

桥梁设计理论

—荷载横向分布、弯桥、
有效宽度及剪力滞

QIAOLIANG
SHEJI
LILUN

张 士 铎 编 著

人 民 交 通 出 版 社

Qiaoliang Sheji Lilun

桥梁设计理论

Hezai Hengxiang Fenbu, Wanqiao,

——荷载横向分布、弯桥、

Youxiao Kuandu Ji Jianlizhi

人民交通出版社

内 容 提 要

本书介绍荷载横向分布理论、平面弯桥计算方法、翼缘板的有效分布宽度及箱形梁截面的剪力滞效应等桥梁设计中理论性问题。

该书可供科研、教学人员和桥梁专业研究生参考。

桥 梁 设 计 理 论

——荷载横向分布、弯桥、

有效宽度及剪力滞

张 士 铎 编 著

人民交通出版社出版

新华书店北京发行所发行

各 地 新 华 书 店 经 售

人民交通出版社印刷厂印

开本：787×1092 $\frac{1}{16}$ 印张：7.25 字数：154 千

1984年7月 第1版

1984年7月 第1版 第1次印刷

印数：0001—7,750 册 定价：1.15元

前 言

本书根据作者给桥梁工程专业研究生开课的讲义编写而成。随着桥梁结构理论不断发展,有必要对荷载横向分布理论、平面弯桥计算方法、翼缘板的有效分布宽度及箱形梁截面的剪力滞效应等桥梁设计中的关键性问题进行深入的研究与探讨。作者在授课中,搜集和选编了国内外有关桥梁设计理论方面的最新成果和文献,以提高研究生的科研兴趣和理论水平,启发他们在今后的科研和教学工作中有所创新。

本书包括上述四个专题内容,分十二章讲授。其中有些内容取材于国内外学者最新发表的论文与著作,故在书末列有参考文献目录,便于读者进一步查阅与研究。

由于初次尝试编写这类书籍,缺乏经验,故在内容的编排上,难免有不当与错误之处,尚请读者批评指正。

承交通部第三航务勘察设计院任先正同志协助绘图,谨致以谢意。

张 士 铎

一九八三年七月于同济大学

1983.7

目 录

专题一 荷载横向分布的计算理论.....	1
第一章 荷载横向分布 G-M 法及其应用	1
§1-1 力学模型与基本假定	1
§1-2 正交各向异性板微分方程的建立	2
§1-3 比拟正交各向异性板微分方程的求解	10
§1-4 影响系数 K_0 , K_1 和 K_a	23
§1-5 横向弯矩计算原理	27
§1-6 G-M 法的计算示例	28
§1-7 G-M 法在其他体系中的应用	33
§1-8 对 G-M 法存在的问题的几点看法	36
第二章 刚性梁法及其应用	38
§2-1 计算超静定内力及力法方程的建立	38
§2-2 刚性梁法参数 γ , β 和 β' 的说明	46
§2-3 刚性梁法的计算示例	47
§2-4 刚性梁法与 G-M 法的比较	49
第三章 偏心受压修正法 (刚性横梁法) 及各家修正公式的对比	51
§3-1 舒根修正偏心受压法的计算公式推导	51
§3-2 用能量法解 $\frac{B}{l} \leq 0.5$ 梁式桥的立体计算	54
§3-3 偏心受压法其它修正公式的摘要及各家	

修正公式的对比·····	63
专题二 平面弯桥的计算理论、横向分布与实用	
计算法 ·····	67
第四章 平面弯桥的计算理论 ·····	67
§4-1 平面曲梁的平衡微分方程·····	67
§4-2 用结构力学方法求解静定与一次超静定的 平面曲梁·····	72
§4-3 平面曲梁的变形微分方程·····	77
§4-4 曲梁挠曲角、扭曲角及挠度的几种解法·····	83
第五章 平面弯桥的荷载横向分布 ·····	89
§5-1 考虑弯扭耦合的刚性横梁法·····	89
§5-2 考虑弯扭耦合的刚性横梁法中各种刚度 系数的计算及与直桥的对比·····	98
§5-3 G-M 修正法 ·····	100
§5-4 刚性梁法应用于平面弯桥的荷载横向 分布·····	104
§5-5 刚性梁法解平面曲梁桥的荷载横向分布 影响线示例并与刚性横梁法的对比·····	110
第六章 平面弯桥的实用计算法 ·····	122
§6-1 概述·····	123
§6-2 恒载反应中的弯曲影响·····	123
§6-3 恒载反应中的翘曲影响·····	127
§6-4 恒载反应中的歪扭影响·····	130
专题三 翼缘板的有效分布宽度 ·····	132
第七章 用卡曼理论推导翼缘板的有效分布宽度 ·····	132
§7-1 卡曼理论研究的对象·····	132
§7-2 应力函数的推导·····	133

