国家级骨干教师通解

中学生教材

创新讲解

红本

教材全解

JIEJINSHUXI

捷进书系

精彩无处不在！

主编 洪鸣远

高一数学（上）

中国青年出版社
吉林人民出版社

《中学生教材创新讲解》丛书

编　委　会

前 言

qian yan

中学生学习，教材为“纲”，是学习的范本、考试的蓝本。要学好教材、吃透教材并非易事。目前，中学生学习的最大障碍在于讲练不透，学有“死结”，练有“夹生”。学子们一直在期待着一种能**“讲透”**、**“练透”**的新型教辅图书。今天，由百余位**国家级、省级骨干教师**共同参与、倾力合作编写的中学教材《创新讲解》、《创新练测》大型丛书终于面世了。该丛书由**红、绿两套构成，红本讲，绿本练，红绿配合，讲练互动**，它实现了对教材讲解从“分久必合”到“合久必分”的又一轮回。其中，《创新讲解》(红本)的编写是以**全面解读、深入研究教材**为核心，它具有如下特点：

同步　以课(节)为基本单位编写，严格依照课本的章节顺序，**逐字、逐句、逐图、逐表、逐题**地全面透视和**深度解析教材**。着力体现对教材的辅导与教师的授课进度同步、与学生的学习节奏同步、与中学测验考试同步，最大限度地体现了对学生全程学习的关爱、帮助与精心呵护。

全面　通过对教材面的聚焦、点的展开，既高屋建瓴，又细致入微，全面实现教材知识间的左右贯通，前后纵横。其重点是：对教材线索脉络的梳理，对知识概念的阐释与运用，对知识间内涵本质的挖掘与联系，对各学科、各知识点学习方法的培养和导引。为突出其可操作性，强调的是**案例举证式、解剖麻雀式的实例点评**。

创新 以人为本,以学为本,以学生的发展为本;**体现新一轮中、高考改革精神**,注重学生学科综合能力的培养与提高。依据新教材、提供新材料、开启新视野、引发新思路,激活学生的灵感,开发学生的潜能。思路新、栏目新、材料新。

权威 丛书各科均由国家级、省级骨干教师领衔主笔,强强联合,精英聚会。名师对教材内在精神领会深,重点、难点摸得准,讲解有奇招、指导针对性强。他们的讲解直指学生学习的**疑问点、健忘点、错解点**,颇有独到之处,令教师、学生心领神会、心到神知。

好书一种就够!《中学生教材创新讲解》值得您信赖!为使您获得更好的学习效果,建议在使用《创新讲解》的同时,请选择使用龙门书局出版的本书姊妹篇《创新练测》。

主　　编:洪鸣远

执行主编:陈伟国

2003年5月·北京

目 录

mu lu

第一章 集合与简易逻辑

1.1 集合

目标导航

1. 集合与元素——在课堂上要记住它们的定义并明确二者的关系.
2. 常用数集及其专用记号——记牢.
3. 集合中元素的三个特性——不仅要透彻理解,而且要灵活运用它们解题.
4. 集合的分类及表示方法——要记住三种表示方法并能针对不同的问题选择合适的表示法,有时要注意它们之间的相互转化.

教材全解

知识点1:集合

某些指定的对象集在一起就成为一个集合.集合常用大写的拉丁字母 $A,B,C\cdots$ 表示.

提醒 集合是数学中不加定义的描述性的基本概念.

知识点2:集合的元素

集合中的每个对象叫做这个集合的元素.集合中的元素常用小写的拉丁字母 $a,b,c\cdots$ 表示.

知识点3:元素与集合间的关系

如果 a 是集合 A 的元素,就说 a 属于集合 A,记作 $a\in A$,读作 a 属于集合 A;如果 a 不是集合 A 的元素,就说 a 不属于集合 A,记作 $a\notin A$,读作 a 不属于集合 A.

提醒 ①$a\in A$ 与 $a\notin A$ 取决于 a 是不是集合 A 中的元素.对于任何 a 与 A,在 $a\in A$ 与 $a\notin A$ 这两种情况中必有一种且只有一种成立.

