高等学校教学用書

几何学基礎

B. И. 科士青著

商务印書館

高等学校教学用書

几何学基礎

В. И. 科士青著
苏步青譯

商务印書館

本書係根據蘇俄教育部教育出版社(Государственное учебно-педагогическое издательство министерства просвещения РСФСР)出版的科士青(В. И. Костин)著"幾何學基礎"(Основания геометрии)1948年版譯出。原書經蘇聯高等教育部審定爲師範學院教科書。

本書譯者爲復旦大學蘇步青。

几 何 学 基 础

苏步青譯

商 務 印 書 館 出 版

上海河南中路二一一號

(上海市書刊出版業營業許可證出字第〇二五號)

新 華 書 店 總 經 售

商 務 印 書 館 上 海 廠 印 刷

(13017·7)

1954年3月初版	開本 850×1168 1/32
1956年5月3版	字數 280,000
1957年1月上海第4次印刷	印數 18,201—22,200
印張 10 13/16	定價(8)¥1.20

目　錄

引　言

本教程是彙集著者在國立高爾基大學和高爾基師範學院多回講授的結果而編成的。

無論在教程講授中或在籌備付印中，著者必得去尋求邏輯因素和歷史因素的恰當配合。當然，我們可以從現代的公理法着手，而從它再導出一切歷史的意義。這種方法在科學上的見解雖然有其完全的高級品質，但在教育法上卻有缺陷，因爲我們不能符合於下面所說的："如果我們關於某事物不知道它是如何發展的話，那就也無法理解它"。並且，這方法首先要幾何的現代公理法與有關的形式邏輯演繹法相聯繫。沒有適當的歷史的敍述，這對學生們就會變成懸空的結構；儘管我們怎樣說明它的必要性、眞正的意義和作用，這些東西仍舊是不可了解的。

明瞭所論目標的歷史，對於將來的教師和學生不但有益，而且是必要的。我們應該知道什麼事物、在何地、何時、是怎樣發展起來的，並且在那些影響下才採取現在形式的。

第一章的任務是引導讀者對幾何的現代形式邏輯構成有所領會與知悉其必要性。這個目標是藉助於中學畢業生所熟悉的那個幾何系統的批判而得到的，而且這個系統是由歐幾里得所創設的。最初簡單說明在我們之前的最早的幾何學基礎——歐幾里得的"原本"——所由來的歷史根據(§ 1)。其次，在"原本"分析的基礎上對含於其中的基礎給以批判(§ 2)。

接下觀察對改進"原本"的各種企圖：一方面，這是針對定義的改進和補充歐幾里得公理的總集 (§ 3)，而且他方面，是針對歐幾里得第

5公設的試證(§4)。最後還說明後人如何努力引導到羅巴切夫斯基的非歐幾何學的發現(§5)。

由於第一章還是起輔助作用的,我認爲把歷史上試證歐幾里得第5公設的一切主要資料(包括與這公設等價的命題)隸屬於現代公理法之下是合理的,而把它們放在第三章之末。

以下幾章中在適合於現代公理法的要求這種精神下(包括公理的相容性、獨立性和完備性的研究),在對應的公理法的基礎上敍述絕對幾何、歐幾里得幾何和非歐幾何的構造。由於主張運動的概念在心理上比符合的概念早存在(正如波恩加賚❶所指出,這不是反過來的),我放棄希爾伯特的符合公理,而導入和它邏輯等價的運動公理。這樣一來,因爲所取的基本概念是運動而不是符合,我認識到進一步的幾何構造是接近於羣的觀點的構造,就是把幾何看做羣與物的機構。如所週知,這觀點發端於克來因(埃爾蘭根的計劃❷),而是被認爲最有成果的(嘉當著作❸)。

在所論目標中根據這學科的本性,邏輯的因素是迫切地要求自身的歷史材料與方法論中的說明。因爲目標特別複雜,在教本的限定範圍內搞好這種教程是頗不容易的。我僅僅指出一點:在充分抓住幾何學基礎的現代計劃的努力下,如本書還能較爲易讀,那就算達到目的了。

