科學譯叢

數學：第12種

半單純李氏代數的結構

Е. Б. 鄧金 著

科學出版社出版

科學譯叢

——數學：第12種——

半單純李氏代數的結構

E. Б. 鄧 金 著

曾 肯 成 譯

科學出版社出版

1 9 5 4 年12月

內容提要

本文譯自"Успехи математических наук" Т. II, Вып 4(20); 1947, 主要討論複數域上半單純李氏代數的結構，直到單純李氏代數的完全類爲止。由於本文作者引入了半單純李氏代數的素根系這個概念，整個理論的敘述便成爲十分簡潔明晰。

半單純李氏代數的結構

Структура полупростых алгебр Ли

原著者	Е. Б. Дынкин
翻譯者	曾肯成
出版者	科學出版社 北京東四區帽兒胡同二號
印刷者	蔚文印刷廠 上海長樂路256號
總經售	新華書店

(譯) 54070　　1954年12月第一版
自然: 092　　1954年12月第一次印刷
(滬) 0001—3,700　　開本: 787×1092 1/25
字數: 68,000　　印張: 4 8/25
定價: 7,500元

目 錄

緒論……………………………………………………3
§1. 基本概念………………………………………………25
§2. 可解與冪零線性代數……………………………………36
§3. 李氏代數按正則冪零子代數的分解……………………46
§4. 嘉當關於可解代數與半單純代數的鑑定標準…………55
§5. 半單純李氏代數的根系…………………………………62
§6. 半單純李氏代數的素根系………………………………75
§7. 單純李氏代數的分類……………………………………96

半單純李氏代數的結構

李氏代數的進入數學研究領域和李氏羣論有關。索福斯·李的三個基本定理在局部李氏羣和李氏代數之間建立了一個密切的聯系，將局部李氏羣的研究導歸於李氏代數的研究。

古典的李氏代數理論只討論實數域或複數域上的李氏代數，其中研究得最多的是半單純代數。關於半單純李氏代數的結構的主要結果，約在六十年前 (1888—1890) 已由吉林格得出。但在吉林格的工作中，這些結果沒有得到充分的證明。吉林格的研究由嘉當(E. Cartan)所繼續(1894)，嘉當不但填補了吉林格工作中的缺陷，而且還得出了許多重要的新結果。H. 外爾在其發表於 1925 年的工作中給了嘉當的理論的一個新的敍述。外爾的這一新的敍述是爲了適應他所從事的、關於李氏羣的線性表示的問題而給出的，因此他沒有將這一敍述一直進行到半單純李氏代數的完全分類。在這一方面，外爾的工作由 v. d. 瓦爾登所完成。爲了達到這個目的，v. d. 瓦爾登使用了斯庫丁在其講義中所初創的方法。1944 年本文作者參加 И. M. 蓋里范德在莫斯科大學所主持的習明納爾時，提出了半單純李氏代數的素根系這樣一個新的概念，藉這個概念之助可以大大地簡化外爾和 v. d. 瓦爾登的理論❶。

❶ 德國代數學家維特曾給出半單純李氏代數分類的另一簡明理論 (E. Witt, Spiegelungsgruppen und Aufzahlung halbeinfacher Liescher Ringe, Abh, math. Semin. Hansische Univ. 14, 289—312(1941))。維特的方法是在於運用柯克西特所作的關於由反射所演成的歐氏空間有限旋轉羣的分類。

複數域上的半單純李氏代數和緊緻李氏羣之間有着十分密切的聯系。И. М. 蓋里范德所主持的習明納爾的另一參加者 С. Г. 克連茵曾給出了緊緻李氏代數理論的一個十分簡潔明晰的敍述，可惜他的論文一向沒有發表過。所謂緊緻李氏代數卽相當於緊緻李氏羣的代數。在 E. 施梯費爾的論文中曾企圖不通過李氏代數而直接研究緊緻李氏羣，可是沿這一途徑現在還沒有得出緊緻李氏羣的完全分類。

研究半單純李氏代數的結構對闡明一般李氏代數的結構究竟有何作用，這一點由下述的事實可以看出。可解代數乃是在某種意義上和半單純代數相對立的一類代數。由列維所首先證明、而由 А. И. 馬力采夫所進一步改善的一個定理，將複數域上任意李氏代數的研究導歸於半單純代數和可解代數的研究。可解代數在現時是大力研究的對象，但他們的分類還遠沒有得出來。

