薄板结构力学

Л.С.卡尔曼諾克 著

建筑工程出版社

內容提要　本書叙述平面輪廓基本上是矩形的薄板的横弯曲和平面应力状态的計算。問題的論述是根据靜不定系統結构力学的一般方法，并总結出大家熟悉的利用普通超三角級数計算任意边界条件矩形薄板的通式。問題最后归結到一組普通的典型方程式。这个方法稍加改变也能用到計算任意平面輪廓的薄板。

書中包括有許多具体問題計算实例，附录中有輔助图表以及載有大部分实踐中所遇到情况的現成数字結果的图表。

本書可供設計工程师、研究生和科学研究人員参考。

原本說明

書　名　СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА ПЛАСТИНОК

著　者　А. С. Калманок

出 版 者　Машстройиздат

出版地点及年份　Москва—1950

薄板結构力学

屈家澁　区汉梁 譯

*

1959年10月第1版　　1959年10月第1次印刷　　4,045册

850×1168 1/32 · 269千字 · 印張 10 1/8 · 定价（10）1.70元

建筑工程出版社印刷厂印刷 · 新华書店发行 · 書号：1649

建筑工程出版社出版（北京市西郊百万庄）

（北京市書刊出版业营业許可証出字第052号）

目 录

序

板，或者通常称为彈性薄板，是很多建筑物的重要結构构件。計算这类結构不但在建筑工程中而且在造船、航空等等工程中都有重大意义。

大約135年前就已經有了板的計算理論。但直到本世紀之初，我們几乎还沒有求得对实际有用的、計算板的古典理論問題的解答。

由于迫切需要这些問題的解答，最近出現了很多关于板的理論的著作。这方面基本的主要的成就应归功于我国的学者。在偉大的十月社会主义革命之前不久，就发表了許多板的理論的卓越研究，如И.Г.布勃諾夫教授的著作“船舶結构力学”与С.П.鉄木生柯教授的“彈性理論”。革命以后出版了大量的專門論文，如Б.Г.伽辽金院士的“彈性薄板”，Ю.А.希曼斯基教授的“板的弯曲”以及П.Ф.巴普科維奇教授出色的著作“船舶結构力学”教程的第二部分。

虽然这些著作有着巨大的科学价值，但还必須承認，到目前为止还沒有建立可供設計工程师解决在实际中常常遇到的各种工程問題用的板的計算方法。本著作企图至少在最有实际意义的矩形板的計算部分来补充这个空白点。下面在解决这个問題时，我們一直使用为每一个結构工程师所熟知的静不定系統結构力学的方法，可以預料到，这将使本書所述的方法应用起来特别方便。

本書中所討論的是基于結构力学綫性原理的薄板的古典理論，其中根本不涉及板的計算的非綫性的大撓度問題以及板的彈塑性弯曲。当然，在很多情况下，当結构物的工作条件允許它产生塑性变形时，应用塑性理論于板的計算，可以在計算中减低多

余的强度儲备而得到很大的节約。在这个領域內主要的結果同样是由我国学者 A.A.格沃兹捷夫教授与苏联科学院通訊院士 A.A.依留兴所获得。但是，如所周知，彈塑性弯曲問題的解决只有在研究了彈性阶段以后才能进行。而且在很多情况下，按結构物的工作条件不允許用彈塑性阶段計算，例如在計算有高度防水性能的鋼筋混凝土构件时。由此可見，无論如何不能認为本著作中所討論的問題沒有它的迫切性。至于建立在考虑材料的塑性基础上的板的計算理論应該另写成更專門的著作。

本書主要供工程設計人員应用，作者力求使它能达到这个目的。讀者閱讀本書所需的預备知識是：将函数展开为級数的基本方法，常系数綫性微分方程的积分以及彈性理論的基本知識。

本書的基本內容是研究矩形板的横向弯曲以及平面应力狀态的計算。在本書中不会遇到实用意义較少的其他形狀的板（其中包括圓形板）的計算問題，圓板計算問題在上面提到的著作中已有圓滿的叙述，作者沒有什么可补充的。支承在彈性地基上以及处于均匀的平面应力狀态的板的复合弯曲問題等等沒有論述。但作者在本書中所用的方法也能完全用来解决这些問題。