除了著名的經典文獻外,本書中採用卡剛教授和古列維奇教授的幾何學基礎的敍述體裁。從這些著作挑選了一系列定理的證明。

關爾莫果洛夫院士和拉雪夫斯基、雅諾夫斯卡婭、斯傑巴諾夫、布察金教授對本教程的改進提了許多意見和指示,著者以愉快的心情向他們表示熱烈的感謝。

---

❶ 波恩加賚,關於希爾伯特著作的評論,列入俄譯的希爾伯特著書"幾何學基礎"。彼得格勒,1932年版,112頁。

❷ 克來因,最新幾何研究的比較評論(嘉桑大學物理數學會學報,2卷,1896)。

❸ 1937年在獲得羅巴切夫斯基獎金的第八國際會議上宣讀,由烏里揚諾夫·列寧名義的嘉桑大學嘉桑物理數學會刊載。

著者懷着深厚的謝意來追憶已故的格拉果列夫教授，他曾經化費了很寶貴的時間，愼重校閱本書初稿並提供一連串重要的意見。

最後必須提起出版者伯朗斯傑因的姓名。

著者　高爾基城。

第一章　歷史概要

§1. 歐幾里得以前的幾何

在著名的歐幾里得"原本"中，作出在我們之前最初的演繹地構成幾何學的嘗試，二千多年中它一直爲用嚴格的邏輯來述叙科學的典範。它自己是其前的多世紀的腦力勞動的創造性總結。爲說明在怎樣的基礎上發生了這古代希臘文化的優秀產物，我們首先簡單地觀察歐幾里得以前的古代數學家所做的工作。

歷史的情景遺留下來給我們的往往僅是它的殘缺的斷片，欲從此重建它的眞正姿態，那是非常困難，而有時完全不可能。幾何的起源想必在巴比倫和埃及。通過蒲羅克魯(希臘的歐幾里得評論家，後文將更詳細地談到他)，我們獲得古代著作的一個斷片；這是以下面的文章開始的："因爲此地我們有觀察科學和藝術根源之必要，所以指出，依據很多的實證，幾何是埃及人創造的且發生於土地測量。由於尼羅河汎濫，經常冲毁界線，這測量變成必要的工作。無可置疑的，這類科學和其他科學一樣，都發生於人類的需要。發生起來的任何知識總是從不完全走向完全。它起源於感性的感覺，逐漸變爲我們研究的對象而且最後成爲理性的財富"❶。

我們對於埃及數學的認識主要地是以兩本紙草紙書爲基礎的：其一是阿赫密斯（勒烏斯王的祕書❷）紙草紙書，屬於公元前 2000—1700 年時期且包含着關於面積及體積測量的算術和幾何課題。其二是莫斯科的紙草紙書❸。

---

❶ 這些句子是亞里斯多德派哲學家歐金·羅道斯科所寫的（參照卡剛，幾何學基礎第二卷）。

❷ 阿赫密斯紙草紙書有下列的稱呼"如何達到藏在對象中的一切黑暗的東西、一切祕密的東西的指南"。

❸ 莫斯科的紙草紙書的名稱並不知道，因爲其中缺少了卷首。

從這些紙草紙書內容的研究曾經導出下述的埃及幾何的情況，埃及人已能決定矩形、三角形和梯形的面積，並且他們的決定方法是和現在相同的。他們所採用的圓的面積等於一邊是直徑之 $\frac{8}{9}$ 的正方形面積，這相當於近似值 $\pi=3.1605$。又埃及人曾經知道直角三角形的各角是決定於兩直角邊之比的，就是實質上掌握了相似圖形的概念。他們取了單位長度的一邊的正方形面積作爲面積的單位。埃及數學家的最光輝的成就之一是關於以兩正方形爲底的缺頂棱體體積的正確公式：

$$v=\frac{1}{3}h(a^2+ab+b^2),$$

但 a, b 是兩底的邊長，h 是其高（莫斯科的紙草紙書中的公式）。

埃及人曾否知道以畢塔哥拉斯定理爲名稱的定理，他們曾否利用邊長 3，4，5 的繩三角形來作直角（大概是由康脫所流傳，並且廣泛傳播在許多中學幾何教本中的傳說），那是不能斷定的。

