嵇耀明

CHANG YONG SHU LI TONGJI

常用数理统計

浙江人民出版社

常用数理统计

嵇 耀 明

浙 江 人 民 出 版 社

常用数理统计
稽耀明
著
浙江人民出版社出版
（杭州武林路196号）
浙江新华印刷厂印刷
（杭州环城北路天水桥境）
浙江省新华书店发行
开本787×1092 1/32 印张9.75 插页2 字数232,000
1982年10月第一版
1982年10月第一次印刷
印数：1—6,500
统一书号：7103·1217
定价：0.88元

编者说明

本书是概率论与数理统计入门的简明读物。它介绍了概率论的基础知识以及最基本的数理统计思想和最常用的数理统计方法。为便于初学者学习，前面先简要地介绍了若干准备知识，后面则简明地叙述了现代质量管理中统计质量管理（质量控制与抽样检验）的思想方法，以适应实际工作的需要。全书有关内容不强调系统全面深入的阐述与理论上严格的证明，而是注意多举各种实例以便初学者借鉴应用。本书曾作为中等职业学校中概率论与数理统计课程的教材试用过，具有相当高中文化程度和微积分初步知识的读者即可阅读。

全书共六章，各章所需教学时数大致为：第一章10学时，第二章14学时，第三章 4 学时，第四章14—18学时，第五章 6—8 学时，第六章12—16学时，共约60—70学时。某些章节和例题可根据实际需要选用。除第六章外，每章均配有相应的习题，并附有答案和提示。

内 容 提 要

本书是为初学数理统计者编写的简明读物。全书简要地介绍了排列、组合与概率等有关知识，常用的估计、统计检验与回归分析，以及使用各个方法时应注意的事项，并举有多种实例，最后还介绍了常用的现代质量管理与抽样检验方法。

本书可作为职业学校的数理统计教材，和供在职干部自学或培训班教学参考；企业管理与经济管理人员、试验室工作人员、中学教师等也可参考。

目 录

绪　论

在人类的实践活动中，为了研究某些大量同类的社会现象和自然现象的数量特征和内部隐藏着的规律性，人们常常用这样的研究方法：首先对所研究现象的全部或一部分进行观察（试验），搜集所观察（试验）现象的有关资料；其次将所搜集的资料加以整理、分析、计算；最后得到一些可以说明所研究现象的数量特征和规律性的数字．这种运用归纳推理[1]的研究方法就是统计研究方法[2]．而用这种研究方法所得到的说明全体现象数量特征和规律性的数字就叫做统计数字．

用统计数字来说明现象的数量特征和规律性的实例是很多的．在我们党和政府所发布的各项会议公报和文件中，经常应用简明的统计数字，来生动而深刻地阐明我国社会主义革命和建设事业的伟大成就和发展规律．在国民经济各部门中，在科学技术各个方面，特别是在各门自然科学中，用统计数字来说明大量同类现象的数量特征和规律性更是屡见不鲜．用统计方法研究人口调查、社会保险以及生物的生长发育、遗传变异等方面已有很多年的历史了．农业上各种田间试验的分析、比

---

〔1〕归纳推理就是从某一具体的事物推论到一类相似事物的全体，这种从个别到一般的推理方法．它是社会科学与自然科学中探求新知识的一种方式。

〔2〕“统计”一词最初源于十八世纪初期拉丁文中的Status，其含意是“情况”．它当时所表达的意义十分狭窄，只是说明一些国家的政治情况．直到十八世纪末叶以后才流传开来，它的内容也随之日益丰富和实用起来。

较、鉴别甚至设计也日益广泛用统计方法来进行了.近代物理、化学的发展和其他新学科的崛起，更是大大丰富了统计方法的内容. 随着工业生产的标准化和自动化，统计方法又被广泛用于研究产品的质量管理和检查，并且实践证明，使用统计方法是能够有效地提高产品质量、降低成本和改进企业管理、提高工作效率的. 同时针对各个领域中很多特殊的实际问题，运用统计理论去构造一个与实际问题相符合的数学模型，并用数学方法去分析这个模型就能设计出处理这个问题的程序. 因此数理统计学还能提供一系列决策的工具. 近年来，电子计算机的广泛应用和计算技术的迅速发展，统计方法的内容不但因其应用范围日益扩大而更加丰富，而且一些新兴学科如运筹学、信息论、自动控制理论等用了统计方法而日臻完善.

由此可见，统计概念已经对人类活动的几乎各个方面给予巨大的影响，它已经发展成为一门科学. 统计研究方法已经成为我们研究客观现象的数量特征和规律性的一种重要研究方法. 然而应该指出：研究某些客观现象，使用统计方法是重要的，甚至是必要的；但是我们不能把它看成解决一切现象的最高手段，而忽视客观现象所属科学范畴的特定研究方法和理论，甚至企图用数学公式来代替客观现象的自然规律. 统计方法的应用只是研究客观现象的一种辅助手段，它必须建立在对客观事物本质的认识的基础上，结合这些现象的自然规律和有关学科的理论来进行研究. 同时，不同的现象有着不同的性质和特点，因此在研究它们的数量特征和规律性时，我们需要应用不同的统计研究方法.