在附录中列有很多表，表中直接給出在实际情况中最常見的板的力矩与撓度的計算值，或其輔助值。

最后，作者对技术科学博士 П.Л. 巴斯捷尔納克教授表示深深的感謝，因为在写这本書时他曾提出了很多非常宝貴的意見。

第一章 板的横向弯曲与平面应力状态的一般理論

§1 基本定义与假設

板，或称薄板，是其高度与其底部尺寸相比較非常小的柱形或圓柱形彈性体，以后我們将假定板的高度为常数，而板的材料为各向同性，即在所有的方向上具有同样的彈性性質。平行于底面并平分板的高度的平面，我們称为中間面，由于横向弯曲变形中間面所形成的曲面叫做板的彈性曲面，我們取板的中間面为坐标平面xy，坐标軸z垂直于中間面并假定向下为正；坐标軸采用右手螺旋系統。

我們将假定板上的外荷重与体积力是作用在板的中間面上。这些荷重可以分解为下述两种分量：1)作用在中間面內的分量，这分量引起板的平面应力状态；以及2)垂直于中間面的分量，这分量引起板的横向弯曲。

滿足所有彈性理論微分方程式的、計算板的严格数学理論是最困难的数学問題之一。直到最近，只是在个别的最簡單的情况下才能得到这些問題的解答。由此可見，必須建立計算板的近似理論，使我們有可能对所有在实际中所发生的問題获得足够接近于精确的解答。所謂計算板的古典理論，与計算梁的工程理論完全相类似，是根据下述使得所研究的問題大为簡化的假設：

1)認为垂直于中間面的垂直应力，与板內其他应力相比較是非常微小而可以忽略不計；

2)作用在板的平面內的荷重所引起的应力，在板的高度上均匀分布；以及

3)变形前位于与板的中間面相垂直的任意直綫上所有的点，

在板变形后仍位于与板的彈性曲面正交的直綫上。

最后这个假設叫做平面法綫假設，与計算梁的工程理論中的平面断面假設十分类似。

上述假設是与关于板的高度远小于其底面尺寸的假定相适应的。最重要的問題是确定所述理論的应用范圍，究竟板的高度到什么限度才可以認为是很小。将問題的严格数学解答所得到的少数結果与用古典理論对同样問題所算得的結果相比較，可以看出甚至在板的高度等于它的跨度的$\frac{1}{5}$时，严格的数学解答对于古典理論的解答的修正項是非常微小的。所以，对于通常实际中所遇到的板，这个修正項沒有什么意义。

除了上述假設我們还假定板的变形是非常小，在研究板的彎曲时完全可以应用彈性理論中所給的相对变形与位移的綫性关系。所以我們将假定板的撓度較之它的高度是非常小。确定所述理論的应用范圍，即究竟板的撓度到什么限度才能認为是非常小，这是很重要的問題。将根据所謂板的大撓度計算理論所得的极少数結果与根据古典理論对同样問題所得的結果相比較，可以看出当板的撓度不超过它的高度的$\frac{1}{5}$时，由于撓度在中間面所产生的薄膜应力对于板的总的应力状态所发生的影响可認为是非常微小的。可見，对于实际中常見的板，古典計算理論可以認为是足够完善。对于薄的金屬盖板，它的撓度与它的高度相比較是相当大，这理論只能給出近似解，当板的撓度与其高度的比值愈大时，古典理論所得的解与它的精确值也就相差愈大。

还应指出，由于計算板的古典理論采用了一些假設，所以在彈性曲面函数或者板的应力函数的特殊点处，这个理論不可能給出精确解。例如集中力作用处就是这样的点，在这些点处板的位移是有限的，而应力就取无穷大値。不过如果注意到，集中在一点的荷重实际上是不可能存在的，而且离荷重作用处的相当距离以外，板的应力状态用所述的理論来描述是足够精确的，所以仍可

