臘字母的頭幾個表示,如$a,b,c,\cdots\cdots,\alpha,\beta,\gamma,\cdots\cdots$.　變數則用英文字母的末幾個表示,如$x,y,z$.

3.【自變數、倚變數和函數】　在第一節所舉的例中,圓的半徑$r$變動,則圓的周長$C$和面積$A$,也隨着它變動,如下面所表示的:

$r=1$公分,　$C=6.2832$公分,　$A=3.142$平方公分;

$r=2$公分,　$C=12.5664$公分,　$A=12.566$平方公分;

$r=\frac{1}{2}$公分,　$C=3.1416$公分,　$A=0.785$平方公分.

又物體落下的時間$t$變動,則落下的距離$S$也隨它而變動,如:

$t=1$秒,則　$S=\frac{1}{2}\times 9.8\times 1^2$公尺$=4.9$公尺;

$t=2$秒,則　$S=\frac{1}{2}\times 9.8\times 2^2$公尺$=19.6$公尺;

$t=\frac{1}{2}$秒,則　$S=\frac{1}{2}\times 9.8\times\left(\frac{1}{2}\right)^2$公尺$=1.225$公尺.

$C$或$A$隨着$r$變,$S$隨着$t$變,我們把$r$和$t$看成自己在變,因而稱它們爲自變數.

至於$C,A$和$S$是因別的變數變了,它們纔跟着變的,稱爲倚變數.

當然,在

$$C=2\pi r,\quad A=\pi r^2\quad 和\quad S=\frac{1}{2}gt^2$$

中,我們把$r$和$t$看成自己在變.這只是一種看法.　假若我們掉換一

個立場，把圓的周長 $C$，或圓的面積 $A$ 看成自己在變，則圓的半徑 $r$ 也就只好跟着它變. 同樣地，若把物體落下的距離 $S$ 看成自己在變，那末物體落下的時間 $t$ 也只好跟着它變了. 於是 $C$,$A$ 和 $S$ 便是自變數，而 $r$ 和 $t$ 成了倚變數.

所以，一個式子所聯繫的兩個(或兩個以上的)變數，哪一個(或幾個)是自變數，哪一個是倚變數；這是由我們的看法來決定的，是相對的.

再舉一個例，物理上，擺動的週期 $T$ 和擺的長 $l$ 有這樣的關係：

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

把擺的長 $l$ 看作自變數，則擺動的週期 $T$ 便是倚變數. 用一個式子將倚變數和自變數的變化的關係聯結起來，我們一般地，就稱倚變數爲自變數的函數. 由 $C=2\pi r$ 和 $A=\pi r^2$，稱 $C$ 和 $A$ 是 $r$ 的函數. 同樣地，由 $S=\frac{1}{2}gt^2$，$S$ 是 $t$ 的函數；由 $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$，$T$ 就是 $l$ 的函數.

因爲倚變數和自變數的關係是相對的，所以上面所舉的例也可以說，$r$ 是 $C$ 的函數，是 $A$ 的函數，$t$ 是 $S$ 的函數，以及 $l$ 是 $T$ 的函數.

**4.【函數的符號】** 一般的場合，我們用 $x$ 表自變數而用 $y$ 表 $x$ 的函數(倚變數). 於是前節的四個例，就可寫成：

(i) $y=2\pi x$, (ii) $y=\pi x^2$, (iii) $y=\frac{1}{2}gx^2$, (iv) $y=2\pi\sqrt{\frac{x}{g}}$.

我們又常用 $f(x)$ 代替 $y$，表明它是跟着自變數 $x$ 變的，也就是說它是 $x$ 的函數. 這個符號 $f(x)$ 的使用，我們可以將它分成兩部分 $x$ 和 $f(\ \ )$ 來看. $x$ 表的是自變數，$f(\ \ )$ 表的是函數和自變數的聯繫的形式，或者說表示函數跟着自變數而變化的一種情況或法則.

由於函數和自變數的聯繫的形式不同，也就是函數跟着自變數而變化的情況或法則不同，所用的符號就不得不加以區別，常用的是

$f(\ )$, $F(\ )$, $\phi(\ )$, ……, $f_1(\ )$, $f_2(\ )$, ……. 例如上面的四個式子,為了分别清楚,我們便可寫成:

$$\text{(i)}\quad f(x)=2\pi x, \qquad \text{(ii)}\quad F(x)=\pi x^2,$$

$$\text{(iii)}\quad \phi(x)=\frac{1}{2}gx^2, \qquad \text{(iv)}\quad \psi(x)=2\pi\sqrt{\frac{x}{g}}.$$

其次,若自變數改用 $y$ 或 $z$ 或 $t$ 表示,這四個式子便可寫成:

$$\text{(i)}\quad f(y)=2\pi y, \qquad f(z)=2\pi z, \qquad f(t)=2\pi t;$$

$$\text{(ii)}\quad F(y)=\pi y^2, \qquad F(z)=\pi z^2, \qquad F(t)=\pi t^2;$$

$$\text{(iii)}\quad \phi(y)=\frac{1}{2}gy^2, \qquad \phi(z)=\frac{1}{2}gz^2, \qquad \phi(t)=\frac{1}{2}gt^2;$$

$$\text{(iv)}\quad \psi(y)=2\pi\sqrt{\frac{y}{g}}, \qquad \psi(z)=2\pi\sqrt{\frac{z}{g}}, \qquad \psi(t)=2\pi\sqrt{\frac{t}{g}}.$$