②符号"∈"、"∉"是表示元素与集合之间的关系的，别无它用，请大家要记准了！

知识点4:集合的分类与几种常见的数集

(1)含有有限个元素的集合叫做有限集；

(2)含有无限个元素的集合叫做无限集；

(3)不含任何元素的集合叫做空集.例如，方程 $x^2+1=0$ 在实数范围内解的集合就为空集，空集记作 $\varnothing$；

为了书写的方便，我们规定常见的数集用特定的字母表示，下面是几种常见数集的记法，请大家记住.

(4)全体非负整数的集合简称非负整数集(或自然数集)，记作 $\mathbf{N}$；

(5)非负整数集内排除0的集合，简称正整数集，记作 $\mathbf{N}^*$(或 $\mathbf{N}_+$)；

(6)全体整数的集合简称为整数集，记作 $\mathbf{Z}$；

(7)全体有理数的集合简称为有理数集，记作 $\mathbf{Q}$；

(8)全体实数的集合简称为实数集，记作 $\mathbf{R}$.

知识点5:集合中元素的特性 ➢ 重点

(1)确定性.设 A 是一个给定的集合，a 是某一具体对象，则 a 或者是 A 的元素，或者不是 A 的元素，两种情况必有一种且只有一种成立.

(2)互异性.集合中的元素必须是互异的，也就是说，对于一个给定的集合，它的任何两个元素都是不同的.

(3)无序性.集合与其中元素的排列次序无关，如集合 $\{a,b\}$ 与 $\{b,a\}$ 是同一集合.

知识点6:集合的表示方法 ➢ 难点

(1)列举法

把集合中的元素一一列举出来，写在大括号内表示集合的方法.

提醒 ①元素间用分隔号"，"；

②元素不重复不遗漏；

③元素可无顺序；

④对于含较多元素的集合，如果构成该集合的元素有明显规律，可用列举法.

(2)描述法

把集合中的元素的公共属性描述出来，写在大括号内表示集合的方法.它的一般形式是 $\{p\mid p$ 具有的性质$\}$，其中 p 为代表元素.

提醒 使用描述法时：

①写清楚该集合中元素的代号；

②说明该集合中元素的性质；

③不能出现未被说明的字母；

④多层描述时，要准确使用好"且"、"或"等字眼；

⑤所有描述的内容都要写在集合符号内；

⑥用于描述的语句或符号力求简洁、准确.

(3)图示法

为了形象地表示集合,有时常画一条封闭的曲线,用它的内部来表示一个集合.例如,如图 1-1-1 表示集合{1,2,3}.

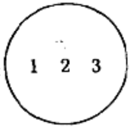


图 1-1-1

解题能力培养 基础篇

例 1 下列各组对象

(1)接近于零的数的全体;

(2)平面上到原点的距离等于 1 的点的全体;

(3)方程 $x^2-9=0$ 在实数内的解;

(4)正三角形的全体;

(5)所有著名的数学家.

其中能构成集合的组数是(　　)

A.2 组　　　　B.3 组

C.4 组　　　　D.5 组

[解] "接近于零的数","著名的数学家"均无明确的标准,无法客观地判断,因此均构不能集合,而(2),(3),(4)都有明确的确定对象,故可构成集合.

∴应选 B.

一些对象构成的集合必须具有以下两个特点:一是整体性,二是确定性.

例 2 集合$\{3,x,x^2-2x\}$中,x 应满足的条件是________.

[分析] 集合的元素必须符合互异性,因此,x 的取值不能使集合中的三个元素有相等情况.

[解] 根据构成集合的元素的互异性,x 应满足$\begin{cases}x\neq 3\\x^2-2x\neq 3\\x^2-2x\neq x\end{cases}$

解之,得 $x\neq 3$ 且 $x\neq 0$ 且 $x\neq -1$.

例 3 下列写法是否正确,请说明理由.

(1)$\mathbf{Z}=\{$全体整数$\}$;

(2)$\mathbf{R}=\{$实数集$\}$;

(3)$\{(0,0)\}=\{0\}$;

(4)$\{(x,y)\mid x=1,y=2\}=\{(1,2)\}$.

[解] 都是错误写法.