最近研究的結果，指出巴比倫人在幾何範圍內與已形成的觀點相反，決不亞於埃及人；此外巴比倫人還用了包有代數的萌芽的方法解決許多問題。

這些研究也表明了，舊的觀點即把希臘前的數學看作爲依靠實驗方法所導出的方案的集成，因而含着大的錯誤，那是不正確的❶。

幾何知識的更進一步的發展和希臘相聯繫。在希臘比較地短時期內（公元前第七到第三世紀），幾何在法列斯、畢塔哥拉斯、傑謨克里特、柏拉圖、歐道克斯等哲學派之中，開始成爲理論的科學，以高度抽象性爲其特點的。

❶ 實際上難以承認像缺棱體體積公式一類的複雜公式，在幾何範圍內，似乎可以繁重理論的工作也會求得的看法，加之，留到我們的一共只有二本上述的有關數學的原文，而又是狹窄應用性質的；我們不可能從它們獲得關於當時數學的共同特點的正確判斷。"依它們來重建一切的埃及數學的面目，其錯誤正好像我們要從兩本不好的商業算術教本來重建現代數學的面目一樣"。——魏果茨基。

幾何發展的希臘時期的開始普通是與希臘科學和哲學的元祖——密列脫城的哲學家法列斯的名字分不開的(公元前635—548年)。在幾何範圍內一些發見如半圓的弓形角是直角,對頂角相等,等腰三角形的兩底角相等,都是歸於他的(例如蒲羅克魯就是這樣看的)。法列斯還知道三角形是決定於一邊和其上兩角的;以這爲根據,他已經能夠對不可接近的物體用它的影子和對它的距離來決定它的高度。

可是,借蒲羅克魯的話來說,只有畢塔哥拉斯學派即生活在公元前570—471年的畢塔哥拉斯的繼承者"才賦予幾何以現代科學的品質。這是由於畢塔哥拉斯以高的觀點觀察了幾何的原理,並且用更理性的而非物質的方式研究了他的定理;此外他還發見了無理數和宇宙圖形❶的構造"。

下面的一些發見是歸於畢塔哥拉斯派的:(1)關於三角形角和的定理;(2)把平面分成正多角形(正三角形、正方形及正六角形)的分劃法;(3)二次方程的幾何解法(面積的應用);(4)與一已知多角形等積且與另一已知多角形相似的多角形作法;(5)不可通約的線段的存在;(6)宇宙體(正多面體)的五個類型的存在;(7)畢塔哥拉斯的定理;(8)圓和球的極値性。

在這個最後發見中可以找出關於等周問題研究的萌芽。

不可通約數量的發見屬於畢塔哥拉斯的學生希派斯,這在畢塔哥拉斯學派中好像喚起了危機。在這發見之前,他們或許是從這樣一個假說做根據的,即兩個任何線段之比可以表示做兩個整數之比。爲企圖彌補線段比較論,畢塔哥拉斯的學生們很可能做過一個假設:不可通約的線段具有無限小的共同尺度,即和點恆等的最簡單原素。畢塔哥拉斯的學生們也利用這些純數學理想點作爲實體世界的原素。關聯於不可通約數量的各種困難後來爲歐道克斯的聰敏的比例論所克服(參照下文)。