统计研究方法的分类大体有两种. 一种是按统计研究方法的内容分成两大类：（1）描述统计学，研究简缩数据（资料）和描述这些数据；（2）推断统计学，研究利用数据去

作出决策的方法，即根据部分（数据）去推断一般的情况. 另一种是按它所研究的对象的性质分成两大类：（1）社会经济统计学，阐述研究社会经济现象的数量特征和规律性的统计研究方法及其理论的科学，也简称为统计学. 它主要是如何全面及时地搜集所研究的社会经济现象的有关资料，并整理、计算、分析这些资料，从而作出正确的结论. 这是一门社会科学. 例如工业统计学、农业统计学、贸易统计学、交通运输、文化教育、基本建设等方面的统计学都是属于这一类的.（2）数理统计学，它主要讨论如何应用数学原理和方法，根据所研究对象的全部数字资料中的一部分资料去推断全部对象的数量特征和规律性. 这是扎根于概率论的应用数学的一个分支. 例如在力学、物理、化学、天文、气象、水文、地质、生物、工业技术等方面所应用的统计研究方法都是属于这一类的. 由于它的研究对象——大量的随机现象在自然界中是广泛存在的一类现象，因此概率论与数理统计的概念和方法具有极其普遍的意义和非常广泛的应用，应该很好地掌握它，并使之更好地为实现四个现代化服务.

第一章 概率的基本概念

§1 预 备 知 识

本节首先简单地介绍排列、组合与集合的概念及其有关的运算方法，为学习概率论做准备.

一、排列

先看一个例子.

【例1】 把三个不同的球 a、b、c 每盒一球地依次放入三个盒中，可以有几种不同的放法？

我们知道，在第一个盒中，可以从 a、b、c 三个球中任选一个，故有三种不同的放法；第二个盒中只能从剩下的二球中任选一个，所以有两种放法；而第三个盒中只能放最后剩下的一球，所以只有一种放法. 因此，共有 $3\times2\times1=6$ 种不同的放法. 这六种不同的放法为

$$
\begin{array}{l}
\{a \mid b \mid c\} \\
\{a \mid c \mid b\} \\
\{b \mid a \mid c\} \\
\{b \mid c \mid a\} \\
\{c \mid a \mid b\} \\
\{c \mid b \mid a\}
\end{array}
$$

在数学上，我们把考察的对象，如上例中的球 a、b、c 叫做**元素**. 上述问题就是把三个不同元素排成有次序的一列，问共

有几种不同的排法?

对于 n 个不同的元素，排成有次序的一列，叫做 n 个不同**元素的全排列**. n 个不同元素的所有不同的全排列的种数叫做 n 个不同元素的全排列数，通常用 P_n 表示. 例 1 的结果可写成 $P_3=6$.

我们用不同的球表示不同的元素，n 个盒子的顺序表示排列的次序，则 n 个不同元素的全排列就相当于把 n 个不同的球，每盒一球地依次放入 n 个盒中. 因此可以仿照例 1 导出 P_n 的计算公式.

从 n 个元素中任取一个元素，排列在某一序列中第一个位置上，这种选择有 n 种方法；当第一个位置上的元素选定后，又从剩下的 $n-1$ 个元素中任取一个元素排列在第二个位置上，这种选择有 $n-1$ 种；如此继续，直到最后一个元素排列在第 n 个位置上，只有一种方法. 于是

$$P_n=n(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1=n! \tag{1.1.1}$$

"$n!$" 读作 "n 阶乘".

现在我们一般地来讨论从 n 个不同元素中任取 r 个 ($0\leqslant r\leqslant n$) 元素排成有次序的一列的所有不同种数 A_n^r，这就是排列问题. 它相当于把 n 个不同的球中取 r 个球每盒一球地依次放入 r 个盒中.

先设 $0<r\leqslant n$. 这时，每一个排列由在 r 个有次序的位置上各放上一个元素所组成. 第一个位置上的元素有 n 种不同的取法；在它取定后，第二个位置上的元素只有 $n-1$ 种不同的取法；在前两个位置上的元素取定后，第三个位置上的元素只有 $n-2$ 种不同的取法；如此继续，最后在第 r 个位置上的元素只有 $n-(r-1)=n-r+1$ 种不同的取法. 因此所求的排列种数为

$$A_n^r=n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1), \tag{1.1.2}$$

或改写为

$$A_n^r=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)(n-r)(n-r-1)\cdots3\cdot2\cdot1}{(n-r)(n-r-1)\cdots3\cdot2\cdot1}=\frac{n!}{(n-r)!}.$$

当 $r=0$ 时，可以认为只有一种排列．而 $r=0$ 时

$$A_n^0=\frac{n!}{(n-0)!}=\frac{n!}{n!}=1.$$

因此，当 $0\leqslant r\leqslant n$ 时，我们恒有

$$A_n^r=\frac{n!}{(n-r)!}. \tag{1.1.3}$$

【例 2】 计算从十个不同元素中任取四个元素的排列数 A_{10}^4．

【解】 $A_{10}^4=10\cdot9\cdot8\cdot7=5040$.