(1)集合符号"{ }"已包含有"全体"的意思,因此正确的写法是 $z=\{$整数$\}$;

(2)"{ }"就是集合的符号,因此用描述法表示集合时,大括号内不应再有

"所有"、"集"等词语,故正确写法应为 $\mathbf{R}=\{实数\}$;

(3)$\{(0,0)\}$表示直角坐标平面上的点$(0,0)$,而$\{0\}$表示数 0,它们不是一回事;

(4)$\{(x,y)|x=1,y=2\}$表示直角坐标平面上的两条直线 $x=1$ 及 $y=2$,而$\{(1,2)\}$仅表示一个点,它们不相等.

想一想 集合$\{(x,y)|x=1且y=2\}$与$\{(1,2)\}$是不是一回事?

例 4 用列举法表示下列集合

(1)$\{(x,y)|x+y=6,x\in\mathbf{N}^*,y\in\mathbf{N}^*\}$;

(2)$\{x|x=\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b},a,b$ 为非零实数$\}$.

[解] (1)$\because x\in\mathbf{N}^*$,有

$x=1,2,3,\cdots$,

又 $y\in\mathbf{N}^*$,有

$y=1,2,3,\cdots$,

而 $x+y=6$,故满足此方程

$\begin{cases}x=1\\y=5\end{cases}$ $\begin{cases}x=2\\y=4\end{cases}$ $\begin{cases}x=3\\y=3\end{cases}$ $\begin{cases}x=4\\y=2\end{cases}$ $\begin{cases}x=5\\y=1\end{cases}$

故(1)用列举法可表示为$\{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$.

(2)关键是根据实数绝对值的意义,化简 $x=\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}$,

当 $a>0,b>0$ 时,$x=2$;

当 $a<0,b<0$ 时,$x=-2$;

当 a,b 异号时,$x=0$.

故(2)用列举法可表示为$\{-2,0,2\}$.

点拨 列举法表示集合的优点是集合中的元素清晰可见,一目了然.

例 5 用描述法表示下列集合

(1)使 $y=\frac{1}{x^2+x-6}$ 有意义的实数 x 的集合;

(2)二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 图象上的所有点的集合;

(3)$\left\{(x,y)\middle|\begin{cases}2x+3y=1\\3x-2y=3\end{cases}\right\}$.

[解] (1)要使分式有意义,则必有 $x^2+x-6\neq0$.

解之,得

$x\neq2$,且 $x\neq-3$.

故(1)为$\{x|x\neq2$ 且 $x\neq-3\}$;

(2)题设条件中的"二次"隐含着 $a\neq0$.

故(2)为$\{(x,y)\mid y=ax^2+bx+c,a\neq0$ 且 $x\in\mathbf{R}\}$;

(3)解方程组

$\begin{cases}2x+3y=1\\3x-2y=3,\end{cases}$得

$\begin{cases}x=\dfrac{11}{13}\\y=-\dfrac{3}{13}\end{cases}$.

故(3)为$\left\{(x,y)\,\middle|\,\begin{cases}x=\dfrac{11}{13}\\y=-\dfrac{3}{13}\end{cases}\right\}$.

想一想 上题中若将(3)表示为$\{x=\frac{11}{13},y=-\frac{3}{13}\}$,$\{\frac{11}{13},-\frac{3}{13}\}$,$\{(\frac{11}{13},-\frac{3}{13})\}$对吗?

例6 将下列集合改为用符号语言描述

(1){被3除余1的数};

(2){到直角坐标系中横轴和纵轴距离相等的点}.

[解] (1)$\{x\mid x=3k+1,k\in\mathbf{Z}\}$;

(2)$\{(x,y)\mid y=\pm x,x\in\mathbf{R}\}$.

同一数学对象的不同形态语言的表达方法及互译(尤其是文字语言译为数学符号语言)对数学学习大有裨益,因此我们要高度重视.

例7 用符号$\in$或$\notin$填空

(1)$2\sqrt{5}$________$\{x\mid x<\sqrt{19}\}$,$\sqrt{2}+\sqrt{5}$________$\{x\mid x\leqslant2+\sqrt{3}\}$;

(2)3________$\{x\mid x=n^2+1,n\in\mathbf{N}\}$,5________$\{x\mid x=n^2+1,n\in\mathbf{N}\}$.

