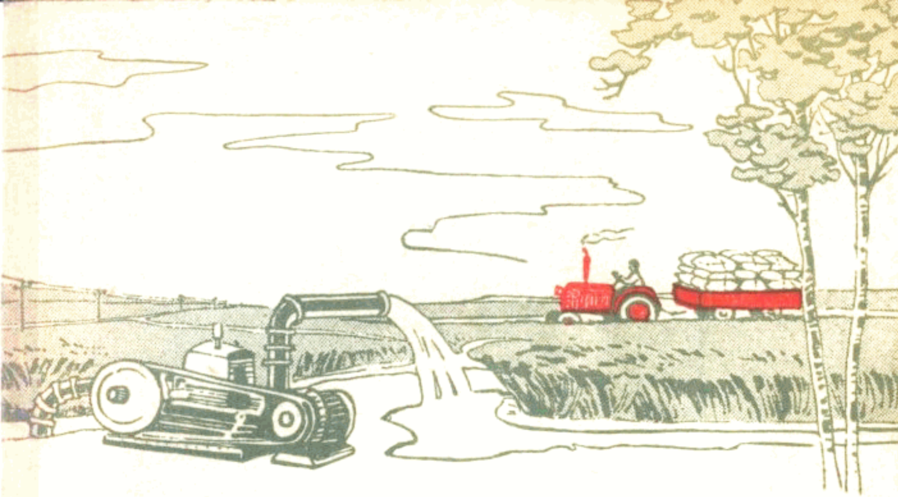


北京市初级中学试用课本

平面几何

第二册

北京市初级中学试用课本

平面几何

第二册

北京市教育局中小学教材编审处编

*

北 京 出 版 社 出 版

（北京东单麻线胡同3号）

北京市书刊出版业营业许可证出字第095号

北京市新华书店发行

京华印书局印装

*

开本：787×1092 1/32・印张：$7\frac{13}{16}$・字数：161,000

1962年3月第1版　1963年7月第2版第2次印刷

印数：88,001—164,500册

统一书号：K7071·535　定价：(2)0.41元

目　录

第五章　圓

I　圓的一般性質

68. 不在一条直綫上的三点确定一个圓　我們知道，經过两点能作一条直綫并且只能作一条直綫．这就是說，两点确定一条直綫．那么，几点确定一个圓呢？

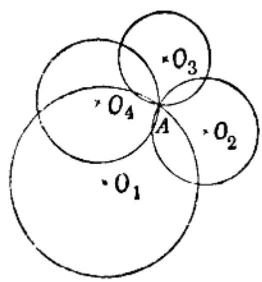


图 224

首先来研究过一点作圓的問題．設A是一个已知点(图 224)，可以看出，以其他任何一点为圓心，以这点和 A 点的距离为半径所作的圓都經过 A 点，所以經过一点能作无数个圓，并且这些圓的圓心可以任意选择．

其次来研究过两点作圓的問題．設 A、B 是两个已知点(图 225)，由于过 A、B 两点的圓的圓心到 A 和 B 的距离相等，所以这样的圓的圓心必定在綫段 AB 的垂直平分綫上；反之，在綫段 AB 的垂直平分綫上的任何一点到 A 和 B 的距离都相等．因此，以綫段 AB 的垂直平分綫上的任何一点为圓心，以这点到 A(或 B)的距离为半径所作的圓，都过 A

和 B. 由此可知，过两点也能作无数个圓，并且这些圓的圓心都在連結这两点的綫段的垂直平分綫上.

