高等财经院校系列教材

线性代数

主编 张庆彩
主审 李静芬

XIANXING DAISHU

经济科学出版社

857

高等财经院校系列教材

线性代数

主　编　张庆彩

副主编　袁　萍　刘太琳　张广沅

参　编　刘纪芹　马玉林

主　审　李静芬

经济科学出版社

责任编辑：吕　萍
责任校对：徐领弟
版式设计：周国强
技术编辑：王世伟

线　性　代　数

主编　张庆彩　主审　李静芬
经济科学出版社出版、发行　新华书店经销
社址：北京海淀区阜成路甲 28 号　邮编：100036
总编室电话：88191217　发行部电话：88191540
网址：www.esp.com.cn
电子邮件：esp@esp.com.cn
北京天宇星印刷厂印刷
河北三河永明装订厂装订
880×1230　32 开　7 印张　190000 字
2001 年 7 月第一版　2001 年 7 月第一次印刷
印数：00001—10100 册
ISBN 7-5058-2597-6/F·1989　定价：12.10 元

前　　言

本书是根据国家教委《高等学校财经类专业核心课程教学大纲》，针对高等财经院校的特点，在多年教学实践的基础上编写的。线性代数这一数学工具在经济科学和管理科学中有着广泛的应用，学好这门课程不仅对学习后继课程是必不可少的，而且对掌握现代经济理论并应用于实践也是很有必要的。

在本书编写中，我们力求深入浅出，通俗易懂，便于自学。全书共分五章，第一章介绍行列式的概念、性质与计算，以及用克莱姆法则求解线性方程组的方法；第二章介绍矩阵的概念及运算法则，逆矩阵，矩阵的初等变换及分块矩阵；第三章介绍n维向量理论，包括向量的概念与运算，线性相关与无关，向量组的秩与矩阵的秩等；第四章介绍线性方程组的理论，包括线性方程组有无解的判定，求解方法及解的结构；第五章介绍矩阵的特征值与实二次型的理论，并对线性空间理论作了简单介绍。

本书可作为各类高等财经院校的本科和专科教材，亦可作为经济工作者的自学用书。

参加本书编写的有：张广沅（第一章），袁萍（第二

章)，刘太琳(第三章)，刘纪芹(第四章)，马玉林(第五章)。袁萍、刘太琳审阅了部分初稿。全书由张庆彩统一修改定稿，李静芬主审。

本书的出版得到了山东财政学院成教处、基础部及诸多同仁的关心和支持，在此表示衷心感谢。

由于编者水平有限，书中难免有不当之处，恳请专家、读者批评指正。

编　者

2001年3月6日

目　　录

第一章
行列式

在自然科学、工程技术以及管理科学中，有许多问题的数学模型是线性方程组，线性方程组的理论和解法是线性代数研究的主要对象之一，而行列式是研究线性方程组的一种重要工具。

本章主要介绍：n 阶行列式的递归定义、基本性质、行列式的展开、计算方法以及用 n 阶行列式解 n 元线性方程组的克莱姆法则。

§1.1 n 阶行列式

与中学代数不同，我们将要讨论的是一般线性方程组的理论和解法。由 n 个未知数、m 个线性方程（即一次方程）联立的线性方程组称为 **n 元线性方程组**，其一般形式可表示为以下的形式：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1}$$

其中 x_1，x_2，…，x_n 表示 n 个未知量（也可用简写的 x_j 表示未

知量，$j=1,2,\cdots,n$)，a_{ij}表示第i个方程中未知数x_j的系数，b_i为常数项（$i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$)。

通过利用求和号“$\sum$”，一般的线性方程组可以缩写成

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i \quad (i=1,2,\cdots,m)$$

的形式。

当$m=n$时，我们将一般线性方程组的未知量x_j（$j=1,2,\cdots,n$）的系数按原位置顺序排成n行、n列的形式，并用符号表示为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

它就是我们要学习的n阶行列式。这里，先介绍$n=2$、$n=3$时的行列式。

一、二阶行列式与三阶行列式

1. 二阶行列式

由n元线性方程组的一般形式可知，二元线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2. \end{cases}$$

现在，我们用加减消元法来解这个方程组。其解题过程是：将第一个方程乘以a_{22}，减去第二个方程乘以a_{12}，消去x_2，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=a_{11}b_2-a_{21}b_1;$$

将第二个方程乘以a_{11}，减去第一个方程乘以a_{21}，消去x_1，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-a_{21}b_1.$$

若$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq0$，则得此二元线性方程组的解为：

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1 a_{22} - b_2 a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \end{cases}$$

从上面解的公式中可见，两个分母都是 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，经过比较，可以看出，$a_{11}$，$a_{12}$，$a_{21}$，$a_{22}$分别是二元线性方程组未知数 x_1，x_2 的系数，为了便于记忆和讨论，我们用符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