[解] (1)$\because 2\sqrt{5}=\sqrt{20}>\sqrt{19}$,$\therefore 2\sqrt{5}\notin\{x\mid x<\sqrt{19}\}$;

$\because(\sqrt{2}+\sqrt{5})^2=7+2\sqrt{10}=7+\sqrt{40}<7+\sqrt{48}=7+4\sqrt{3}=(2+\sqrt{3})^2$,

$\therefore\sqrt{2}+\sqrt{5}<2+\sqrt{3}$.

故 $\sqrt{2}+\sqrt{5}\in\{x\mid x\leqslant2+\sqrt{3}\}$;

(2)令 $n^2+1=3$,得

$n=\pm\sqrt{2}\notin N$;

令 $n^2+1=5$,得

$n=\pm2,\pm2\in\mathbf{N}$,

故填$\notin$,$\in$.

确定元素是否在集合中,要根据元素是否满足代表元素所适合的条件

来判定.

易错、易混点警示 本节易错点是,对于集合的表示问题,不仅要合理确定用哪种方法表示集合,而且要确定属于哪类集合,是数集、点集还是图形?

例8 用适当方法写出方程组$\begin{cases}x+y=1\\x-y=-1\end{cases}$的解集.

[错解1] 用列举法写为$\{x=0,y=1\}$;

[错解2] 用列举法写为$\{0,1\}$;

[错解3] 用描述法写为$\{(x,y)\mid x=0$或$y=1\}$

[错解分析] 错解1既不是列举法也不是描述法,更不符合集合表示法的模式;错解2误认为$\{0,1\}=\{(0,1)\}$;错解3中的元素有无限多个,它表示这样的点$(0,y)$或$(x,1)$.

[正解] $\begin{cases}x+y=1\\x-y=-1,\end{cases}$

解这个方程组,得

$\begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}$

用列举法写为$\{(0,1)\}$.

综合创新与应用/提高篇

例9 设集合$A=\{x\mid x=2k,k\in\mathbf{Z}\}$,$B=\{x\mid x=2k+1,k\in\mathbf{Z}\}$,$C=\{x\mid x=4k+1,k\in\mathbf{Z}\}$,又有$a\in A$,$b\in B$,试判断$a+b$与$A,B,C$的关系.

[解] $\because a\in A$,$\therefore a=2k_1(k_1\in\mathbf{Z})$,

又$\because b\in B$,$\therefore b=2k_2+1(k_2\in\mathbf{Z})$.$\therefore a+b=2(k_1+k_2)+1$

又$\because k_1+k_2\in\mathbf{Z}$,$\therefore a+b$为奇数

$\therefore a+b\in B$,$a+b\notin A$.

当k_1+k_2为偶数时,$a+b\in C$;

当k_1+k_2为奇数时,$a+b\notin C$.

例10 已知$A=\{x\mid x^2+px+q=x\}$,$B=\{x\mid (x-1)^2+p(x-1)+q=x+1\}$,当$A=\{2\}$时,求集合$B$.

[分析] 要正确理解$A=\{2\}$的含义,一是$2\in A$,即方程$x^2+px+q=x$有解$x=2$;二是$x=2$是$x^2+px+q=x$的两个相等的实根.

[解] 由$A=\{2\}$,得

$x=2$是方程$x^2+px+q=x$的两个相等的实根,从而有

$\begin{cases}4+2p+q=2\\(p-1)^2-4q=0.\end{cases}$

解之,得$p=-3$,$q=4$.

从而 $B=\{x|(x-1)^2-3(x-1)+4=x+1\}$

解方程$(x-1)^2-3(x-1)+4=x+1$,得 $x=3\pm\sqrt{2}$.

故 $B=\{3-\sqrt{2},3+\sqrt{2}\}$.

点拨 当集合为单元集时,要对这个元素给予深刻正确的理解.有时这个元素代表惟一的一个,有时这个元素代表两个或两个以上重复的元素.

发散思维点拨/高级篇

例 11 已知集合 $A=\{x\in\mathbf{R}|ax^2-3x+2=0,a\in\mathbf{R}\}$,若 A 中元素至多只有一个,求 a 的取值范围.

[分析] 讨论方程 $ax^2-3x+2=0$ 实数根的情况,从中确定 a 的取值范围,依题意方程有一个实数根或有两个相等的实数根或无实数根.

[解] (1)当 $a=0$ 时,原方程变为 $-3x+2=0$, $x=\frac{2}{3}$,符合题意.

