高等数学（二）

（2002年版）

全国高等教育自学考试全程应试指导

组　编／全国高等教育自学考试全程应试指导编委会

丛书主编／北京大学　林　娅

本书主编／中央财经大学　吴秉坚　王𬘡

全国高等教育自学考试指定教材辅导用书　经济管理类专业

全国高等教育自学考试指定教材辅导用书

全国高等教育自学考试全程应试指导

高等数学(二)

(串讲指导·题型训练·模拟试题·最新真题)

组　　编　全国高等教育自学考试全程应试指导编委会

丛书主编　北京大学　林娅

本书主编　中央财经大学　吴秉坚　王絪

学苑出版社

图书在版编目(CIP)数据

全国高等教育自学考试全程应试指导:公共类(2002年版)/林娅主编.—北京:学苑出版社,2001.12
ISBN 7-5077-1849-2

Ⅰ.全… Ⅱ.林… Ⅲ.高等教育 自学考试—复习参考资料 Ⅳ.G73

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第17394号

全国高等教育自学考试全程应试指导

高等数学(二)

丛书主编 北京大学 林娅
本书主编 中央财经大学 吴秉坚 王细

*

学苑出版社出版发行
北京市万寿路西街11号 100036
北京市朝阳印刷厂排版印刷 新华书店经销
880×1230毫米 1/32开本 130印张 5000千字
2001年12月北京第1版 2001年12月北京第1次印刷
印数:0001—5000册 定价:166.40元

前　言

本书是依据全国高等教育自学考试指导委员会颁布的《高等数学(二)考试大纲》和全国高等教育自学考试指导委员会组编的指定教材《高等数学(二)第一分册线性代数》(武汉大学出版社出版,姚慕生等主编)、《高等数学(二)第二分册概率统计》(武汉大学出版社出版,唐国兴主编)而编写的自学辅导用书。全书共分四部分,第一部分内容为线性代数;第二部分内容为概率统计;第三部分是模拟试题;第四部分是最新真题。前两部分各包括两编,第一编是对照考试大纲按章将主要知识内容进行概括总结并针对基本概念、基本方法进行举例讲解;第二编是参照近年高等教育自学考试《高等数学(二)》试卷中出现的题目类型(单项选择题、简答题、计算题、证明题),对各类题目进行分类解析。

本书是一本自考用辅导书,因此其主要特点是紧密围绕考试大纲的要求,既对基础知识进行全面系统的复习又要突出重点、难点内容。为了提高读者分析问题与解决问题的能力,本书参照考试大纲的要求及历年考题的特点选编了大量例题,全书共有各类例题五百余道,内容涉及到考试大纲要求的所有主要知识点并对重点、难点及考生不易掌握的问题做了较多的举例分析。本书希望通过典型例题的分析与解答加深读者对基本概念的理解和对基本方法、基本技巧的掌握,从而达到提高应试水平并顺利通过自学考试的目的。

本书是作者在总结多年实际教学经验基础上精心编写而成,但是疏漏之处仍在所难免,谨请读者指正。

编　者

2001 年 12 月于中央财经大学

目　　录

第一部分　线性代数

第二部分　概率统计

第三部分　模拟试题

第四部分　最新真题

第一部分　线性代数

第 一 编　串　讲　指　导

第一章　行列式

§1.1　行列式的定义

取定 n^2 个元素,就可构成一个 n 阶行列式,通常表示为

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1}$$

我们用递推的办法(或称归纳法)来定义 A 的值。当 $n=1$ 时,即一阶行列式　$A=(a_{11})$的值定义为 a_{11},当 $n=2$,二阶行列式

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}$$

当二阶行列式已经定义时,我们用以下方法来定义三阶行列式

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

这样,有了三阶行列式的值就可定义四阶行列式的值,如此递推下去,就可以定义出任意 n 阶行列式的值了!