本文包括複數域上半單純李氏代數理論的敍述，直到作出這一類代數的完全分類爲止。實數域上半單純李氏代數的分類是以複數域上半單純李氏代數的分類及對其自同構的研究爲依據的。雖然在本文中已經具有了研究這些問題的一切必要的基礎，可是我們還是決定不把他們包括進去。同時我們也不論及任意域上半單純李氏代數的結構的問題；雖然關於這些問題已有許多的文獻，但在這方面還沒有得出像對複數和實數域上的半單純李氏代數那樣完整的結果。

除了線性代數的一些基礎知識外，本文不要求讀者具有任何其他預備知識。甚至不熟悉李氏羣的概念也可以讀這篇文

章。但對那些想要了解李氏羣論基礎和李氏羣與李氏代數之間的關係的讀者，我們建議他們去參看 Л. С. 彭特列雅金的專著“連續羣論”。在作者的短文“Вычисление Коэффициентов в формуле Campbell'a-Hausdorff'a”中，有一個根據李氏代數作出李氏羣的簡單方法。

我們所採用的名詞是近世代數學著作中所習用的名詞，和李、吉林格、嘉當以及外爾等人所用的名詞有所不同。爲讀者方便起見，我們開列出一張對照表如下：

本文中所用名詞	舊的名詞
1. 李氏代數	1. 無窮小李氏羣
2. 子代數	2. 無窮小子羣
3. 理想子代數	3. 無窮小正常因子
4. 商代數	4. 無窮小商羣
5. 冪零李氏代數	5. 零階無窮小羣
6. 內微分代數	6. 附屬無窮小羣

最後，作者必須向 Л. И. 柯貝依金娜致謝，她曾閱讀過本文手稿，並提出了許多寶貴的意見。

緒　　論

在緒論裏我們在今後所需要的形式下引述線性向量空間理論中的一些基本事實。這裏，我們要求讀者對線性方程和行列式論的基礎已有初步認識。

熟悉矩陣論的讀者可先將本緒論很快地瀏覽一遍，遇到正文中有引用它的地方，再回過頭來查看。

1. a) 集合 P 稱爲複數域上的一個線性向量空間，如果在 P 中定義了一個加法和一個用複數去乘 P 中元素的乘法，

並且下列的公理 A—C 能被滿足。

A. **加法公理**:

$$\left.\begin{array}{ll} A_1 & (\xi_1+\xi_2)+\xi_3=\xi_1+(\xi_2+\xi_3) \\ A_2 & (\xi_1+\xi_2)=(\xi_2+\xi_1) \end{array}\right\}(\xi_1, \xi_2, \xi_3 \epsilon P).$$

A_3 P 中有一個，而且僅有一個零向量 0，對之

$$\xi+0=\xi \ (\xi\epsilon P).$$

B. **乘數公理**:

$$\left.\begin{array}{ll} B_1 & \lambda(\mu\xi)=(\lambda\mu)\xi \\ B_2 & (\lambda+\mu)\xi=\lambda\xi+\mu\xi \\ B_3 & \lambda(\xi_1+\xi_2)=\lambda\xi_1+\lambda\xi_2 \\ B_4 & 1\cdot\xi=\xi \\ B_5 & 0\cdot\xi=0 \\ B_6 & \lambda\cdot 0=0 \end{array}\right\}(\xi, \xi_1, \xi_2 \epsilon P;\ \lambda, \mu \text{ 是複數}).$$

$\xi-\eta$ 這個式子的意義與 $\xi+(-1)\eta$ 同。由 B_4, B_2 和 B_5 可知，$\xi-\xi=0$.

C. **維數公理**: 集合 P 中存在一組元素 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m$，對於他們下面兩點事實成立:

C_1 P 中任意一個元素 ξ 都可表作

$\xi=\lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2+\cdots+\lambda_m\xi_m$ ($\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 都是複數)。

C_2 C_1 中的表示法是唯一的。

整數 m 稱爲空間 P 的維數。

凡適合條件 C_1 和 C_2 的元素組都稱爲 P 的基。

線性向量空間 P 中的元素稱爲向量，而加法和向量與複數相乘的乘法則稱爲線性運算。

b) 線性向量空間 P 中一組向量 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k$ 稱爲線性相關，如果我們可以找到一組不全爲零的複數 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ 使