表示数 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，这样就产生了二阶行列式。

细心的读者会观察到公式中的两个分子，显然也可用二阶行列式表示，进一步还会发现二元线性方程组用行列式求解的规律，我们将在§1.4 中给出答案。

二阶行列式定义　我们称符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

为二阶行列式，它表示代数和 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

其中 a_{ij}（$i=1$，2；$j=1$，2）称为二阶行列式的元素。这四个元素构成的正方形，横排称为行，纵排称为列。二阶行列式有两行两列。

定义说明：二阶行列式由二行、二列的 4 个元素组成，用 a_{ij} 表示每个元素，第 1 个下标 i 表示元素在第 i 行，第 2 个下标 j 表示元素在第 j 列。例如 a_{12}表示行列式中第 1 行第 2 列的元素。

在行列式里，我们把由左上角 a_{11}处到右下角 a_{22}处的对角线叫做**主对角线**，把右上角 a_{12}处到左下角 a_{21}处的对角线叫做**次对角线**。因此，二阶行列式的值等于主对角线上两个元素的乘积减去次对角线上两个元素的乘积。这就是二阶行列式的计算法则。

该法则可用下图所示的**对角线展开法则**记忆：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

即实线（表示主对角线）连接的两个元素的乘积，减去虚线（表示次对角线）连接的两个元素的乘积。

例 1 计算二阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}.$$

解: $D = 2\cdot 2 - (-1)\cdot 5 = 9$

例 2 设 $D = \begin{vmatrix} k & k^2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$,

问:（1）当 k 为何值时，$D=0$;

（2）当 k 为何值时，$D\neq 0$.

解: $D = \begin{vmatrix} k & k^2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2k - k^2$.

$D=0$，即 $2k-k^2=0$，则 $k=0$，$k=2$. 因此可得:

（1）当 $k=0$ 或 $k=2$ 时，$D=0$;

（2）当 $k\neq 0$ 且 $k\neq 2$ 时，$D\neq 0$.

2. 三阶行列式

用加减消元法解三元线性方程组，引出三阶行列式的概念。

三阶行列式定义 我们称符号

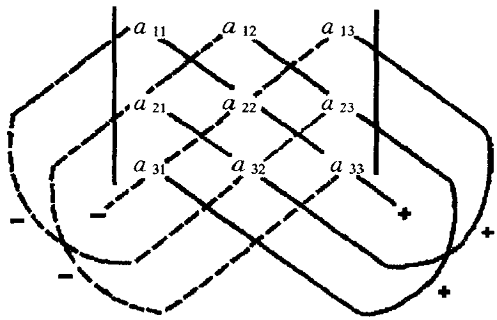
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

为三阶行列式，它表示代数和

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

三阶行列式有三行三列共 9 个元素 a_{ij}（$i=1, 2, 3$；$j=1, 2, 3$）。由定义看出，三阶行列式表示六项的代数和，每项为三个位于不同行、不同列的元素的乘积，其中三项前面带“+”号，另三项前带“-”号。利用这些特点，可得三阶行列式的**对角线展开法则**，如下图所示：



其中，主对角线及平行于主对角线的线（即三条实线）联接的三个元素的乘积前冠以“+”号，次对角线及其平行线（即三条虚线）联接的三个元素的乘积前冠以“-”号。

例 3　计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 3 & 5 & 0\\ 0 & 4 & 1\end{vmatrix}.$$

解：$D = 1\cdot5\cdot1+0\cdot0\cdot0+(-1)\cdot3\cdot4-(-1)\cdot5\cdot0-0\cdot3\cdot1-1\cdot4\cdot0$
$= -7$

例 4　a、b 满足什么条件时，有

$$\begin{vmatrix}a & b & 0\\ -b & a & 0\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=0.$$

解：$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a^2+b^2.$

若要 $a^2+b^2=0$，a 与 b 须同时等于 0，因此当 $a=0$ 且 $b=0$ 时，给定行列式等于 0.

二、n 阶行列式定义

为了统一起见，在行列式讨论中，常规定一阶行列式 $|a|=a$（注意：这里不是绝对值）。现在我们用逐项递推（亦称递归）的方法来定义一般的行列式。

n 阶行列式定义 一、二阶行列式已有定义。假定 $n-1$ 阶行列式已经定义，则定义 n 阶行列式为

$$D=|a_{ij}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+\cdots+(-1)^{1+n}a_{1n}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix},$$

其中，右端第一个行列式是将 D 中 a_{11} 所在的第 1 行和第 1 列划去

后剩余元素按原相对位置排成的 $n-1$ 阶行列式，第二个行列式是将 D 中 a_{12} 所在的第 1 行和第 2 列划去后剩余元素按原相对位置排成的 $n-1$ 阶行列式，…，第 n 个行列式是将 D 中 a_{1n} 所在的第 1 行和第 n 列划去后剩余元素按原相对位置排成的 $n-1$ 阶行列式；各 $n-1$ 阶行列式前的符号由 $(-1)^{1+j}$ 而定，其指数为元素 a_{1j} 所在行的行序号 1 和列序号 j（从左往右数）之和（$j=1, 2, \cdots, n$），即各 $n-1$ 阶行列式前所取符号为正负相间。