这里,我们看到三阶行列的定义中出现三个二阶行列式,它们分别是划掉第一行与第一列,第二行与第一列,第三行与第一列后所得的二阶行列式,一般地,在 n 阶行列式(1)中划掉第 i 行与第 j 列后,余下的行、列组成一个 $n-1$ 阶行列式,叫做元素 a_{ij} 的余子式,通常

用记号 M_{ij} 表示，即

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

这样，我们可以利用余子式的概念，给出 n 阶行列式的定义(通常叫归纳定义)。

定义 1 式(1)中 n 阶行列式当 $n=1$ 时定义为 $A=a_{11}$，假定对 $n-1$ 阶行列式已经定义，规定 n 阶行列式A 的值为

$$A=a_{11}M_{11}-a_{21}M_{21}+\cdots+(-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1}+\cdots+(-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1} \qquad (2)$$

上式(2)又称为 A 按第一列的展开式。

定义 2 n 阶行列式 A 的第 i 行、第 j 列元素 a_{ij} 的余子式附加符号 $(-1)^{i+j}$ 后，用 A_{ij} 表示，即

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

称为 a_{ij} 的代数余子式；这样，(2)可表成如下形状：

$$A=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{n1}A_{n1} \qquad (3)$$

在二阶行列式

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

中，$M_{11}=a_{22}$，$A_{11}=a_{22}$；$M_{21}=a_{12}$，$A_{21}=(-1)^{1+2}M_{21}=-a_{12}$，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$$

在三阶行列式：

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

中

$$M_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23},A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}$$
$$=a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23}$$

$$M_{21}=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{12}a_{33}-a_{32}a_{13},A_{21}=(-1)^{2+1}M_{21}$$
$$=-a_{12}a_{33}+a_{32}a_{13}$$

$$M_{31}=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}=a_{12}a_{23}-a_{22}a_{13},A_{31}=(-1)^{3+1}M_{31}$$
$$=a_{12}a_{23}-a_{22}a_{13}$$

即 $A=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{13}a_{32}+a_{31}a_{12}a_{23}$
$\quad -a_{11}a_{23}a_{32}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{31}a_{13}a_{22}$

在行列式的定义中,我们是按照第一列的展开式定义行列式的值,自然产生问题:按第 j 列的展开式计算行列式的值,是否可行?以下定理回答这个问题。

定理 1.1－1 式(1)中,A 的值可按第 j 列的展开式求出,即

$$A=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\cdot A_{ij}$$

看几个例子:

【例 1】 求下列行列式的值

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解:A 的第 n 列除最末一个元素 a_{nn} 外均为零,故按第 n 列展开求值最方便,$A_{nn}=(-1)^{n+n}M_{nn}=M_{nn}$,而 M_{nn} 为

$$M_{nn}=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \cdots & \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

仍按最末一列展开,继续下去,得

$$A=a_{nn}\quad a_{n-1,n-1}\cdots a_{22}a_{11}$$

【例 2】 求下列行列式的值

$$A=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

解:按第 5 列展开

$$A=a_5\cdot(-1)^{1+5}\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$+b_5\cdot(-1)^{2+5}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{而}\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 \end{vmatrix}=b_4\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 \end{vmatrix}=0,$$

这是因为,按第三列展开后,每一项都为零之故。同样,

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = a_4 \cdot (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 \end{vmatrix} = 0, \text{故 } A = 0.$$

【例 3】 求下列行列式的值

$$A = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

解　按第一列展开

$$\begin{aligned} A &= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} b & b^2 \\ c & c^2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a & a^2 \\ c & c^2 \end{vmatrix} \\ &\quad + 1 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} a & a^2 \\ b & b^2 \end{vmatrix} \\ &= (bc^2 - b^2 \cdot c) - (ac^2 - a^2 \cdot c) + (ab^2 - a^2 b) \\ &= (bc^2 - ac^2) - (b^2 c - a^2 c) + (ab^2 - a^2 b) \\ &= c^2(b-a) - c(b-a)(b+a) + ab(b-a) \\ &= (a-b)[-c^2 + cb + ca - ab] = (a-b)(a-c)(b-c) \end{aligned}$$