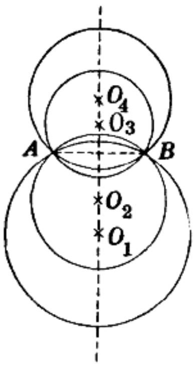


图 225

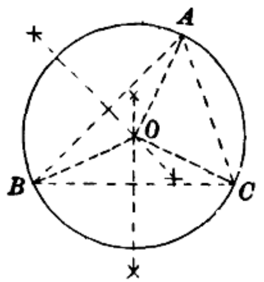


图 226

現在来研究經过三点能不能作圓，如果能作，可以作几个？

設 A、B、C 是不在同一直綫上的三个点(图 226)，連結 AB、BC 和 CA. 根据上面的分析可知：通过 A、B 两点的圓的圓心必在綫段 AB 的垂直平分綫上；通过 B、C 两点的圓的圓心必在綫段 BC 的垂直平分綫上. 設这两条垂直平分綫的交点为 O，并連結 OA、OB 和 OC，那么 $OA=OB$、$OB=OC$，所以 $OA=OB=OC$. 因此，以綫段 AB 和綫段 BC 的垂直平分綫的交点 O 为圓心，OA 为半徑所作的圓，一定通过 A、B、C 三点. 这就是說，过不在同一直綫上的三点可以作一个圓. 其次，因为过 A、B、C 三点的圓的圓心必在这两条垂直平分綫上，而这两条垂直平分綫只能有一个交点，所以这样的圓只能作一个. 由此可知：**不在同一直綫**

上的三点确定一个圓.

如果 A、B、C 三点在同一直綫上(图 227)，那么綫段 AB 的垂直平分綫和綫段 BC 的垂直平分綫平行，因此它們沒有交点. 所以，**过同一直綫上的三点不能作圓.**

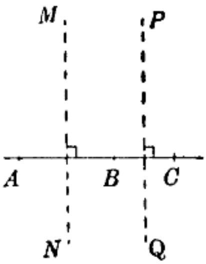


图 227

根据上面的討論可以看出：作圓的問題的关鍵，就在于确定圓心的位置和半径的长度. 一个圓的位置是由它的圓心的位置确定的，圓的大小是由它的半径的长度确定的，只有当圓心的位置和半径的长度都确定时，这个圓才能完全确定.

在图 226 中，三角形 ABC 的頂点都在同一个圓上，这个三角形叫做**圓的內接三角形**，而这个圓就叫做这个**三角形的外接圓.**

一个三角形的外心就是这个三角形的外接圓的圓心. 当我們作一个三角形的外接圓的时候，只要作出这个三角形任意两条边的垂直平分綫，就能确定圓心的位置.

69. **弧的相等和不等** 把同圓或者等圓(就是半径相等的圓)中的一条弧放到另一条弧上，如果它們的两个端点能够分别重合，这两条弧就叫做相等的弧. 例如把$\odot O$ 中的$\overset{\frown}{AmB}$ 放到 $\overset{\frown}{CnD}$ 上(图 228)，使 A 和 C 重合，并且

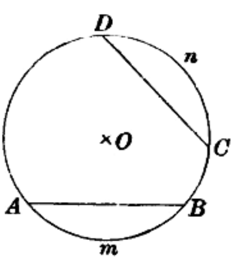


图 228

使 $\overset{\frown}{AmB}$ 順着 $\overset{\frown}{CnD}$ 落下，如果 B 和 D 也重合，这两条弧就相等。如果 B 和 D 不重合，这两条弧就不相等。这时，如果 B 点落在 $\overset{\frown}{CnD}$ 上，那么 $\overset{\frown}{AmB}<\overset{\frown}{CnD}$；如果 B 点落在 $\overset{\frown}{CnD}$ 外，那么 $\overset{\frown}{AmB}>\overset{\frown}{CnD}$。应該注意：不是同圓或等圓的两条弧，我們不能比較它們的相等或不等。

70. 垂直于弦的直径 关于弦和直径間的关系，有下面一些定理：

定理 垂直于弦的直径平分这条弦，并且平分这条弦所对的两条弧。

已知：在⊙O 中，DE 是直径，AB 是弦，$DE\perp AB$，交 AB 于 C（图 229）。

求証：$AC=BC$； $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}$，$\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{BE}$。

証明：連結 OA、OB，那么 $OA=OB$。因为垂直于弦 AB 的直径 DE 既是等腰三角形 OAB 的对称軸，又是 ⊙O 的对称軸，所以，当把圓面沿着直径 DE 折迭起来时，

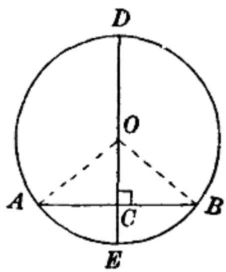


图 229

左面的半圓就和右面的半圓重合，A 点和 B 点重合，AC 和 BC 重合，$\overset{\frown}{AE}$、$\overset{\frown}{AD}$ 分别和 $\overset{\frown}{BE}$、$\overset{\frown}{BD}$ 重合。因此，$AC=BC$，$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}$，$\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{BE}$。