特别地，当 $n=2$，就得到二阶行列式；当 $n=3$，就得到三阶行列式。可见，与前面的定义是一致的。

与二、三阶行列式相类似，n 阶行列式中的数 a_{ij}（$i=1, 2, \cdots, n$；$j=1, 2, \cdots, n$）称为元素，因而 n 阶行列式共有 n 行、n 列，有 n^2 个元素；行列式的阶数，指的是它的列数或行数；元素 a_{11}，a_{22}，…，a_{nn}，所在的斜线叫行列式的**主对角线**，元素 a_{1n}，$a_{2,n-1}$，…，a_{n1} 所在的斜线叫行列式的**次对角线**。

用数学归纳法可以证明，n（$n>1$）阶行列式的展开式共有 $n!$ 项，其中一半项的前面冠以“+”号，另一半项的前面冠以“-”号，且每项都是 n 个元素相乘，这 n 个元素位于不同行、不同列。n 阶行列式的值就是这 $n!$ 项的代数和。

例 5 行列式主对角线上方元素全为零时，称其为**下三角形行列式**。计算下三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解： 根据行列式定义，得

$$D=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{43} & a_{44} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n3} & a_{n4} & a_{n5} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \cdots = a_{11}a_{22}\cdots a_{n,n-2}\begin{vmatrix} a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

即下三角形行列式等于其主对角线上所有元素的乘积。

例 6 主对角线两侧元素均为零的行列式，叫做**对角形行列式**。显然，可把对角形行列式看做下三角形行列式，于是有：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

即对角形行列式等于其主对角线上所有元素的乘积。

例 7 计算五阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & a_{15} \\ 0 & 0 & 0 & a_{24} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & 0 \\ 0 & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

解：

$$D = (-1)^{1+5}a_{15}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & a_{42} & 0 & 0 \\ a_{51} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= a_{15}\cdot (-1)^{1+4}a_{24}\begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{33} \\ 0 & a_{42} & 0 \\ a_{51} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -a_{15}a_{24}(-a_{33}a_{42}a_{51}) = a_{15}a_{24}a_{33}a_{42}a_{51}.$$

由此例看到，对角线展开法只适用于二阶、三阶行列式的计算，不能用来计算四阶及四阶以上的行列式。

例 8　用数学归纳法证明

$$D=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

证明　当 $n=1$ 时，$D=|a_{1n}|=a_{1n}$，等式显然成立；当 $n=2$ 时，有：

$$D=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=-a_{12}a_{21},$$

等式也成立；假定等式对 $n-1$ 成立，现在证明对 n 也成立：

$$\begin{aligned} D &= (-1)^{1+n}a_{1n}\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{2,n-1} \\ 0 & \cdots & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{1+n}a_{1n}\cdot(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}a_{2,n-1}a_{3,n-2}\cdots a_{n1} \\ &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}. \end{aligned}$$

于是由数学归纳法知，等式对任意自然数 n 均成立。

三、余子式和代数余子式

在 n 阶行列式定义中，元素 a_{1j}（$j=1, 2, \cdots, n$）所乘的一个 $n-1$ 阶行列式都是这样得到的：划去 a_{1j}（$j=1, 2, \cdots, n$）所在的第 1 行和第 j 列后，剩余元素按原相对位置排成的 $n-1$ 阶行列式，对原行列式而言，我们称其为元素 a_{1j}的余子式。

余子式定义　在 n（$n>1$）阶行列式 $D=|a_{ij}|$中，将元素 a_{ij}所在的行和列（即第 i 行和第j 列）划去，剩余元素按原来相对位置排列所构成的 $n-1$ 阶行列式，称为 D 中元素 a_{ij}的余子式，用 M_{ij}表示。

于是，三阶行列式定义式可写为：

$$D=a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+a_{13}M_{13}.$$

n 阶行列式的定义式可写为：

$$D=a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+a_{13}M_{13}+\cdots+(-1)^{1+n}a_{1n}M_{1n}.$$

为了使上面式子的形状更好一些，我们再引进代数余子式的概念。

代数余子式定义 在 n（$n>1$）阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 中，元素 a_{ij} 的余子式附以符号 $(-1)^{i+j}$ 后，称为元素 a_{ij} 在 D 中的代数余子式，记为 A_{ij}，即

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}.$$

显然，当 $i+j$ 为奇数时，$A_{ij}=-M_{ij}$；当 $i+j$ 为偶数时，$A_{ij}=M_{ij}$.

由代数余子式定义，n 阶行列式的定义式又可写为：

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}$$

或
$$D=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}.$$

例 9 设有四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\a&b&c&d\\x&y&z&k\\5&6&7&8\end{vmatrix},$$

写出元素 b，y 的余子式和代数余子式。

解： 元素 b 的余子式和代数余子式分别是

$$M_{22}=\begin{vmatrix}1&3&4\\x&z&k\\5&7&8\end{vmatrix},\qquad \text{（划去 } D \text{ 中第二行、第二列）}$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}M_{22}=\begin{vmatrix}1&3&4\\x&z&k\\5&7&8\end{vmatrix}.$$

元素 y 的余子式和代数余子式分别是

$$M_{32}=\begin{vmatrix}1&3&4\\a&c&d\\5&7&8\end{vmatrix},\qquad \text{（划去第三行、第二列）}$$