【例 3】 从 1、2、3、4、5、6、7、8、9 这九个数字中任取三个不同的数字组成的三位数中有几个是奇数？

【解】 要使所得的三位数是奇数，它的个位上应是 1、3、5、7、9 中的一个．因此，放在个位上的数有五种不同的取法．而在十位和百位上的数共有 8×7 种不同的取法．从而所求奇数的个数为

$$5\times8\times7=280.$$

二、组合

设有 n 个不同的元素．从它们中间任取 r 个构成一组 $(0\leqslant r\leqslant n)$，不考虑构成一组的 r 个元素的次序，每一个这样的组称为一个组合．求可能得到的不同组合数，常记为 C_n^r，这就是组合问题．相当于 n 个不同的球，每盒一球地放入不计排列次序的 r 个盒中．

组合问题与排列问题的不同之处在于排列问题要考虑取得元素的前后次序，而组合问题不考虑这种次序．如例 1 中尽管

构成排列的元素都是a、b、c，但$\{a,b,c\}$与$\{a,c,b\}$，…，$\{c,b,a\}$中元素排列的次序不同，就要作为不同的排列．而作为组合来讲，只要构成组合的元素相同，$\{a,b,c\}$与$\{a,c,b\}$，…，$\{c,b,a\}$就不加区别地作为相同的一个组合．

我们已经知道，从n个不同元素中，任取r个元素的排列数为$A_n^r=n(n-1)\cdots(n-r+1)$．而按组合问题的要求，由取定的$r$个不同元素组成的各种排列，只能算是同一个组合；而把r个不同元素进行全排列的种数为$P_r=r!$．因此，上述$n(n-1)\cdots(n-r+1)$种排列中每$r!$种只是一种组合，从而

$$C_n^r=\frac{A_n^r}{P_r}=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}=\frac{n!}{(n-r)!\,r!}. \qquad (1.1.4)$$

按C_n^r的定义，有

$$C_n^{n-r}=\frac{n!}{[n-(n-r)]!\,(n-r)!}=\frac{n!}{r!\,(n-r)!}=C_n^r,$$

即

$$C_n^r=C_n^{n-r}. \qquad (1.1.5)$$

因此当r接近于n时，可以利用（1.1.5）把C_n^r化为C_n^{n-r}来计算．

【例4】 有四册英语书和八册数学书．从中任取两册英语书和五册数学书，问有几种不同的取法？

【解】 从四册英语书中任取两册，有

$$C_4^2=\frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}=6$$

种不同的取法．从八册数学书中任取五册，有

$$C_8^5=C_8^{8-5}=C_8^3=\frac{8\cdot7\cdot6}{1\cdot2\cdot3}=56$$

种不同的取法. 因此所求不同取法的种数为

$$C_4^2\cdot C_8^5=C_4^2\cdot C_8^3=6\times56=336.$$

【注】 (1.1.4)可用来展开 $(a+b)^n$，这就是二项式展开定理：

$$(a+b)^n=C_n^0a^nb^0+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots$$
$$+C_n^{n-1}ab^{n-1}+C_n^na^0\cdot b^n.$$

当 $a=b=1$ 时，我们就得到

$$2^n=C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^{n-1}+C_n^n. \qquad (1.1.6)$$

三、集合

数学中时常会遇到具有某种特定性质的事物所组成的集体，我们称这种集体为集合，简称为集，通常用大写拉丁字母 A, B, C……等来表示. 组成集合的各个事物称为集合的元素. 通常用小写拉丁字母 a, b, c,……等来表示. 如果集合 A 是由元素 a_1, a_2, ……等组成，则记作 $A=\{a_1, a_2, \cdots\cdots\}$. 用{}来表示 a_1, a_2, ……等放在一起看成一个整体，这种加上括号表示集合的方法，有时使用很方便，因此以后将经常引用. 如果 x 是集合 A 的一个元素，则记作 $x\in A$，读为"x 属于A". 如果 x 不是集合 A 的一个元素，则记作 $x\overline{\in} A$，读为"x 不属于 A". 例如，某校一年级学生的全体是一个集，该校每一个一年级学生就是这个集的一个元素；某本书中文字的全体是一个集，该书中每一个文字就是这个集的一个元素；某工厂在某段时间内生产的产品全体是一个集，每件产品就是此集的一个元素；这些产品中正品的全体（或次品的全体）也是一个集，这些产品中每件正品(或次品)就是此集的一个元素；有理数的全体是一个集，实数全体也是一个集；$ax^2+bx+c=0$ 的根的全体是一个集，满足 $ax^2+bx+c\geqslant0$ 的 x 的全体也是一个集. 一般地，用