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \xi_i = 0. \tag{1}$$

與此相反，如果由等式 (1) 即有 $\lambda_i = 0 (i=1, 2, \cdots, k)$，則向量 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k$ 稱爲線性無關。m 維向量空間 P 中一組向量構成 P 的一個基的充分必要條件是：1) 這一組向量線性無關，2) 它含有 m 個向量。如果某一組向量中向量的數目大於 m，那末這一組向量一定線性相關。任意一組線性無關的向量均可擴充爲 P 的一個基。

c) 空間 P 的一個子集 K 稱爲子空間，如果由 $\xi_1 \in K, \xi_2 \in K$ 即有 $\lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2 \in K$ (λ_1, λ_2 是任意複數)。子空間 K 也是複數域上一個線性向量空間，它的維數不大於 m. 如果 K 的維數等於 m，則 $K = P$.

d) 形如

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \xi_i \tag{2}$$

的一個算式稱爲向量 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k$ 的一個線性組合。線性向量空間中所有能表成 (2) 這種形式的向量，其所組成的集合我們記作 $((\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k))$；集合 $((\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k))$ 是空間 P 的一個子空間。

e) 設 $P_1, P_2, \cdots, P_k$ 是空間 P 的一組子空間。所有

$$\xi = \sum_{i=1}^{\kappa} \xi_i \quad (\xi_i \in P_i) \tag{3}$$

這種形式的向量 ξ，其所組成的集合我們稱作空間 $P_i (i=1, 2,$

$\cdots,k)$ 的和，並記作 $\sum\limits_{i=1}^{k} P_i$ 或 $P_1+P_2+\cdots+P_k$. 集合 $K=\sum\limits_{i=1}^{k} P_i$ 是一個子空間。如果 K 中的每個向量只能用一種方法表成(3)這種形式，我們就說 K 是子空間 $P_1, P_2, \cdots, P_k$ 的直接和，並將其寫作

$$K=\sum_{i=1}^{k}{}^{\cdot} P_i,$$

或

$$K=P_1\dotplus P_2\dotplus\cdots\dotplus P_k.$$

在這時向量 ξ_i (參看 3) 稱爲向量 ξ 在空間 P_i 上的投影。如果將某一子空間 Q 中所有的向量均投影於 P_i 上，則所得出的將是一個包含在 P_i 內的子空間。這個子空間我們稱作 Q 在 P_i 上的投影。空間 P_i $(i=1,2,\cdots,k)$ 的和是一個直接和的充分必要條件是：由等式

$$\sum_{i=1}^{k}\xi_i=0 \ (\xi_i \epsilon P_i)$$

可得出

$$\xi_i=0 \ (i=1,2,\cdots,k).$$

兩個空間 P_1 和 P_2 的和是一個直接和的充分必要條件是：P_1 和 P_2 所含的唯一公共元素是零向量。

如果 $K=P\dotplus Q$, $Q=R\dotplus S$, 則 $K=P\dotplus R\dotplus S$.

設 $K=\sum\limits_{i=1}^{k}{}^{\cdot} P_i$. 如果從每一空間 P_i 中選出一個基，則這些基的併即構成空間 K 的一個基。由此可知 K 的維數等於子空間 $P_i (i=1,2,\cdots k)$ 的維數的和。

f) 設 K 是空間 P 的一個子空間。如果對空間 P 中的兩個向量 ξ 和 η 有 $\xi-\eta\epsilon K$, 我們就寫

$$\xi\equiv\eta \ (\mathrm{mod}\ K)$$

(讀作 ξ 和 η 對模 K 同餘)。空間 P 可分解成爲一些互不相交的同餘類，每個類所包含的向量對模 K 彼此同餘。如果

$$\xi_1 \equiv \eta_1 \pmod K,\ \xi_2 \equiv \eta_2 \pmod K,$$

則

$$\lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2 \equiv \lambda_1\eta_1+\lambda_2\eta_2 \pmod K\ (\lambda_1, \lambda_2 \text{ 爲任意複數}).$$

因此，向量 $\lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2$ 所屬的同餘類僅與向量 ξ_1 和 ξ_2 所屬的同餘類有關，而與向量 ξ_1 和 ξ_2 的本身無關。利用這一點就可以很自然地在同餘類的集合中定義加法和用複數乘同餘類的乘法。這樣一來，同餘類的集合就成了一個線性向量空間。這個空間我們記作 P/K，並稱之爲空間 P 對子空間 K 的商空間。