定理 过弦（不包括直径）的中点的直径垂直于这条弦，并且平分这条弦所对的两条弧。

在上面的定理中我們已經証明，如果直径 DE 垂直于弦 AB，那么垂足 C 就是 AB 的中点（图 229）。但是 AB 的

中点只有一个，所以通过 AB 的中点作直径必定和 DE 重合(过两点只能作一条直綫)，因此过弦 AB 的中点的直径一定垂直于弦 AB。根据上面的定理，这条直径也一定平分 AB 所对的两条弧。

定理　弦的垂直平分綫必过圓心，并且平分这条弦所对的两条弧。

前面已經証明，如果直径 DE 垂直于弦 AB，那么直径 DE 也就平分弦 AB，即 DE 为 AB 的垂直平分綫(图 229)。但是 AB 的垂直平分綫只能有一条，因此，如果作弦 AB 的垂直平分綫就一定和直径 DE 重合，所以弦 AB 的垂直平分綫必过这个圓的圓心。根据上一个定理，它也平分弦 AB 所对的两条弧。

作图题　平分一条已知弧。

已知：$\overset{\frown}{AB}$(图 230)。

求作：平分 $\overset{\frown}{AB}$ 的点。

作法：(1) 連結 AB(图 230)。

(2) 作綫段 AB 的垂直平分綫交 $\overset{\frown}{AB}$ 于 M 点。

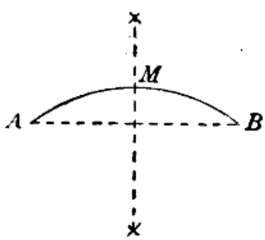


图　230

M 点就是所求作的点。

(証明从略)

例　如果一条直綫和两个同心圓(就是有公共圓心的圓)都相交，那么这条直綫被截于两圓間的部分相等。

已知：两个以 O 为公共圓心的圓，直綫 AB 交大圓于 A、B，交小圓于 C、D(图 231)。

求証：$AC=BD$。

証明：过 O 点作弦 AB 的垂綫，交 AB 于 M，那么

$AM=BM$，

$CM=DM$（垂直于弦的直径平分这条弦），

$\therefore \quad AM-CM=BM-DM$，

即 $\quad AC=BD$。

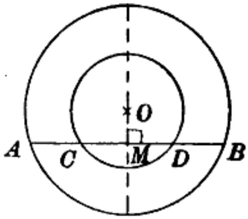


图 231

注意：在解有关圓的証明題或計算題的时候，我們有时需要作一条"垂直于弦的直径"作为輔助綫，为了簡便，在用到这条輔助綫时，我們往往只从圓心作一条和弦垂直的綫段，如图 231 中，只要作出 OM 就可以了。

71. **弧、弦、弦心距之間的关系** 圓心到弦的距离叫做**弦心距**，如图 232 中，$OE\perp AB$，OE 就是弦 AB 的弦心距。

下面我們来研究弧、弦、弦心距之間的关系。

在图 232 中，已知 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$，$OE\perp AB$，$OF\perp CD$。連結 OA、OB、OC、OD。把 $\overset{\frown}{AB}$ 連同半径 OA、OB 依箭头所指的方向旋轉，使 A 点和 C 点重合。因为 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$，所以 B 点就和 D 点重合，因此 $AB=CD$。其次，因为 $OE\perp AB$，$OF\perp CD$，所以 E、F 分別为 AB 和 CD 的中点（垂直于弦的直径平分这条弦）。于是，当 AB 和 CD 重合时，E 点就和 F 点重合，所以 $OE=OF$。由此得到

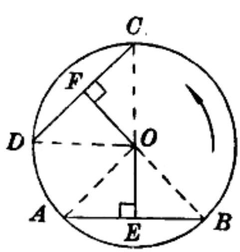


图 232

定理　在同圓或等圓①中，等弧对等弦；等弦的弦心距相等.

用类似的方法可以証明

定理　在同圓或等圓中，弦心距相等的弦相等；等弦所对的劣弧相等.（証明从略）

在弧、弦、弦心距之間，除了存在着上面定理所指出的那些关系外，它們之間还存在着这样的关系，就是：**在同圓或等圓中，如果两条劣弧不等，那么大弧所对的弦較大；大弦的弦心距較小.** 反过来，**在同圓或等圓中，弦心距較小的弦較大，大弦所对的劣弧較大.** 例如在图 233 中：$\overset{\frown}{AB}>\overset{\frown}{CD}$，那么 $AB>CD$，$OM<ON$. 反过来，如果已知 $OM<ON$，那么 $AB>CD$，$\overset{\frown}{AB}>\overset{\frown}{CD}$. 这里，我們只要求能直观地了解这一事实就可以了，在本书中不作証明.