5.【單變數函數和多變數函數】 解析幾何中,橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的面積 $A$ 等於 $\pi ab$. 這就是說橢圓的面積 $A$ 跟着 $a$ 變也跟着 $b$ 變. 換句話說,便是它跟着 $a$ 和 $b$ 共變. 但 $a$ 並不隨 $b$ 變,$b$ 也並不隨 $a$ 變. 所以 $a$ 和 $b$ 同時都可以看成自變數,只有 $A$ 是倚變數. 自然也就可以說 $A$ 是 $a$ 和 $b$ 的函數. 一般地,若用 $Z$ 代替 $A$,$x$ 代替 $a$,$y$ 代替 $b$,便可把它們的相依為變的情況寫成:

$$Z=f(x,y)=\pi xy.$$

在電磁學中,若磁場的磁力線密度是 $B$ 高斯,電流強度是 $I$ 安,電線的長是 $l$ 公分,則電磁力 $f$ 的值,為

$$f=\frac{1}{10}BIl\ \text{達因}.$$

若用 $x,y,z$ 相應地代 $B,I,l$; 又用 $u$ 代 $f$, 就可寫成:

$$u=F(x,y,z)=\frac{1}{10}xyz.$$

只含一個自變數的函數,稱為單變數函數;含二個以上自變數的函數,稱為多變數函數.

最末的兩個例中,原式也可以寫成:

$$f(a,b)=\pi ab \text{ 和 } F(B,I,l)=\frac{1}{10}BIl.$$

若用 $x_1,x_2,x_3$ 相應地代 $x,y,z$，則可以寫成：

$$f(x_1,x_2)=\pi x_1x_2 \text{ 和 } F(x_1,x_2,x_3)=\frac{1}{10}x_1x_2x_3.$$

**6.【函數的值】** 將函數所含的自變數，用一定的數值代入表示函數的式子，計算出的結果，便是這函數對於所含自變數的那些數值的相應值。例如：

若 $x=1$，則 $f(x)=2\pi x$，即 $f(1)=2\pi\cdot 1=2\pi$；

$$\phi(x)=\frac{1}{2}gx^2,\text{ 即 } \phi(1)=\frac{1}{2}g\cdot 1^2=\frac{1}{2}g.$$

而 $x=-1$，則 $f(-1)=2\pi(-1)=-2\pi$；

$$\phi(-1)=\frac{1}{2}g(-1)^2=\frac{1}{2}g.$$

若 $x=3a$，則 $F(x)=\pi x^2$，即 $F(3a)=\pi(3a)^2=9\pi a^2$；

$$\psi(x)=2\pi\sqrt{\frac{x}{g}},\text{ 即 } \psi(3a)=2\pi\sqrt{\frac{3a}{g}}=2\sqrt{3}\,\pi\sqrt{\frac{a}{g}}.$$

若 $x=4,y=7$，則 $f(x,y)=\pi xy$，即 $f(4,7)=\pi\cdot 4\cdot 7=28\pi$.

若 $x=10^5,y=25$，$z=30$，則 $F(x,y,z)=\frac{1}{10}xyz$，

即 $$F(10^5,25,30)=\frac{1}{10}\cdot 10^5\cdot 25\cdot 30=75\cdot 10^5.$$

(**例 1**) 若 $f(x)=3\sqrt{x}+\frac{2}{x}+7x^2+2$，求 $f(2),f(0.1)$，$f(y)$，$f(m)$ 和 $f(\sin x)$.

**解** 因 $$f(x)=3\sqrt{x}+\frac{2}{x}+7x^2+2,$$

故 $$f(2)=3\sqrt{2}+\frac{2}{2}+7\cdot 2^2+2=3\times 1.414+1+28+2=35.242;$$

$$f(0.1)=3\sqrt{0.1}+\frac{2}{0.1}+7(0.1)^2+2=3\times 0.316+20+0.07+2$$
$$=23.018;$$

$$f(y)=3\sqrt{y}+\frac{2}{y}+7y^2+2;$$

$$f(m)=3\sqrt{m}+\frac{2}{m}+7m^2+2;$$

$$f(\sin x)=3\sqrt{\sin x}+\frac{2}{\sin x}+7\sin^2 x+2.$$

(例2) 若 $y=\phi(x)=\frac{2x-1}{3x-2}$，證 $x=\phi(y)$；若 $\phi^2(x)$ 表示 $\phi[\phi(x)]$，則 $x=\phi^2(x)$.