§7-3	用能量法求解应力及有效分布宽度	136
§7-4	小结	143
第八章	T型梁翼缘板的有效分布宽度	143
§8-1	基本假定	143
§8-2	平面问题的艾雷函数	145
§8-3	TT型梁的有效分布宽度	148
§8-4	多根主梁的有效分布宽度	151
§8-5	计算示例	155
§8-6	各国对有效分布宽度 B 的具体规定	157
专题四	箱形梁的剪力滞效应	159
第九章	箱形梁剪力滞效应的基本概念	159
§9-1	概述	159
§9-2	剪力滞定义	160
§9-3	基本微分方程的推导	161
§9-4	用变形表示平衡方程 $\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = 0$	163
§9-5	解偏微分方程并确定积分常数	164
§9-6	翼缘板的应力分布	166
§9-7	翼缘板承受荷载的有效性 e	167
第十章	理想化加劲杆与薄板法解剪力滞效应	167
§10-1	加劲杆与薄板的等效面积折算	168
§10-2	在轴向力作用下理想化加劲杆与薄板的 剪应力微分方程式的推导	170
§10-3	承受轴向荷载的多加劲杆与薄 板的解法	174
§10-4	箱形梁的剪力滞效应分析 (悬臂箱梁受	

弯时利用加劲杆与薄板法解剪力滞 效应).....	175
§10-5 几种分析方法的小结	178
第十一章 利用变分法解箱形梁剪力滞效应.....	180
§11-1 变分法的解析	180
§11-2 简支梁、悬臂梁的剪力滞效应	186
§11-3 剪力滞系数的比较	193
§11-4 用迭加法解超静定结构的剪力滞效应	194
§11-5 几种不同边界条件下的箱形梁沿跨长 剪力滞系数的影响	198
第十二章 悬臂箱形梁的负剪力滞效应.....	201
§12-1 引言	202
§12-2 变分法的解答	203
§12-3 应用平面有限元的分析	208
§12-4 负剪力滞效应的影响因素	211
§12-5 模型试验及结果的比较	213
§12-6 结束语	217
附录: 二次及四次抛物线型位移函数的假定 及剪力滞的变分解.....	218
参考文献.....	221

专题一 荷载横向分布的计算理论

第一章 荷载横向分布 G-M 法 及其应用

1946年, 法国居易翁 (Y. Guyon) 采用正交各向异性板的理论解决了无扭梁格 ($\alpha = 0$) 的荷载横向分布的计算问题, 随后到 1950年, 马松奈 (Massonnet) 对有扭梁格 ($\alpha = 1$) 的荷载横向分布问题做了全面的推导和解算并制定了实用图表, 从而可以推广到 α 在 0 至 1 之间的任何情况, 因此人们把这种计算荷载横向分布的解法称作为 G-M 法或比拟正交各向异性板理论。本章主要介绍 G-M 法的力学模型、基本假定、微分方程的建立与解法, 以及 G-M 法的具体应用, 并对简支梁以外的悬臂梁、固端梁和连续梁也作了必要的探讨。

§1-1 力学模型与基本假定

G-M 法是将整个梁格系比拟成正交各向异性板, 研究它在受力后的挠度与内力。为解决荷载的横向分布问题, 把集中荷载均换算成正弦型荷载, 这样跨中的横向分布规律也可以适用于跨间各断面。取一个板的单元体来看, 它与梁的不同之处就在于板不仅双向受弯、受剪, 而且还要受扭。图 1-1 所示为 $dx \times dy$ 的单元上承受的应力及相应的内力。

向异性板的微分方程表达式。

一、应力与应变关系（物理关系）

由于在§1-1假定4中， $\sigma_z = 0$ ，考虑材料在 x 和 y 两个方向的弹性模量不相同，可以建立下列应变与应力的关系式，即

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E_x}(\sigma_x - \nu_x \sigma_y) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E_y}(\sigma_y - \nu_y \sigma_x) \\ \gamma_{xy} &= -\frac{\tau_{xy}}{G} \end{aligned} \right\} \quad (1-1)$$

如果(1-1)式用应力表示，则有

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= E'_x \varepsilon_x + E'' \varepsilon_y \\ \sigma_y &= E'_y \varepsilon_y + E'' \varepsilon_x \\ \tau_{xy} &= G \cdot \gamma_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (1-2)$$