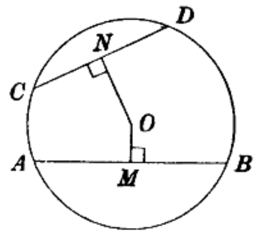


图　233

例　已知：AP 是 $\angle A$ 的平分綫，O 是 AP 上的任意一点，$\odot O$ 分別交 $\angle A$ 的两边于 B、C 和 D、E（图 234）.

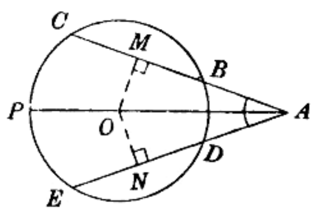


图　234

求証：$BC=DE$，$\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{DE}$.

---

① 在同圓中得到的結論对于等圓来說仍然成立．因为我們可以把两个相等的圓迭合成一个圓来研究．以后遇到这种情形，我們也只就同圓来研究.

証明：作 $OM \perp BC$，$ON \perp DE$，分别交 BC、DE 于 M、N 两点。

∵　O 点在 $\angle A$ 的平分綫 AP 上，

∴　$OM = ON$。

∴　$BC = DE$，

$\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{DE}$（在同圓中，弦心距相等的弦相等，等弦所对的劣弧相等）。

习题二十五

1. 用已知半径作一个圓，使它通过两个已知点。

2. 已知一条直綫和这条直綫外的两个点，求作一个圓，使它通过这两个点，并且圓心在已知直綫上。

3. 作边长是下列长度的三角形，并且作出这些三角形的外接圓：

(1) 2.6cm、2.8cm 和 3cm；

(2) 2cm、1.5cm 和 2.5cm；

(3) 2cm、1.5cm 和 3.2cm。

4. （口答）有一块圓形鋼板，要在它的中心的地方钻孔，怎样确定钻孔的位置？

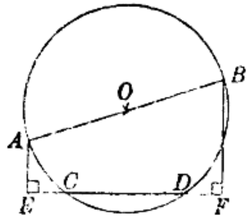
5. 在⊙O 中有一个已知点 P，过 P 点作一条弦，使这条弦被 P 点平分。

6. 已知 AB、CD 是 ⊙O 中两条互相垂直的弦，并且 AB 把 CD 分成 3 cm 和 7 cm 的两部分，求弦 AB 和圓心的距离。

7. 已知 AB 是 ⊙O 的一条弦，$\angle AOB$ 为 120°，圓的

半径为 R，求弦 AB 和圆心的距离。

8. 如图，已知 AB 是⊙O 的直径，CD 是弦，$AE\perp CD$，$BF\perp CD$，求証 $EC=DF$.



第 8 題

9. 用薄紙描出下列各弧，找出它們的圓心.


第 9 題

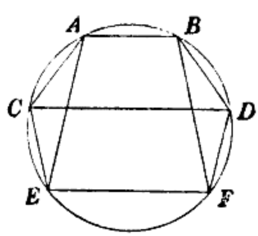
10. 把上題中的各条弧分别分成四等份.

11. 証明：**两条平行弦所夹的弧相等.**

12. 証明：頂点在同一个圓上的梯形是等腰梯形.

13. 如图，已知弦 AB、CD 和 EF 互相平行，求証 $\triangle ACE \cong \triangle BDF$.

（提示：第 12、13 題可以利用第 11 題的結論去証明）.

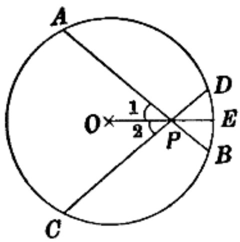


第 13 題

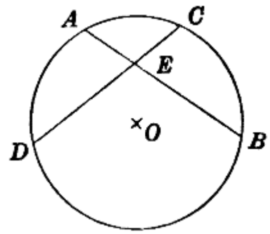
14. 已知 AB 为 ⊙O 的一条弦（AB 不过圓心），在 ⊙O 内作一条弦，使它平行于 AB，并且等于 AB.