❶ 這是古代對正多面體的稱呼。

傑謨克里特（大約公元前470—370年）是多方面的能人。亞里斯多德關於傑謨克里特曾經說過，他"思考過一切而且分析過一切"（他著述着哲學、數學、物理學、工程學、氣象學、動物學、美學及其他）。傑謨克里特把原子與眞空的集合認作世界的根本基礎，而這些原子在眞空裏經常運動着。傑謨克里特的原子或"不可分的物"就是物質原素，它不能再分，但同時有一定的極小的廣度。因此，如果畢塔哥拉斯的學生們的不可分物是沒有長度非物質的點，那末傑謨克里特的不可分物是有寬度的物質的原素。如數學史所明示的，傑謨克里特的觀點在幾何裏起了很重要的作用。以不可分物的方法，傑謨克里特發見了關於稜體和錐體的體積定理。藉助於不可分物亞基默德發見了關於面積及體積的一連串定理。笛卡兒、伽利略、嘉瓦勒里、帕斯嘉爾等或多或少都採用了傑謨克里特的不可分物。因此，爲無限小量的計算的發見準備了基礎❶。

在柏拉圖（公元前429—348年）學派中，數學曾經受到特殊的尊敬。對哲學研究他認爲預先熟習幾何是必要的。傳奇式的故事說：在柏拉圖所設的學院入口他寫了一句："別讓不懂幾何的人入內"。可能部分地說明着這一點，但這是千眞萬確的，他對數學表示了特別興趣❷且以堅決的態度勸告學習數學。大概正是受着柏拉圖的影響，在公元前四世紀後的古代時期中以及後來羅馬時代一定程度地精通歐幾里得"原本"成爲完善的古典教育中的必要因素。

大家都相信，關於地球、月球和太陽的球形學說是屬於柏拉圖的；其根據好像是在於：球面是最完全的幾何圖形。

可是柏拉圖在幾何園地上的基礎業績不僅在於他發明了那些具體的定理（他的繼承者把一切都歸於柏拉圖，這自然是可疑的），而更多地

❶ 關於此地所提到不可分物的知識希望熟悉其內容者可參照羅勒著"古代原子論者的無限小論"，蘇聯科學院1935年版。

❷ "國家"，VII。

在於他傳給自己學生的許多有效的推動力。如著名的數學史家希別爾克所說,"首先可以肯定地說,爲使初等數學的系統建設具有精密性和邏輯善美性,他(柏拉圖)的邏輯教學有了很大的幫助,而這兩種性質始終成爲數學的特色。此外,從一些定義和幾個前提毫無缺陷地開展任何系統,這無疑地是要歸功於柏拉圖的"。

但是,作爲在哲學中戰鬬着的大思想家的柏拉圖,卻對傑謨克里特的唯物論揭起猛烈的鬬爭(如所週知,列寧在傑謨克里特路線與柏拉圖路線的鬬爭中認識到古代哲學源流的主要鬬爭)。特別地,柏拉圖起來反抗傑謨克里特的不可分物並且禁止它在數學上的應用,因而阻擋了它的發展。其特點是(如亞奇默德在他的著作"逸福德"中關於這點所斷定的):古代數學家內部也就是說,非正式地並非爲了發表而開始找尋在傑謨克里特的原子道路上某些問題的解答而且其後只好用歸謬法即引到與其他假設相違背的情況探求證明法。

歐道克斯(公元前 410—356 年)是空前的創造者、權威的醫生、天文學家、數學家和機械學家。在數學領域裏比例論的創作與他的名字相聯繫,後來歐幾里得在這理論的基礎上以當時最大可能的嚴密方式敍述了幾何。所以歐道克斯的名字可以說是當時數學的奠基者。

與歐道克斯的名字相聯繫的第二個基本發見是取盡法(第十七世紀才有它的命名)。這方法和他的比例論有密切的關聯且是以下面的假設做基礎的:"如果從某數量拿掉一半或更多部份且對剩下的部份施行同一手續,並同樣地一直進行下去的話,那末可以獲得這樣數量使它比任意給予的一數量還要小些"。歐道克斯應用反面的討論而獲得稜體、錐體和球的體積量法。