2. a) 定義於線性向量空間 P 之上而取複數值的函數 $\varphi(\xi)$ 稱爲一個線性型，如果

$$\varphi(\lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2)=\lambda_1\varphi(\xi_1)+\lambda_2\varphi(\xi_2)$$
$$(\xi_1, \xi_2 \in P;\ \lambda_1, \lambda_2 \text{ 爲任意複數}).$$

設 φ_1 和 φ_2 是空間 P 上的任意兩個線性型，這兩個線性型的線性組合 $\varphi=\mu_1\varphi_1+\mu_2\varphi_2$ 我們定義作線型 $\varphi(\xi)$：

$$\varphi(\xi)=\mu_1\varphi_1(\xi)+\mu_2\varphi_2(\xi)\ (\xi \in P).$$

茲證明在這樣定義的線性運算下，m 維空間 P 上所有線性型的集合 $\bar{P}$ 是一個 m 維線性向量空間。公理 A—B 顯然成立。爲驗證公理 C 起見，我們事先隨意取出空間 P 的一個基 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m$. 首先注意，不論 $a_1, a_2, \cdots a_m$ 是怎樣一組複數，我們總可以找到一個，而且是唯一的一個線性型 φ 使

$$\varphi(\xi_i)=a_i\ (i=1, 2, \cdots, n).$$

我們用 φ_i 表示由條件

$$\varphi_i(\xi_k)=\begin{cases}1, \text{如果 } i=k\\ 0, \text{如果 } i\neq k\end{cases}$$

所決定的線性型。很容易看出：任意一個線性型 φ 都可以一意地表成

$$\varphi=\sum_{i=1}^{m} a_i\varphi_i \ (a_i \text{ 是複數})$$

這種形式，這就證明了 $\bar{P}$ 是一個 m 維線性向量空間。

$b)$ 如果對任意 $\xi\epsilon P$, $\varphi(\xi)=0$，則線性型 φ 稱爲零型。如果 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ 是非零線性型，則必存在一個向量 ξ，使 $\varphi_i(\xi)\neq 0$ $(i=1, 2, \cdots, n)$。如果 $n=1$，這個顯然是正確的。玆假定這一斷言對某一 n 正確，進而證明它對 $n+1$ 也正確。根據歸納假定我們可找到一向量 ξ 使 $\varphi_i(\xi)\neq 0 (i=1, 2, \cdots n)$. 如果 $\varphi_{n+1}(\xi)$ 也不等於零，則整個證明到此就告結束。如果 $\varphi_{n+1}(\xi)=0$，則可取一向量 η 使 $\varphi_{n+1}(\eta)\neq 0$. 取複數 μ 使 $\mu\neq -\dfrac{\varphi_i(\eta)}{\varphi_i(\xi)}$ $(i=1, 2, \cdots, n)$，並命 $\xi'=\mu\xi+\eta$. 不難驗證 $\varphi_i(\xi')\neq 0$ $(i=1, 2, \cdots, n+1)$.

3. $a)$ 空間 P 入其自身的映像 $A\xi$ 稱爲一個線性變換或線性運算子，如果

$$A(\lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2)=\lambda_1 A\xi_1+\lambda_2 A\xi_2$$

$$(\xi_1, \xi_2\epsilon P; \text{ 而 } \lambda_1, \lambda_2 \text{ 爲任意複數}).$$

設子空間 K 在變換 A 的作用下不變，即由 $\xi\epsilon K$ 可得出 $A\xi\epsilon K$. 這樣一來，變換 A 就分別在空間 K 和商空間 P/K 中各誘導出一個線性變換，這兩個線性變換我們用同一記號 A 來表示。在空間 P 所有線性變換的集合 L 中也可以引入線性運

算。其辦法就是將 A_1 和 A_2 的線性組合 $A=\mu_1 A_1+\mu_2 A_2$ 定義爲線性變換:

$$A\xi=\mu_1 A_1\xi+\mu_2 A_2\xi \ (\xi\epsilon P).$$

設 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m$ 是空間 P 的一個任意基。任意給出一組向量 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m$, 我們總可以找到一個而且僅有一個線性變換 A, 使

$$A\xi_i=\eta_i \ (i=1, 2, \cdots, m).$$

根據這一點,對任意 $1\leqslant i\leqslant m$, $1\leqslant k\leqslant m$ 我們可以用條件

$$E_{ik}\xi_p=\begin{cases}\xi_i, & \text{如果 } p=k\\ 0, & \text{如果 } p\neq k\end{cases} \tag{4}$$