在(1-2)式中：

$$E'_x = \frac{E_x}{1 - \nu_x \nu_y}$$

$$E'_y = \frac{E_y}{1 - \nu_y \nu_x}$$

$$E'' = \frac{\nu_x E_y}{1 - \nu_x \nu_y} = \frac{\nu_y E_x}{1 - \nu_x \nu_y}$$

上述各公式中， ν_x 与 ν_y 为 x 与 y 方向的波桑比。

二、板弯曲变形的几何关系

如图1-2a, b 所示。

在 x 与 y 方向的位移，从图1-2a 中可知：

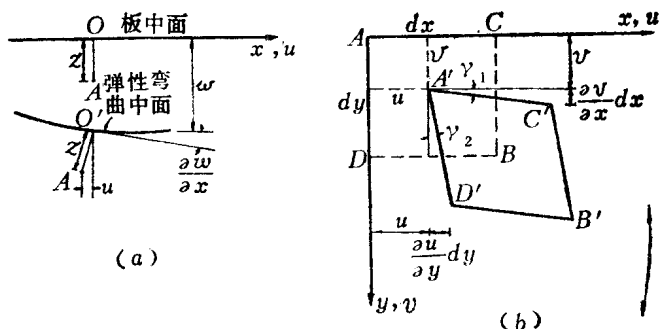


图1-2 位移与剪切变形

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x}, \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y},$$

其中等式右边的负号表示 u 和 x , v 和 y 的方向相反。

同样:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (1-3)$$

将(1-3)式代入(1-2)中, 得到应力表达式为:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -z \left[E'_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + E'' \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \\ \sigma_y &= -z \left[E'_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + E'' \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \\ \tau_{xy} &= -2G \cdot z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (1-4)$$

三、用挠度 w 表示板的弯矩与扭矩

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \cdot z \, dz = - \left[D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \\ M_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y \cdot z \, dz = - \left[D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \\ M_{xy} &= -M_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} \cdot z \, dz = 2D_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (1-5)$$

在(1-5)式中

$$D_x = \frac{E'_x h^3}{12}; \quad D_y = \frac{E'_y h^3}{12}$$

$$D_1 = \frac{E'' h^3}{12}; \quad D_{xy} = \frac{G h^3}{12}$$

四、内力与外力的关系（平衡条件）

参考图1-3a 和 b。

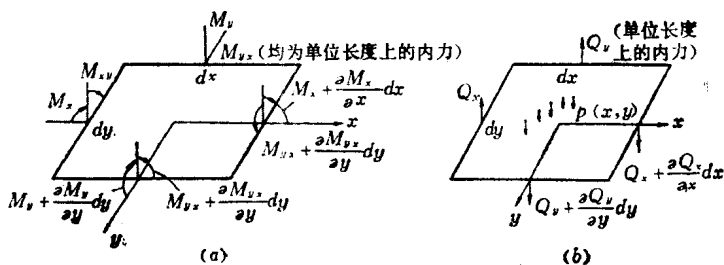


图1-3 单元上的内力

$\Sigma V = 0$, 所有竖直力应等于零, 即

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} \cdot dx \cdot dy + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \cdot dx + p(x, y) dx \cdot dy = 0$$

$$\text{则有} \quad \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -p(x, y) \quad (1-6)$$

$\Sigma M_x = 0$, 则有

$$\begin{aligned} & M_x dy - \left(M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} \cdot dx \right) dy + M_{yx} dx \\ & - \left(M_{yx} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} \right) dx + Q_x dx dy - \frac{\partial Q_y}{\partial y} \\ & \times dy \cdot dx \cdot \frac{dx}{2} + p(x, y) dx \cdot dy \cdot \frac{dx}{2} = 0 \end{aligned}$$

略去高阶微分量, 化简后得到

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} \quad (1-7)$$

$\Sigma M_y = 0$, 同样略去高阶微分量, 化简后得到

$$Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \quad (1-8)$$

现将(1-7)与(1-8)式代入(1-6)中得到:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial y \cdot \partial x} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = -p(x, y) \quad (1-9)$$

把(1-5)式代入(1-9)内, 得到

$$\begin{aligned} & D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(2D_{xy} + D_1) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \\ & = p(x, y) \end{aligned} \quad (1-10)$$

令 $H = 2D_{xy} + D_1$, 则(1-10)变为:

$$\boxed{D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p(x, y)} \quad (1-11)$$

五、G-M 法参数的推导

参阅图 1-4a 所示的桥梁横截面，主梁中到中的距离为 b_0 ，每片主梁的抗弯与抗扭惯矩分别为 I_x ， I_{tx} 。横隔梁中到中的距离为 a_0 ，每片横隔梁的抗弯和抗扭惯矩分别为 I_y ， I_{ty} 。