将計算板的古典理論的結論用来解答这类問題。同时还应該知道，这集中外荷重的范圍，不仅可用板內的垂直应力与切应力来决定，也可用直接承受該荷重的挤压应力来决定。当然，在十分接近于集中荷重作用处（同时在某些类似的情况），用計算板的古典理論来較詳尽地研究板的变形与应力状态是不可能的，因为此时我們再沒有理由認为板的高度較之其底面尺寸是非常微小了。解答这些問題必須采用其他的理論，这个我們将不予以討論。

§2 單元板的变形与应力状态

我們首先来討論在板的計算理論中所要用的公式，这可以由分析單元板的变形而得到。我們来討論單元板的变形（图 1），板中間面內任一点的与坐标軸x，y和z相平行的位移表为u_0、v_0和w_0。根据板的高度远小于其底面尺寸的假設，可以認为位于板的彈性曲面的垂直綫上任一点的垂直位移w，也等于w_0。而其他两个位移分量則等于

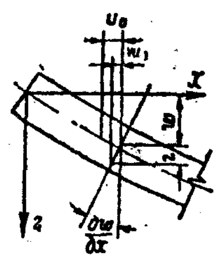

图 1

$$u=u_0-u_1=u_0-z\frac{\partial w}{\partial x};\quad v=v_0-v_1=v_0-z\frac{\partial w}{\partial y}。$$

在板的撓度非常小的情况下，根据彈性理論中已知的公式，其变形分量与位移的关系是：

$$e_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x};\ e_{yy}=\frac{\partial v}{\partial y};\ e_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}。\qquad (1.1)$$

如果还要考虑板的撓度对变形分量的影响，那可将（1.1）写成：

$$e_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2;\quad e_{yy}=\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2;$$

$$e_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}\ \frac{\partial w}{\partial y}。\qquad (1.1a)$$

由公式（1.1）我們可得：

$$e_{xx}=\frac{\partial u_0}{\partial x}-z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2};\quad e_{yy}=\frac{\partial v_0}{\partial y}-z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2};$$

$$e_{xy}=\frac{\partial u_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial x}-2z\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}。\tag{1.2}$$

根据所采用的忽略微小应力z_z的假設以及平面法綫的假設，显然，必須認为变形分量e_{zz}，e_{yz}与e_{zx}等于零。

将上述各式进行微分后，我們便得到板的变形諧調方程，对于(1.1)得：

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x\partial y}=0。\tag{1.3}$$

对于（1.1a）得：

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x\partial y}=\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]。\tag{1.3a}$$

考虑到所采用的关于忽略微小正应力z_z的假設，此时我們可将虎克定律表为下式：

$$e_{xx}=\frac{1}{E}(X_x-\sigma Y_y);\quad e_{yy}=\frac{1}{E}(Y_y-\sigma X_x);$$

$$e_{xy}=\frac{2(1+\sigma)}{E}X_y=\frac{1}{G}X_y,\tag{1.4}$$

其中E与G是拉压与剪切彈性模量，而σ是波桑横向变形系数。

从这些方程式可以得到相反的公式：

$$\left.\begin{aligned}X_x&=\frac{E}{1-\sigma^2}(e_{xx}+\sigma e_{yy});\\Y_y&=\frac{E}{1-\sigma^2}(e_{yy}+\sigma e_{xx});\\X_y&=Ge_{xy}=\frac{E}{2(1+\sigma)}e_{xy}。\end{aligned}\right\}\tag{1.4a}$$

将虎克定律的公式代入到方程式（1.3）后，得到：

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(Y_y-\sigma X_x)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(X_x-\sigma Y_y)-2(1+\sigma)\frac{\partial^2 X_y}{\partial x\partial y}=0。\quad (1.5)$$

这就是彈性理論中平面問題的基本微分方程式。

我們来叙述关于板的应力分量的概念。如果假想沿垂直于x軸的平面将板切开，并在該截面上取單元長度d_y，則在一般情况下，这个單元体将作用着下述的力，这些力用应力x_x、y_y与$x_y=y_x$的积分式（图2）❶来表示。即：