解 因 $$y=\phi(x)=\frac{2x-1}{3x-2},$$

故 $$\phi(y)=\frac{2y-1}{3y-2}=\frac{2\times\frac{2x-1}{3x-2}-1}{3\times\frac{2x-1}{3x-2}-2}=x,$$

即 $$x=\phi(y).$$

又 $$\phi^2(x)=\phi[\phi(x)]=\frac{2\phi(x)-1}{3\phi(x)-2}$$

$$=\frac{2\times\frac{2x-1}{3x-2}-1}{3\times\frac{2x-1}{3x-2}-2}=x,$$

即 $$x=\phi^2(x).$$

## 習 題 一

1. 若 $f(x)=x^3-x+1$，求 $f(0),f(1),f(-1)$，並且證
$$f(x+h)=f(x)+(3x^2-1)h+3xh^2+h^3.$$

2. 若 $f(x)=x^2-5x+1$，求 $f(x^2)$，$f(x^3)$，$f(\sin x)$ 和 $f(\sin\frac{\pi}{4})$.

3. 若 $f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$，寫出 $f(y,x)$，$f(x,x)$ 和 $f(y,y)$.

4. 若 $y=f(x)=\frac{x+2}{3x+4}$，證 $f(y)=\frac{7x+10}{15x+22}$.

5. 若 $f(x)=x^2+2$ 和 $F(x)=4+\sqrt{x}$，求 $f[F(x)]$ 和 $F[f(x)]$.

6. 若 $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$, $f^2(x)$ 表示 $f[f(x)]$, $f^3(x)$ 表示 $f\{f[f(x)]\}$, ……, 證 $x=f^2(x)=f^3(x)=f^4(x)$……。

7. 若 $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$, 證 $\frac{f(x)-f(y)}{1+f(x)f(y)}=\frac{x-y}{1+xy}$.

8. 若 $y=f(x)=\frac{ax+b}{cx-a}$, 證 $x=f(y)$.

9. 若 $f(x)=\log x$, 證

$$f(xy)=f(x)+f(y) \text{ 和 } f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y).$$

10. 若 $f(x,y)=x^2-y^2$, 證

$$f(\cos\theta, \sin\theta)=\cos 2\theta \text{ 和 } f(\sec\theta, \tan\theta)=1.$$

11. 若 $m$ 和 $n$ 爲正整數, $\phi(m,n)=\frac{\underline{|m+n}}{\underline{|m}\,\underline{|n}}$, 證

$$\phi(m,n+1)+\phi(m+1,n)=\phi(m+1,n+1).$$

12. 若 $f(x,y,z)=\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}$, 證

$$f(y+z,z+x,x+y)=2f(x,y,z).$$

**7.【極限】** 爲了要說明極限的意義,我們先來探究下面的三個例:

(i) 設 $S_n$ 等於幾何級數 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots$ 的 $n$ 項的和,即

$$S_1=1,$$

$$S_2=1+\frac{1}{2}=1.5,$$

$$S_3=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=1.75,$$

$$S_4=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=1.875,$$

……………………

$$S_n=1\times\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}{\frac{1}{2}-1}=\frac{\frac{1-2^n}{2^n}}{-\frac{1}{2}}=2-\frac{1}{2^{n-1}}.$$

由這一串式子看來，這個級數的和，$n$ 越大它也跟着越大，這是第一點．但它無論怎樣跟着 $n$ 變大，比 2 總要小 $\frac{1}{2^{n-1}}$，所以 $S_n$ 總不會和 2 相等，這是第二點．最後，我們由 $n$ 的逐漸變大，而使這級數的和 $S_n$ 和 2 的差可以變得比我們任意指定的任何小的正數都小，這是第三點．

(ii) 算術中，用 3 去除 1，無論除到多少位小數，總是除不盡的；我們說 $\frac{1}{3}=0.\dot{3}=0.3333\cdots\cdots$，是一個循環小數．而

$$\frac{1}{3}-0.3\quad=\frac{1}{30},$$
$$\frac{1}{3}-0.33\ =\frac{1}{300},$$
$$\frac{1}{3}-0.333=\frac{1}{3000},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{1}{3}-0.3333\cdots\cdots(\text{到 } n \text{ 位小數})=\frac{1}{3\times10^n}.$$

可見，循環小數 $0.\dot{3}$ 的值，位數越多，它也跟着越大，這是第一點．但它無論怎樣跟着 $n$ 變大，比 $\frac{1}{3}$ 總要小 $\frac{1}{3\times10^n}$，所以 $0.\dot{3}$ 總不會和 $\frac{1}{3}$ 相等，這是第二點．最後，我們由 $n$（小數位數）的逐漸變大，而使循環小數 $0.\dot{3}$ 和 $\frac{1}{3}$ 的差，可以變得比我們任意指定的任何小的正數都小，這是第三點．

(iii) 平面幾何中，若取定圓的半徑作長的單位 1，這圓的內接正 $n$ 邊形的一邊的長爲 $a$，內接正 $2n$ 邊形的一邊的長爲 $a'$，以及外切正 $2n$ 邊形的一邊的長爲 $b'$，則

$$a'=\sqrt{2-\sqrt{4-a^2}}\quad\text{和}\quad b'=\frac{2(2-\sqrt{4-a^2})}{a}.$$