(2)当 $a\neq0$ 时,方程 $ax^2-3+2=0$ 为一元二次方程.

$\Delta=9-8a\leqslant0$,

$a\geqslant\frac{9}{8}$.

所以当 $a\geqslant\frac{9}{8}$时,方程 $ax^2-3x+2=0$ 无实数根或有两个相等的实数根,符合题意.

综合(1),(2)知 a 的取值范围为

$a=0$ 或 $a\geqslant\frac{9}{8}$.

实力检测

1. 数 0 与集合$\varnothing$的关系是(　　)

A. $0\in\varnothing$　　B. $0=\varnothing$

C. $\{0\}=\varnothing$　　D. $0\notin\varnothing$

2. 已知集合 $M=\{$大于 -2 且小于 1 的实数$\}$,则下列关系式正确的是(　　)

A. $\sqrt{5}\in M$　　B. $0\notin M$

C. $1\in M$　　D. $-\frac{\pi}{2}\in M$

3. 集合 $M=\{a|a=\frac{m}{|m|}+\frac{n}{|n|}+\frac{p}{|p|}+\frac{mnp}{|mnp|},m,n,p\in\mathbf{R}\}$,用列举法表示的集合是(　　)

A. $\{-4,4\}$　　B. $\{4\}$

C. $\{-4\}$　　D. $\{-4,0,4\}$

4. 若集合 $A=\{x|x^2+ax+b=x\}$中仅有一个元素 a,求 a,b 的值.

5. 设集合 $A=\{x\mid x=a+b\sqrt{2},|a^2-2b^2|=1,a\in\mathbf{Z},b\in\mathbf{Z}\}$.

求证：当 $x\in A$ 时，有 $\frac{1}{x}\in A$.

实力检测题参考答案

1. D　点拨：数 0 为元素，$\varnothing$ 为空集.

故选 D

2. D　点拨：$\because -2<-\frac{\pi}{2}<1$，$\therefore -\frac{\pi}{2}\in M$.

3. D　点拨：分 m,n,p 的正负讨论之.

4. 略解　由题意知，方程

$x^2+(a-1)x+b=0$ 有等根 $x=a$.

$$\therefore\begin{cases}(a-1)^2-4b=0\\a^2+(a-1)\cdot a+b=0.\end{cases}$$

$$\therefore\begin{cases}a=\frac{1}{3}\\b=\frac{1}{9}.\end{cases}$$

5. 略证　若 $x\in A$，则存在 $m\in\mathbf{Z},n\in\mathbf{Z}$ 使 $x=m+n\sqrt{2}$，且 $|m^2-2n^2|=1$，即 $m^2-2n^2=\pm1$.

这时，

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{m+n\sqrt{2}}=\frac{m-n\sqrt{2}}{m^2-2n^2}$$

$$=\pm(m-n\sqrt{2})$$

$$=(\pm m)+(\pm n)\sqrt{2},$$

$\because m\in\mathbf{Z},n\in\mathbf{Z}$,

$\therefore \pm m\in\mathbf{Z},\pm n\in\mathbf{Z}$.

且　$|(\pm m)^2-2(\pm n)^2|$

$=|m^2-2n^2|=1$. $\therefore \frac{1}{x}\in A$.

教材习题答案

习题 1.1

1. (1) $\notin$　　(2) $\notin$　　(3) $\in$　　(4) $\notin$

2. (1) {红色，黄色}，有限集

(2) {珠穆朗玛峰}，有限集

(3) {1,2,3,12,13,23,123,132,213,231,312,321,21,31,32}，有限集

(4) $\{(x,y)\mid |PO|=l,(x,y)$ 为 P 点坐标$\}$，无限集

3. (1) $\{x\mid x=4n-3,n=1,2\}$

(2) $\left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2},\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

(3) $\{x \mid x=2n, n\in \mathbf{N}$ 且 $1\leqslant n\leqslant 4\}$

(4) $\{4,5,6\}$.

1.2 子集、全集、补集

目标导航

1. 子集、真子集、全集、补集——在课内能够记住定义并理解其含义；
2. 包含、相等、空集、全集的定义——记牢；
3. 有关术语和符号——要准确地把握并能灵活使用它们解决一些简单的问题；
4. 两个集合关系——根据定义加以判断.