法向力$N_x d_y$，其中：

$$N_x=\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} X_x dz;$$

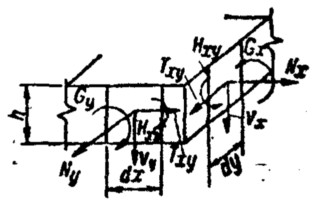

图 2

作用在中間面內的切力$T_x dy$，其中：

$$T_x=\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} Y_x dz;$$

垂直于中間面的切力$V_x dy$，其中：

$$V_x=\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} X_z dz;$$

弯矩$G_x dy$，其中：

$$G_x=\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} zX_x dz;$$

扭矩$H_x dy$，其中：

$$H_x=\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} zY_x dz。$$

❶ 图2中所示的力与力矩都是正号，以后均用这个規則。

同样，考虑垂直于y轴的板的截面，并在该截面上取長度dx，可以得到板的应力分量为下式：

$$N_y=\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} Y_y dz; \qquad T_y=\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} X_y dz; \qquad V_y=\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} Y_z dz;$$

$$G_y=\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} zY_y dz; \qquad H_y=\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} zX_y dz。$$

同时，根据等式$Y_x=X_y$，得：

$$T_x=T_y=T_{xy} \text{与} H_x=-H_y=H_{xy}。$$

又

$$N_x=\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{E}{(1-\sigma^2)}(e_{xx}+\sigma e_{yy})dz=\frac{Eh}{(1-\sigma^2)}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\sigma\frac{\partial v_0}{\partial y}\right); \tag{1.6}$$

同样

与

$$\left.\begin{aligned} T_{xy}&=\frac{Eh}{2(1+\sigma)}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial x}\right) \\ N_y&=\frac{Eh}{(1-\sigma^2)}\left(\frac{\partial v_0}{\partial y}+\sigma\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)。\end{aligned}\right\} \tag{1.6a}$$

将彈性理論平面問題的基本微分方程式（1.5）从$-h/2$至$+h/2$进行逐項积分后，可把它表示成为：

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(N_x-\sigma N_y)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}(N_y-\sigma N_x)-2(1+\sigma)\frac{\partial^2 T_{xy}}{\partial x\partial y}=0, \tag{1.7}$$

而且 $$e^0_{xx}=\frac{\partial u_0}{\partial x}=\frac{N_x-\sigma N_y}{Eh}; \qquad e^0_{yy}=\frac{\partial v_0}{\partial y}=\frac{N_y-\sigma N_x}{Eh};$$

$$e^0_{xy}=\frac{\partial u_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial x}=\frac{2(1+\sigma)}{Eh}T_{xy}。 \tag{1.8}$$

三个未知函数 N_x、N_y与T_{xy} 可以用一个所謂应力函数来表示，如果假定：

$$N_x=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2};\qquad N_y=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2};\qquad T_{xy}=-\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\text{。}\tag{1.9}$$

将（1.9）各式代入平面問題的基本方程式（1.7）后，我們求得为决定函数F的所謂双調和微分方程式：

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 F}{\partial y^4}\nabla^2\nabla^2 F=0\text{。}\tag{1.10}$$

符号∇^2表示微分运算

$$L=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

即所謂拉普拉斯調和运算。方程式（1.10）是計算板的古典理論的两个基本方程式的第一个方程式。

如果必須估計板的撓度对于它的平面力所发生的影响，則此时我們将諧調方程式（1.3a）作与上述完全相同的变换以后，便可得到微分方程式：

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 F}{\partial y^4}=Eh\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]\text{。}\tag{1.10a}$$

也可以求得板的截面上弯矩与扭矩的算式：

$$G_x=\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z\frac{E}{(1-\sigma^2)}(e_{xx}+\sigma e_{yy})❶\,dz=$$

$$=-\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2\frac{E}{(1-\sigma^2)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\sigma\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)dz=$$

$$=-\frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\sigma\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\sigma\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\tag{1.11}$$