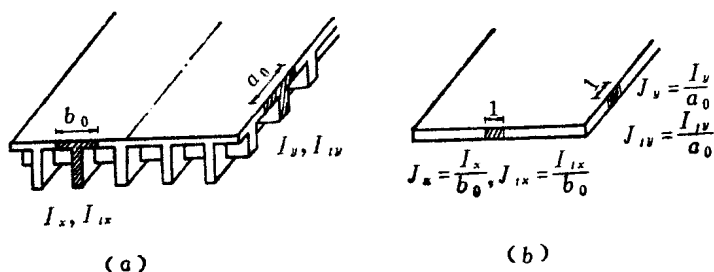


图1-4 惯矩的取法

假定桥道板与主梁肋之间具有整体性，且 b_0 与整个桥的宽度 B 相比为相当小，同样， a_0 与整个桥跨 l 相比也为相当小，那么 I_x ， I_{tx} 可分摊在宽度 b_0 上， I_y ， I_{ty} 也能分摊在宽度 a_0 上。这样就把实际的梁格系比拟成正交的各向异性的假想平板，如图 1-4b 所示。在此，

$$J_x = \frac{I_x}{b_0}, \quad J_y = \frac{I_y}{a_0}, \quad J_{tx} = \frac{I_{tx}}{b_0}, \quad J_{ty} = \frac{I_{ty}}{a_0} \quad (1-12)$$

其内力与弯曲变形的关系对单宽刚度为 EJ_x ， GJ_{tx} 和单长刚度为 EJ_y ， GJ_{ty} 的比拟正交各向异性板为（此处 $E_x = E_y = E$ ）：

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -EJ_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ M_y &= -EJ_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ M_{xy} &= -GJ_{tx} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \\ M_{yx} &= -GJ_{ty} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (1-13)$$

这里，对于钢筋混凝土或预应力混凝土， ν_x, ν_y 在 0.15~0.20 之间。为了简化计算，可以认为 $\nu_x = \nu_y = 0$ ，如果 $\nu_x = \nu_y \neq 0$ ，则无法比拟。这样得出的微分方程与各向异性板相似，故将梁格换算成各向异性板，此法称之为比拟的正交各向异性板法。式(1-13)可以简写成

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -EJ_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, & M_y &= -EJ_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ M_{xy} &= -GJ_{tx} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, & M_{yx} &= -GJ_{ty} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (1-14)$$

将(1-14)式代入(1-9)中，则得到

$$\begin{aligned} EJ_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + G(J_{tx} + J_{ty}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \\ + EJ_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p(x, y) \end{aligned} \quad (1-15)$$

如果引入一个参数 α ，并令

$$\alpha = \frac{G}{2E} \frac{(J_{tx} + J_{ty})}{\sqrt{J_x \cdot J_y}} \quad (1-16)$$

则(1-15)式可改写为:

$$E J_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \alpha E \sqrt{J_x \cdot J_y} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + E J_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p(x, y) \quad (1-17)$$

为求荷载横向分布, 在简支梁桥中, 在 $y = y_1$ 处作用一正弦荷载 $p(x, y) = 1 \cdot \sin \frac{\pi x}{l}$, 比拟的正交各向异性板的挠度 $w(x, y)$ 可写成变量分离形式, 因为在 x 方向是正弦函数, 在 y 方向为 $Y(y)$ 函数, 即要求解的未知函数。

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} Y(y) \sin \frac{n \pi x}{l} \quad (1-18)$$

如图1-5所示, $y = y_1$ 处有一正弦荷载其峰值等于1, 在左右两侧 $(-b < y < y_1)$ 和 $(y_1 < y < b)$ 范围内的荷载为零, 现将(1-18)式代入(1-17)式中, 去求解 $Y(y)$, $Y(y)$ 已知后, 挠度 $w(x, y)$ 就可以得到, 于是荷载横向分布问题就可以迎刃而解了。

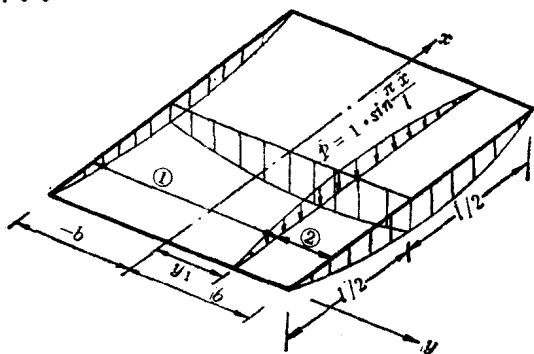


图1-5 正交各向异性板的受力与变位