15. 在 ⊙O 中，AB 是直径，AC 和 AD 是两条相等的弦，求証 AB 平分 $\angle CAD$.

16. 如图，P 为半径 OE 上的任意一点，弦 AB、CD 相交于 P，并且 $\angle 1=\angle 2$，求証 $AB=CD$。



第 16 题



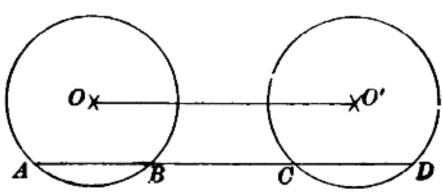
第 17 题

17. 在 $\odot O$ 中，相等的两弦 AB、CD 相交于 E，求証

(1) $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BC}$；

(2) $AE=CE, BE=DE$。

18. (1) 如图，已知 $\odot O$ 和 $\odot O'$ 是等圆，$AD /\!/ OO'$，求証 $AB=CD$。



第 18 题 (1)

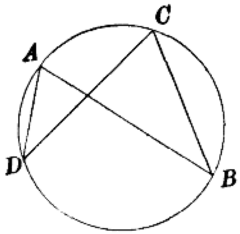
(2) 如果第(1)题中的 $\odot O$ 和 $\odot O'$ 不是等圆，$AD /\!/ OO'$，那么 AB 和 CD 是否相等？作图加以說明。

19. (1) 求作一条弧，使它等于已知弧的 2 倍；

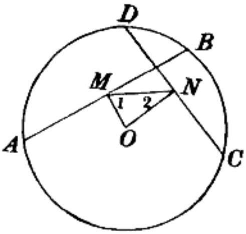
(2) 在 $\odot O$ 中，已知 $\overset{\frown}{AB}=2\overset{\frown}{CD}$，求証 $AB<2CD$。

20. 在 $\odot O$ 中，如果 B 和 C 是 $\overset{\frown}{AD}$ 上的两点，并且 $\overset{\frown}{AB}>\overset{\frown}{CD}$，求証 $AC>BD$.

21. 如图，已知 $AB>CD$，$\overset{\frown}{ACB}$ 和 $\overset{\frown}{DAC}$ 都是劣弧，求証 $CB>AD$。



第 21 題



第 22 題

22. 如图，在 $\odot O$ 中，$\overset{\frown}{ADB}$ 和 $\overset{\frown}{DBC}$ 都是劣弧，$\overset{\frown}{ADB}>\overset{\frown}{DBC}$，$M$ 和 N 分别是 AB 和 CD 的中点，求証 $\angle 1>\angle 2$。

23. 过已知圆内一个已知点 A 的各条弦中，最短的一条是和过 A 的直径垂直的弦。

II 直綫和圓的位置关系

72. 点和圆的位置关系 一个点和一个圆的相互位置关系有三种：(1)点在圆上；(2)点在圆内；(3)点在圆外。如图 235 中，A 点在 $\odot O$ 上，B 点在 $\odot O$ 内，C 点在 $\odot O$ 外。

从图 235 中可以看出：如果一个点在圆上，那么这个点和圆心的距离等于半径；如果一个点不在圆上，那么这个点和圆心的距离就不等于半径，并且，在圆内的点和圆心的距

离小于半径，在圆外的点和圆心的距离大于半径．反过来，如果一个点和圆心的距离等于半径，那么这个点在圆上；如果一个点和圆心的距离不等于半径，那么这个点就不在圆上，并且，距离小于半径时，这个点在圆内，大于半径时，这个点在圆外．

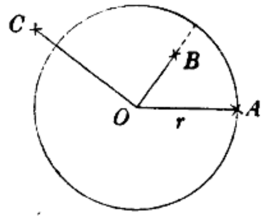


图 235

73．直綫和圓的位置关系 一条直綫和一个圆的相互位置关系有下列三种：

(1) 直綫和圓沒有公共点时，这种位置关系叫做**直綫和圓相离**．如图 236 中的 AB 和 $\odot O$．

(2) 直綫和圓只有一个公共点时，这种位置关系叫做**直綫和圓相切**．如图 237 中，直綫 AB 和 $\odot O$ 只有一个公共点 P，AB 叫做 $\odot O$ 的**切綫**，公共点 P 叫做**切点**．

(3) 直綫和圓有两个公共点时，这种位置关系叫做**直綫和圓相交**．如图 238 中，直綫 AB 和 $\odot O$ 相交，这时我們把直綫 AB 叫做 $\odot O$ 的**割綫**．