$\underset{x}{E}[x: p(x)]$ 或 $\underset{x}{E}[p(x)]$ 来表示，满足条件 $p(x)$ 的事物 x 的全体所组成的一个集. 例如 $p(x)$ 表示“数 x 的平方等于 1”，则 $E[x: p(x)]$ 就是由 -1 和 1 这两个数组成的集合 $\{-1,1\}$. 如果 $f(x)$ 是在某一集合 G 上定义的一个实函数，则 $E[x: f(x)>a]$ 就是表示 G 中所有使 $f(x)$ 大于 a 的 x 所组成的一个集合.

值得注意的是在讨论集合时，重复的元素是作为一个元素的. 例如把 $\{1,2,2,3\}$ 与 $\{1,2,3\}$ 是看作同一个集合的.

如果一个集合中只有有限多个元素，那末称这个集合为**有限集**. 如果一个集合中有无限多个元素，那末称这个集合为**无限集**. 特别地，如果一个无限集中的诸元素能与全体自然数建立一一对应关系，那末称这个无限集为**可数集或可列集**. 例如 $\{1,2,3\}$ 是以三个数 1，2，3 为元素的有限集，$\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots\cdots\right\}$是以数$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，……为元素的可数集. 全体实数组成一个无限集，区间 (a,b) 即满足 $a<x<b$ 的实数 x 的全体组成的集合也是一个无限集.

组成集合的元素不一定是数. 例如平面上一个区域 D 中的全部点组成一个集合，区域 D 中的每一个点是它的元素；数轴上全部区间组成一个集合，数轴上每一个区间是它的元素；定义在区间 (a,b) 上所有连续函数也组成一个集，它的元素就是定义在 (a,b) 上的任意一个连续函数，等等.

设 A 与 B 为两个集合. 如果它们是由同样的一些元素组成的，则称 **A 和 B 相等**，记作 $A=B$. 例如 A 是由 -1 和 1 两个数组成的集合，B 是由方程 $x^2=1$ 的根所组成的集合，则 $A=B=\{-1,1\}$. 如果属于集合 A 的任一元素都属于 B，那末称 A 是 B 的**子集**，或者说 A 包含于 B，记作 $A\subseteq B$. 有时 A 包含于

B 也称为 B 包含 A，记作 $B \supseteq A$. 如果属于集合 A 的任一元素都属于 B，且 B 中至少有一个元素不属于 A，则称 A 是 B 的**真子集**，记作 $A \subset B$. 如图1.1.1. 例如某工厂在某段时间内生产的产品中所有次品组成的集合是所有产品组成的集合的子集. 全体有理数组成的集合是全体实数组成的集合的（真）子集. 区间（2，3）是区间（2，5）的（真）子集.

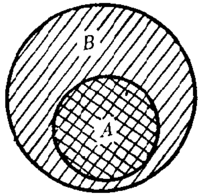

图1.1.1.

为以后讨论方便起见，把不含有任何元素的集合称为空集并记作 V. 空集 V 是任何一个集合 A 的子集，即 $V \subseteq A$.

容易明白，$A=B$ 等价于 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$. 而且对于任何三个集合 A、B、C，均有

(1) $A \subseteq A$；

(2) 若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq C$，则 $A \subseteq C$.

由属于集合 A 或属于集合 B 的元素全体组成的集合称为 A 与 B 的**并集**或**和集**，记为 $A \cup B$，即

$$A \cup B = E[x: x \in A \text{ 或 } x \in B] \qquad (1.1.7)$$

图1.1.2 中阴影部分表示 $A \cup B$. 例如 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{3,4,5,6\}$，则 $A \cup B=\{1,2,3,4,5,6\}$；区间 $(-\infty,3)$ 与区间 $(-3,5)$ 的并集为区间 $(-\infty,5)$；平面上坐标满足 $1<x<2$ 的点的全体组成的集合与坐标满足 $2<y<4$ 的点的全体组成的集合的并集为图1.1.3 中阴影部分（不包括边界直线 $x=1$，$x=2$，$y=2$，$y=4$）表示的集合. 又如某工厂某段时间生产的产品的全体组成的集合是产品

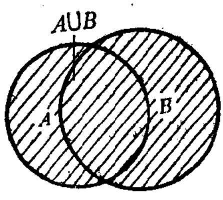

图1.1.2