來定義一個線性變換 E_{ik}. 這樣一來, 任何一個線性變換 A 均可一意地表成

$$A=\sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}E_{ik} \ (a_{ik} \text{ 是複數}) \tag{5}$$

這種形式, 這就是說集合 L 是一個 m^2 維線性向量空間,而元素 E_{ik} $(i, k=1, 2, \cdots, m)$ 則構成這個空間的一個基。普通常將複數 a_{ik} 的全體排成一個正方形表列:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1m}\\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2m}\\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\\ a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mm}\end{pmatrix}.$$

這個表列稱爲線性變換 A 對基 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m$ 的方陣。如果在 $i\neq k$ 時, $a_{ik}=0$, 則 (a_{ik}) 稱爲對角方陣; 如果僅在 $i>k$ 時有 $a_{ik}=0$, 則 (a_{ik}) 稱爲一個三角形方陣。

b) 設 A 和 B 是空間 P 的兩個線性變換。A 和 B 的乘積

AB 我們定義爲變換:

$$(AB)\xi = A(B\xi) \quad (\xi \epsilon P).$$

由等式(4)可知:

$$E_{ik}E_{pq} = \begin{cases} E_{iq}, & \text{如果 } p=k, \\ 0, & \text{如果 } p \neq k. \end{cases} \tag{6}$$

如果(a_{ik}), (b_{ik}) 和 (c_{ik})是變換 A, B 和 C 對基 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m$ 的方陣，且 $AB=C$, 則經過簡單的展開和計算後可以證明

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{jk} \quad (i, k = 1, 2, \cdots, m). \tag{7}$$

如果方陣(a_{ik}), (b_{ik}) 和 (c_{ik}) 適合關係(7), 通常就說方陣(c_{ik})是方陣 (a_{ik}) 和 (b_{ik})的乘積。因此，對任何一個基來說，多個線性變換相乘時，其方陣也相乘。

c) 由等式

$$E\xi = \xi \quad (\xi \epsilon P)$$

所決定的線性變換稱爲單位變換。對於任何一個線性變換 A 永遠有:

$$EA = AE = A.$$

對於空間的任何一個基變換 E 的方陣總是(δ_{ij}), 其中

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{如果 } i=j, \\ 0, & \text{如果 } i \neq j. \end{cases}$$

d) 設 A 是一個線性變換而 ξ_i 和 ξ'_i $(i=1, 2, \cdots, m)$是兩個不同的基，我們用條件

$$\left.\begin{aligned} B\xi_i &= \xi'_i \\ C\xi'_i &= \xi_i \end{aligned}\right\} (i=1, 2, \cdots, m)$$

定義兩個線性變換 B 和 C。變換 A, B 和 C 對基 $\xi_i\ (i=1,2,\cdots,m)$ 的方陣我們記作 (a_{ik})、(b_{ik}) 和 (c_{ik})，並設 (a'_{ik}) 是變換 A 對基 $\xi'_i\ (i=1,2,\cdots,m)$ 的方陣。不難驗證方陣 (a_{ik})，(b_{ik})，(c_{ik}) 和 (a'_{ik}) 之間有關係

$$\left.\begin{aligned}(a'_{ik}) &= (b_{ik})(a_{ik})(c_{ik}),\\ (b_{ik})(c_{ik}) &= (\delta_{ik}).\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

如所周知，多個方陣相乘時它們的行列式也相乘❶。因此由等式 (8) 可知方陣 (a_{ik}) 和 (a'_{ik}) 的行列式相等。根據這個事實我們就可以直接討論變換 A 的行列式而不局限於某一個一定的基。變換 A 的行列式我們記作 $D(A)$.

d) 如所周知，齊次線性方程組

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ik}x_k = 0\ (i=1,2,\cdots,m) \qquad (9)$$

有一個非零解的充分和必要的條件，是方陣 (a_{ik}) 的行列式等於零❷。如果命 $\xi=\sum_{i=1}^{m} x_i\xi_i$，$A=\sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}E_{ik}$，($\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m$ 是某一個基)，則方程

$$A\xi = 0 \qquad (10)$$

可導歸於方程組(9)。因此，滿足方程(10)的向量 $\xi\neq 0$ 存在的充分必要條件是行列式 $D(A)=0$。

4. a) 就空間一個任意的基計算 $D(A-\lambda E)$，我們可得出：

$$D(A-\lambda E) = (-1)^m\lambda^m + (-1)^{m-1}a_1(A)\lambda^{m-1} + \\ + (-1)^{m-2}a_2(A)\lambda^{m-2} + \cdots + a_m(A). \qquad (11)$$