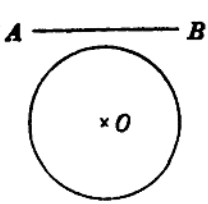


图 236

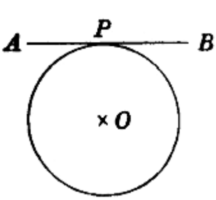


图 237

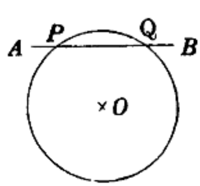


图 238

74. 切綫的判定定理

定理 經过半径外端并且垂直于这条半径的直綫是圓的切綫.

已知: OC 是 $\odot O$ 的半径, 直綫 $AB \perp OC$ 并且交 OC 于 C 点(图 239).

求証: AB 是 $\odot O$ 的切綫.

証明: 因为 OC 是半径, 所以 C 点在 $\odot O$ 上. 又因为 C 点是垂足, 所以 C 点也在直綫 AB 上, 因此, C 点就是直綫 AB 和 $\odot O$ 的一个公共点.

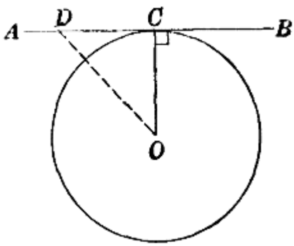
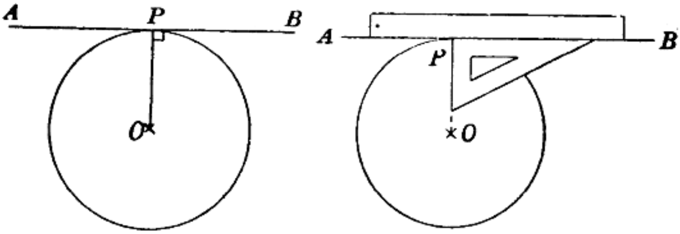


图 239

其次, 在 AB 上除 C 点以外的任意一点和圓心的距离(例如 D 点和圓心的距离 DO), 一定大于半径 OC (由直綫外一点与直綫上的点連成的許多綫段中, 以垂直于直綫的綫段为最短), 所以除 C 点外, 直綫 AB 上的其他各点都在圓外. 这就是說, AB 和 $\odot O$ 只有一个公共点 C, 因此, AB 就是 $\odot O$ 的切綫.

根据上面的切綫的判定定理, 可以得到过圓上的一个已知点作圓的切綫的方法, 方法是: 把 $\odot O$ 上的已知点 P 和圓心 O 連結起来, 再过 P 点作 OP 的垂綫 AB, 那么直綫 AB 就是 $\odot O$ 的切綫 (图 240a). 如果用三角板和直尺来作, 可以先使三角板的一条直角边落在 OP 上, 并且使三角板的直角頂和 P 点重合, 再把直尺的边与三角板的另一条直角边密合(图 240b), 最后拿开三角板, 用鉛笔沿直尺的边緣作

直綫 AB, AB 就是所作的切綫.



(a) (b)

图 240

例 1 在 $\odot O$ 中,延长它的半径 OC 到 B,使 $CB=OC$,再作弦 CA,使 $CA=OC$,連結 AB,那么 AB 是 $\odot O$ 的切綫.

已知: 在 $\odot O$ 中, CA 是弦, CB 是半径 OC 的延长綫,并且 $CA=OC=CB$(图 241).

求証: AB 是 $\odot O$ 的切綫.

証明: 連結 OA. 在 $\triangle COA$ 中,

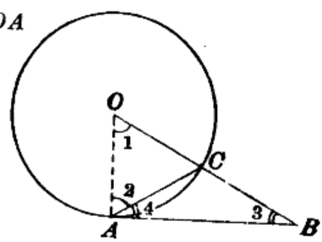


图 241

$\because$ $CA=OC$,

$\therefore$ $\angle 1=\angle 2$.

在 $\triangle CAB$ 中,

$\because$ $CA=CB$,

$\therefore$ $\angle 3=\angle 4$.

$\therefore$ $\angle 1+\angle 3=\angle 2+\angle 4$.

但是 $\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4=180^\circ$,

$\therefore$ $\angle 2+\angle 4=90^\circ$.

就是 $\angle OAB=90^\circ$.