---

❶ 原書将此式中的e_{yy}誤作e_{xy}。——譯者注

同样

$$\left.\begin{aligned} G_y &= -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\sigma\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right); \\ H_{xy} &= -(1-\sigma)\ D\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}。\end{aligned}\right\} \tag{1.12}$$

其中：$D=\dfrac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}$是板弯曲时的柱形剛度。

以后在很多情形下，我們将用决定弯矩分量的办法来代替决定弯矩，这些弯矩分量是：

$$\left.\begin{aligned} M_x &= -D\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \\ M_y &= -D\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}。\end{aligned}\right\} \tag{1.13}$$

弯矩照下式用它的分量来决定：

$$\left.\begin{aligned} G_x &= M_x+\sigma M_y; \\ G_y &= M_y+\sigma M_x。\end{aligned}\right\} \tag{1.14}$$

切力V_x与V_y我們还沒有确定。为了确定它們，仅仅研究板的变形是不够的，还必須研究这个單元体的静力平衡条件，从而得到計算板的古典理論的第二个基本微分方程式。

§3 單元板的平衡条件

我們轉到討論單元板的一般静力平衡方程式。众所周知，我們有三个方程式。当沒有体积力时，單元平行六面体$dxdydz$的平衡方程式中前两个可以写成：

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial Y_x}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}+\frac{\partial Y_z}{\partial z} &= 0。\end{aligned}\right\} \tag{1.15}$$

由这些方程式幷用公式（1.4a）可以决定应力x_z与y_z：

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\partial X_z}{\partial z}=&-\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{E}{(1-\sigma^2)}(e_{xx}+\sigma e_{yy})\right]\\
&-\frac{\partial}{\partial y}\ \frac{E}{2(1+\sigma)}\ e_{xy}=-\frac{1}{h}\left(\frac{\partial N_x}{\partial x}+\frac{\partial T_{xy}}{\partial y}\right)\\
&+z\frac{E}{(1-\sigma^2)}\ \frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w;\\
\frac{\partial Y_z}{\partial z}=&-\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{E}{(1-\sigma^2)}(e_{yy}+\sigma e_{xx})\right]\\
&-\frac{\partial}{\partial x}\ \frac{E}{2(1+\sigma)}\ e_{xy}=-\frac{1}{h}\left(\frac{\partial N_y}{\partial y}+\frac{\partial T_{xy}}{\partial x}\right)\\
&+z\frac{E}{(1+\sigma^2)}\ \frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 w。
\end{aligned}\right\}\tag{1.16}
$$

容易看出，当用应力函数（1.9）表示作用在板的中間面的力N_x、N_y与T_{xy}时，便能自动滿足等式：

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial N_x}{\partial x}+\frac{\partial T_{xy}}{\partial y}=0;\\
&\frac{\partial N_y}{\partial y}+\frac{\partial T_{xy}}{\partial x}=0,
\end{aligned}\right\}\tag{1.17}
$$

当沒有体积力作用在板的中間面时，上式是平面問題的基本平衡微分方程式。所以：

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial X_z}{\partial z}=z\frac{E}{(1-\sigma^2)}\ \frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w;\\
&\frac{\partial Y_z}{\partial z}=z\frac{E}{(1-\sigma^2)}\ \frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 w。
\end{aligned}\right\}^{❶},\tag{1.18}
$$

将此式沿整个板的高度上对Z积分，并注意在板的上下两个表面內的切应力x_z与y_z等于零，我們求得：

❶ 該两式右边的分母原書均誤排为（$1-\sigma$）^{2}。——譯者注

$$
\left.\begin{aligned}
Y_z &= -\frac{E}{1-\sigma^2}\,\frac{(h^2-4z^2)}{8}\,\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w\,;\\
Y_z &= -\frac{E}{1-\sigma^2}\,\frac{(h^2-4z^2)}{8}\,\frac{\partial}{\partial y}\Delta^2 w\,。
\end{aligned}\right\}\qquad(1.19)
$$