歐道克斯的學生麥尼漢爲鑽研二倍立方體問題達到圓錐曲線的發明,這方面的理論後來爲阿破勞尼所詳細地發展而刊載於他的八本著作(現在只剩下七本)中敍述它。

古代著名的哲學家,形式邏輯的創立人亞里斯多德(公元前 384—

018-27C,

322年)除了從事於自然科學外,還分身致力於數學。歷史證明了亞里斯多德推動數學發展;和他同時代的數學家沒有一個不置身於他的學派之中的。他本身在幾何領域内卻並沒有什麽具體工作。

由此可見,希臘數學的發展是與哲學在密切協力中進行的。"這樣一來,數學與哲學以本身的和平關係,也以本身紛爭相互受着影響。由此,數學變成了希臘文化發展的一因素,而在這時候代數學的科學所被着的形式最有憑據地指出了,這些因素是在力求以完全精確的方式表達的精細的思想家中間發展起來的"❶。

因此,近公元前第三世紀希臘哲學派中的幾何已經達到了高度抽象性。此外,幾何一般是與實用問題分開的。羅馬歷史家勃魯達爾克斯寫着:"……力學作爲研究和讚揚的目標,是歐道克斯和亞希脫的發明。他們曾經希望以某種方法來闡明幾何(給幾何以外部的裝飾)且把依論理和科學證明難以解決的一些定理放在感覺和物質對象的基礎上……可是不久柏拉圖很不滿意地責備他們,說他們破壞了幾何,剝奪它的優點,把它變成奔走的奴隸,把它與非物質的和智的東西隔離開來而轉向可感覺的對象,並且除了理性外求助於奴隸式地由手的勞動所創造出的物體"。

如此繼續到亞奇默德(公元前287—212年),在增長着的生活的需要影響下,在他的手中,數學已得到了應用的方向。

這樣一來,從公元前第七世紀到第三世紀希臘幾何集中了豐富的實際材料。它的系統化的必要性卽把它整理在邏輯系統中的必要性業已成熟了。

蒲羅克魯指出,希波克臘特·熊斯基、列昂、費奇·馬格湼奇斯基、齊爾諛丁·果羅芳斯基及其他都着手過解決這個問題,可是當不朽的著作——歐幾里得的"原本"或"原素"出現的時候,他們的作品一概被人們所遺忘了。如借同一的蒲羅克魯的話來說,"原本"中"搜集了原

❶ 傑廈,古代及中古數學史。

素，把歐道克斯的許多發見整理成恰當的順序，補充所創始的東西並且把以前尚未滿意地證明過的一切事實嚴密證明了。”

沒有一本科學書籍像歐幾里得“原本”享有這樣鞏固而長期的成功。從 1482 年以來它以各國語言出了 500 版以上。

§2. 歐幾里得“原本”

關於歐幾里得（大約公元前 330—275 年）的生平幾乎是不明的。在“原本”和他的其餘保存下來的著作裏面從來沒有提到著者。僅僅確實知道他是柏拉圖派的學生並且在勃托列密Ⅰ年代的亞歷山大教過數學。

龐大的科學資料的系統化不是機械的工作——它需要領導的科學原理，這些原理還有必要以已走更廣泛的思維領域——認識論來作根據。可以斷定，“原本”的述敍在哲學的見解下是依照亞里斯多德的建設科學的原理。亞里斯多德在他的第一和第二“分析學”（第一包括推理理論——三段論法，而第二包括科學的證明論）曾經發展這原理。如果考慮到幾何是和哲學密切合作而發展起來的，並且歐幾里得本身是屬於柏拉圖學派的，那末上面的事實就不足爲奇了。首先“原本”本身的構造就肯定着這事實。

依據亞里斯多德（亦可依據柏拉圖），科學是立脚於爲說明現象的必要聯繫的原因的認識。任何科學的命題都可從必要的前提（假設）裏面經過推理的鎖鏈且用亞里斯多德所製訂的方法推論出來的[1]。