❶ А. Г. 庫羅什：高等代數教程，國家理論技術書籍出版社，1946，118—120 頁。

❷ А. Г. 庫羅什：高等代數教程，107 頁。

根據 $n°3, c)$，係數 $a_i(A)$ $(i=1, 2, \cdots, m)$ 僅與線性變換 A 有關，而與展開行列式 $D(A-\lambda E)$ 時所採用的基無關。多項式(11)稱爲變換 A 的特徵多項式，而其根則稱爲 A 的特徵根。

$b)$ 我們說向量 $\xi \neq 0$ 是變換 A 的固有向量，如果它適合條件

$$A\xi = \lambda\xi. \tag{12}$$

複數 λ 稱爲與固有向量 ξ 相應的固有值。關係式(12)和等式

$$(A-\lambda E)\xi = 0 \tag{13}$$

等價。根據 $n°3, d)$，方程(13)有一解 $\xi \neq 0$ 當且僅當 $D(A-\lambda E) = 0$. 因此，複數 λ 是變換 A 的一個固有值當且僅當它是 A 的特徵根。如果 $m>0$，則多項式(11)和所有非零次的多項式一樣，有 m 個複根。因此，作用於 m 維 $(m>0)$ 空間的任何一個線性變換 A 都有固有值，因而也有固有向量。特言之，變換 A 所誘出的不變子空間 K 的線性變換也有固有向量，也就是說 A 在每一不變子空間 K 中都有固有向量。

$c)$ 任意給定一個線性變換 A，必可選出空間的一個基，使 A 對這個基的方陣是一個三角形方陣。

先取出變換 A 的一個固有向量 ξ_1:

$$A\xi_1 = \lambda_1\xi_1,$$

並考察變換 A 所誘導出的商空間 $P/((\xi_1))$ 中的線性變換。設空間 P 中向量 ξ_2 所屬的同餘類是這個變換的一個固有向量，則

$$A\xi_2 \equiv \lambda_2\xi_2 \ (\mathrm{mod}((\xi_1))),$$

$$\xi_2 \not\equiv 0 \ (\mathrm{mod}((\xi_1))).$$

再下一步我們作商空間 $P/((\xi_1, \xi_2))$，並求一向量 ξ_3 使

$$A\xi_3 \equiv \lambda_3\xi_3 \ (\mathrm{mod}(((\xi_1, \xi_2)))$$

$$\xi_3 \not\equiv 0 \ (\mathrm{mod}(((\xi_1, \xi_2)))$$

並依此類行。在這一方法的第 k 個步驟所得出的 k 個向量 ξ_1, $\xi_2, \cdots, \xi_k$ 是線性無關的。事實上，如果

$$\mu_1\xi_1 + \mu_2\xi_2 + \cdots + \mu_k\xi_k = 0,$$

而 μ_p 是最後一個不等於零的係數，則

$$\xi_p = \sum_{i=1}^{p-1}\left(-\frac{\mu_i}{\mu_p}\right)\xi_i \equiv 0 \ (\mathrm{mod}(((\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{p-1}))).$$

而這是和我們用來決定這 k 個向量的方法相違的。

因爲在一個 m 維空間 P 中不可能有 $m+1$ 個線性無關的向量，所以這裏所描述的過程必定在經過不多於 m 個步驟之後終止。但這個過程在第 k 個步驟終止的必要條件是 $((\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k)) = P$，所以 $k = m$ 而 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m$ 是 P 的一個基。不難證明 A 對這個基的方陣是一個三角形方陣。

我們注意，如果變換 A 對某一基的方陣爲一三角形方陣 (a_{ik})，則

$$D(A - \lambda E) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)\cdots(a_{mm} - \lambda),$$

因而 A 的特徵根和複數 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{mm}$ 一致。

$d)$ 特徵多項式 (11) 的係數 $a_1(A)$ 稱爲變換 A 的跡，並記作 $sp\,A$.

茲舉出跡的若干性質：

$d_1)$ 如果 (a_{ik}) 是變換 A 對某一基的方陣，則由直接的計算可以證明 $sp\,A = \sum_{i=1}^{m} a_{ii}$.

$d_2)$ 由 $c)$ 結尾處所作的按語和 d_1 可知，$sp\,A$ 等於變換 A