【例 4】 求下列行列式的值

$$A = \begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 \\ b & b^2 & b^3 \\ c & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$

解　按第一列展开

$$\begin{aligned} A &= a \begin{vmatrix} b^2 & b^3 \\ c^2 & c^3 \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} a^2 & a^3 \\ c^2 & c^3 \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} a^2 & a^3 \\ b^2 & b^3 \end{vmatrix} \\ &= a(b^2c^3 - b^3c^2) - b(a^2c^3 - a^3c^2) + c(a^2b^3 - a^3b^2) \\ &= abc(bc^2 - b^2c) - abc(ac^2 - a^2c) + abc(ab^2 - a^2b) \\ &= abc[(bc^2 - b^2c) - (ac^2 - a^2c) + (ab^2 - a^2b)] \end{aligned}$$

由例 3 的计算，可知

$$A = abc(a-b)(a-c)(b-c).$$

【例 5】 求下列行列式的值

$$A=\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix}$$

解

$$A=(-a)\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a & b \\ -c & 0 \end{vmatrix}+(-b)\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & c \end{vmatrix}$$

$$=abc-abc=0$$

§1.2 行列式的性质

利用行列式的性质计算行列式是比较方便的。设 A 是一个 n 阶行列式,

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

命

$$A'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称之为 A 的转置,即将 A 的第一行改成第一列,第二行改成第二列,…,第 n 行改成第 n 列。

性质 1 行列式转置后的值不变,即 $A'=A$.

这个性质表明:行列式对行成立的性质,对列也成立,反之亦然。

有了这个性质,可知行列式可以按列展开也可以按行展开,即

推论: $A=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}$

$\qquad =a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$

性质 2 用某个数 C 乘行列式的某一行(或某一列),得到的行列式的值是原行列式的值的 C 倍,即

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则

$$B=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ca_{i1} & ca_{i2} & \cdots & ca_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = c\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = cA.$$

推论 1　若行列式的某一行(或某一列)的元素全为零,则这个行列式的值等于零。

推论 2　若行列式某一行(或列)有公因子 C,则这个 C 可以提取到行列式符号外面来。

性质 3　若行列的两行(或两列)互换,则行列式的值改变符号,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

推论　若行列式 A 有两行(或两列)元素相同,则 $A=0$.

性质 4　若行列 A 有两行(或两行)成比例,则 $A=0$。

性质 5　若行列 A 的某一行(或列)的元素 a_{ij} 都可以分解为元素 b_{ij} 与 c_{ij} 的和,即 $a_{ij}=b_{ij}+c_{ij}(j=1,2,\cdots,n)$,则 A 可分解为两个行列式的和,即

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 6 把行列式 A 的某一行(或列)的元素都乘以一个常数 C 加到另一行(或列)上去,则 A 的值不变,即

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ca_{i1}+a_{j1} & ca_{i2}+a_{j2} & \cdots & ca_{in}+a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

利用以上性质来计算行列式,通常比按定义计算要简便一些。

【例 1】 求下列行列式的值

$$A=\begin{vmatrix} 0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ -a_1 & 0 & a_5 & a_6 & a_7 \\ -a_2 & -a_5 & 0 & a_8 & a_9 \\ -a_3 & -a_6 & -a_8 & 0 & a_{10} \\ -a_4 & -a_7 & -a_9 & -a_{10} & 0 \end{vmatrix}$$

解 分别从 A 的各列中提取(-1),则

$$A=(-1)^5\begin{vmatrix}0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4\\ a_1 & 0 & -a_5 & -a_6 & -a_7\\ a_2 & a_5 & 0 & -a_8 & -a_9\\ a_3 & a_6 & a_8 & 0 & -a_{10}\\ a_4 & a_7 & a_9 & a_4 & 0\end{vmatrix}=-A'=-A$$