追隨柏拉圖和亞里斯多德之後，歐幾里得可能已有必要抽出主要的幾何概念——類別（亞里斯多德把它一般分成 10 樣即物、量、質、關係、地點、時間、位置、狀態、行動、苦難），形式化爲公理，於是在這基礎上嚴密邏輯地推論出幾何的一切內容。但是，如我們今天所看到的，

[1] 參照 Г. Ф. 亞歷山特洛夫，Б. Э. 伯霍夫斯基，Н. Б. 密青，П. Ф. 尤金等編輯的“哲學史”第一卷，ОГИЗ，1941，204-230 頁。

他未曾圓滿地實現這理想，並且事實並不由於這理想是太繁雜的，而是由於當時初等幾何的建築離開完全狀態尙遠。可以肯定地說，連續概念、運動及其他基本的重要問題當時剛在起來。

歐幾里得"原本"的基礎構造是定義、假設和公理的系統。第一卷是以 35 定義❶、五假設和五公理開始的。現引證於次。

定義

1. 點是沒有部份的❷。

2. 線是有長度而沒有寬度的。

3. 線的各端是點。

4. 直線是關於它的任何點一樣地放置着的。

5. 面是只有長度和寬度的。

6. 面的端緣或邊緣是線。

7. 平面是關於它的任何直線一樣地攤放着的。

8. 平的角度是一平面上相交而不在同一直線上的二直線的相互傾斜。

9. 當形成一角度的兩線是一直線的時候，那角度稱爲平角。

接下去的 25 定義(10—34)是關於直角和垂線，鈍角和銳角，圓，圓周和中心；直線形，三角形，四角形，等邊、等腰和不等邊三角形，正方形，直角三角形，菱形及其他。

最後，末了的定義是以後具有重大意義的，它是：

35. 平行直線是在同一平面上而且儘管向兩側延長也決不相交的直線。

假設

要求下面的一些事項：

❶ "歐幾里得預先寫下這許多定義，決不是像辭彙一樣的。原來歐幾里得進行工作，好像鐘錶工人或其他技工給學徒介紹自己技術的工具一樣地進行的"(蘭佩爾)。

❷ 如用其他譯語，便是：點是一個部分也不會有的。

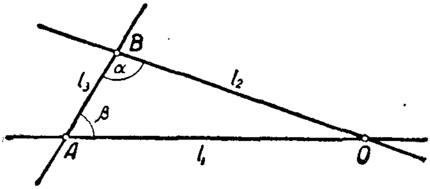

圖 1

1．從每一點到另一點可引直線。

2．有限的直線可以無限延長。

3．從任何中心可用任何半徑畫圓周。

4．所有的直角是相等的。

5．若兩直線和第三直線相交且在同一側所構成的兩個同側內角❶之和小於二直角，則把這兩直線向這一側適當地延長之後一定相交。

公 理

1．各與同一第三個相等的兩個也一定相等。

2．若相等的加上相等的，那末整個也相等。

3．若從相等的減去相等的，那末所獲的差也相等。

4．互相重合的一定相等。

5．整個大於部份。

讓我們分析一下歐幾里得的這些定義，便可指出：他採用了部份、長度和寬度等概念作爲基本（原始）的概念。他利用了這些來定義點、線和面，於是下了直線和平面的定義，作爲對應於線和面的特例的概念。這樣對基本概念的選擇並不是偶然的。

事情是這樣的：長度和寬度的概念歷史地說來是在點、線和面的概念之先。我們曾經說過，幾何原是發生於地段測量的需要，而且最初它和測地學是一致的。用繩子、鎖鏈或自己的步伐來量長短曾是主要的手續。從這些測量通過抽象化導引到長度的概念。爲制定地段的"點的"境界，除了其他要求外，更需要限界的狹窄，從而導引到沒有寬度的線的概念。用水準器（繃直的線）來做地段的分割，在太陽光下的觀察，

❶ 參閱圖 1。