在上下限$\pm\dfrac{h}{2}$間再积分一次，給出切力之值：

$$
\left.\begin{aligned}
Y_x &= -D\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w = -D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right);\\
V_y &= -D\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 w = -D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\right)。
\end{aligned}\right\}\qquad(1.20)
$$

在有体积力的情況下，平面問題的平衡微分方程式是：

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\partial N_x}{\partial x}+\frac{\partial T_{xy}}{\partial y}+\overline{X}=0\,;\\
\frac{\partial N_y}{\partial y}+\frac{\partial T_{xy}}{\partial x}+\overline{Y}=0\,,
\end{aligned}\right\}\qquad(1.21)
$$

其中$\overline{X}$与$\overline{Y}$表示板的單位面积上的体积力在坐标軸x与y上的投影。我們将認为，这体积力具有位能$U(x,y)$，体积力可用位能按下面公式表为：

$$
\overline{X}=\frac{\partial U(x,y)}{\partial x};\qquad \overline{Y}=\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}。\qquad(1.22)
$$

在这种情形下，为了滿足平面問題的平衡微分方程式应該假設：

$$
N_x=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}-U(x,y);\qquad N_y=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}-U(x,y);
$$

$$
T_{xy}=-\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}。\qquad(1.23)
$$

如常見的一样，位能$U(x,y)$是調和函数，即是滿足微分方程：

$$
\frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial y^2}=\nabla^2 U(x,y)=0。
$$

此时，为了决定应力函数我們再回到双調和微分方程式(1.10)。

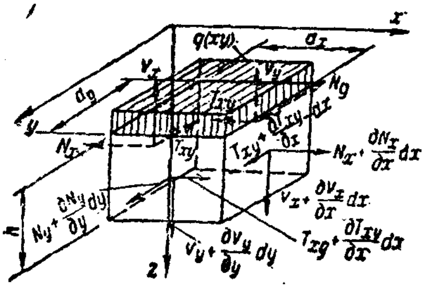

图 3

單元平行六面体的第三个平衡方程式是：

$$\frac{\partial Z_x}{\partial x}+\frac{\partial Z_y}{\partial y}+\frac{\partial Z_z}{\partial z}=0。\tag{1.15a}$$

根据忽略微小应力 Z_z 的假設，这个方程式就沒有意义，因此我們将討論單元柱体 $hdxd_y$（图 3）来代替單元平行六面体，并令所有作用在这柱体上的力在 z 軸上的投影之和等于零。

外荷重的投影等于 $q(x,y)dxdy$。

作用在單元体的 dy 与 dx 边上的切力 $-V_x, V_x+\frac{\partial V_x}{\partial x}dx$，$-V_y$ 与 $V_y+\frac{\partial V_y}{\partial y}dy$ 在 Z 軸上的投影为 $\frac{\partial V_x}{\partial x}dxdy$ 与 $\frac{\partial V_y}{\partial y}dxdy$。此外，还应考虑縱向的法向力与切力在 z 軸上的投影。

作用在單元体 dy 与 dx 边上的法向力 $-N_x, N_x+\frac{\partial N_x}{\partial x}dx$，$-N_y$ 与 $N_y+\frac{\partial N_y}{\partial_y}dy$ 的投影等于（图 4）：

$$-N_x\frac{\partial w}{\partial x}dy+\left(N_x+\frac{\partial N_x}{\partial x}dx\right)\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}dx\right)dy;$$

$$-N_y\frac{\partial w}{\partial y}dx+\left(N_y+\frac{\partial N_y}{\partial y}dy\right)\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}dy\right)dx。$$

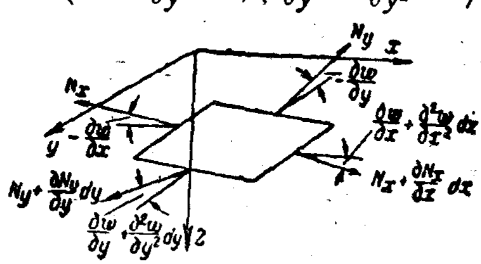

图 4