即 $A=-A$,从而　$2A=0, A=0$

称这种形式的行列式为反对称行列式,容易得出一般的结论;奇数阶的反对称行列式的值为零,上节例 5 是三阶反对称行列式,故其值为零。

【例 2】 计算下列行列式

$$A=\begin{vmatrix}x & a & a\\ a & x & a\\ a & a & x\end{vmatrix}$$

解　将 A 的第二行乘以 1 然后加到第一行上去,再将第三行乘以 1 然后加到第一行上去,这样,有

$$A=\begin{vmatrix}x+2a & x+2a & x+2a\\ a & x & a\\ a & a & x\end{vmatrix}$$

从第一行提取公因子 $x+2a$,得

$$A=(x+2a)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & x & a\\ a & a & x\end{vmatrix}$$

将第一行乘以$(-a)$后加到第二行上去,同样再将第一行乘以$(-a)$加到第三行上去,得

$$A=(x+2a)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & x-a & 0\\ 0 & 0 & x-a\end{vmatrix}=(x+2a)(x-a)^2$$

【例 3】 求下列行列式的值

$$A=\begin{vmatrix}a & b & c\\ 0 & 2b & 2c\\ 0 & 0 & 2c\end{vmatrix}=4abc$$

【例 4】 求下列行列式的值

$$A=\begin{vmatrix}1 & a & b & c+d\\1 & b & c & d+a\\1 & c & d & a+b\\1 & d & a & b+c\end{vmatrix}$$

解　每一行中出现的字母的和均为 $a+b+c+d$，由此可见，如果将第二列加到第四列上去，再把第三列加到第四列上去，则

$$A=\begin{vmatrix}1 & a & b & a+b+c+d\\1 & b & c & a+b+c+d\\1 & c & d & a+b+c+d\\1 & d & a & a+b+c+d\end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c+d)\begin{vmatrix}1 & a & b & 1\\1 & b & c & 1\\1 & c & a & 1\\1 & a & d & 1\end{vmatrix}=0$$

§1.3　行列式的计算

我们知道，二阶行列式有两项，即

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}\ .$$

而三阶行列式有六项，即

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{21}a_{12}a_{33}+a_{21}a_{13}a_{32}$$
$$+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{13}a_{22}$$

容易算出，四阶行列式有 $4\cdot3\cdot2\cdot1=4!$ 项，…，n 阶行列式有 $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots1=n!$ 项，按定义计算行列式是很麻烦的，利用上节的行列式性质，可以设法把 n 阶行列式的某一行(或列)变成除一个元素外其余元素都是零，这样就变成 $n-1$ 阶的行列式，如此下去，直至成为二阶行列式，计算起来就很方便了，这种方法通常称之为除

阶法，下面举例介绍这种方法。

【例 1】 求下面 4 阶行列式的值。

$$A=\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 6 & -2 & 1 \\ -2 & -5 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

解 首先利用 A 的第一行第三列的元素 1 将 A 变成一个三阶行列式：用 1 乘 A 的第三列然后加到第四列上去；用 (-4) 乘 A 的第三列然后加到第二列上去；再用 (-2) 乘 A 的第三列然后加到第一列上去，这样 A 的值没有改变，而 A 降成一个三阶行列式：

$$A=\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 6 & -2 & 1 \\ -2 & -5 & 3 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & 14 & -2 & -1 \\ -8 & -17 & 3 & 6 \end{vmatrix}$$

$$=1\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & -9 & 7 \\ 4 & 14 & -1 \\ -8 & -7 & 6 \end{vmatrix}$$

再利用这个三阶行列式的第一行第一列的元素 (-1) 把 A 降成一个二阶行列式：用 (-9) 乘第一列然后加到第二列上去；再用 7 乘第一列然后加到第三列上去，则 A 变成一个二阶行列式

$$A=\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 4 & -22 & 27 \\ -8 & 65 & -50 \end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix} -22 & 27 \\ 65 & -50 \end{vmatrix}=655$$

当一个行列式中没有元素是 1 或 (-1) 时，可以用一个数 C 去乘某一行(列)，变出一个元素为 1，这行列式的值增大 C 倍，而且计算出现分数，比较麻烦，可采取其它办法。

【例 2】 计算行列式

$$A=\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ b & b & b & a \end{vmatrix}$$