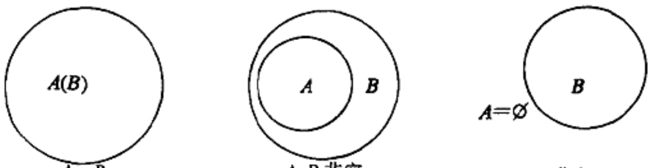
教材全解

知识点1：子集、真子集的概念 ➢重点

一般地，对于两个集合 A 与 B，如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，我们说集合 A 包含于集合 B，或集合 B 包含集合 A，记作 $A\subseteq B$（或 $B\supseteq A$），这时我们也说集合 A 是集合 B 的子集.

对于两个集合 A 与 B，如果 $A\subseteq B$，并且 $A\neq B$ 我们就说 A 是 B 的真子集，记作 $A\subsetneqq B$（或 $B\supsetneqq A$）

提醒 (1)子集、真子集这两个概念是由讨论集合与集合间关系引起的，它们的定义是从元素的从属关系角度叙述的，两个集合 A 与 B，当 A 是 B 的子集时，有如下关系如图1-2-1、图1-2-2、图1-2-3.



A = B 图1-2-1　　A、B 非空 图1-2-2　　B 非空 图1-2-3

由(1)知：不能把子集理解为由一个集合的部分元素组成的新集合.其后两种情况时：$A \subsetneqq B$，即在 B 中至少存在一个元素不在 A 中，“$\subsetneqq$”也可理解为“$A \subseteq B$ 且 $A \neq B$”.

(2)空集与其他集合的关系：

①空集是任何集合的子集；

②空集是任何非空集合的真子集.

知识点 2:子集的性质

(1)自反性：$A \subseteq A$.

(2)传递性：若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq C$ 则 $A \subseteq C$.

若 $A \subsetneqq B$ 且 $B \subsetneqq C$ 则 $A \subsetneqq C$.

(3)集合相等：若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$，则 $A = B$.

该性质常用于判断集合相等.

知识点 3:子集个数问题

由单个元素集 $\{a\}$ 有两个子集：$\varnothing$，$\{a\}$，两个元素集合 $\{a,b\}$ 有四个子集：$\varnothing$，$\{a\}$，$\{b\}$，$\{a,b\}$；三个元素的集合 $\{a,b,c\}$ 有八个子集：$\varnothing$，$\{a\}$，$\{b\}$，$\{c\}$，$\{a,b\}$，$\{b,c\}$，$\{a,c\}$，$\{a,b,c\}$；……，可归纳出：若一个集合共有 n 个元素，则它有 2^n 个子集，有 2^n-1 个真子集，有 2^n-2 个非空真子集.

知识点 4:全集与补集的概念

如果集合 S 含有我们要研究的各个集合的全部元素，这个集合就可以看作一个全集，常用 U 来表示.

提醒 全集是把所有的要研究的对象集在一起组成的大集合，它是相对的，人为规定的概念，不能理解为最大的集合.

一般地设 S 是一个集合，A 是 S 的一个子集(即 $A \subseteq S$)，由 S 中所有不属于 A 的元素组成的集合，叫做 S 中子集 A 的补集(或余集)记作 $\complement_S A$，即：$\complement_S A = \{x \mid x \in S, 且\ x \notin A\}$

提醒 (1)在谈补集时，一定要清楚是在哪个全集中的补集，对不同的全集，同一个集合的补集也不同.例如：

$U=\{1,2,3,4\}$，$S=\{1,2,3,4,5\}$，$A=\{1,2,3\}$ 则 $A \subseteq U$ 且 $A \subseteq S$ 但是 $\complement_U A=\{4\}$，$\complement_S A=\{4,5\}$.

(2)要注意 A 一定要是 S 的子集方可有 $\complement_S A$ 概念.

知识点 5:全集与补集的性质

(1) $\complement_U U=\varnothing$　(2) $\complement_U \varnothing = U$　(3) $\complement_U(\complement_U A)=A$.

知识点 6:子集、全集、补集与逻辑知识的联系

(1) A 中元素具备性质 p，若 $A \supseteq B$，则 B 中元素也具备性质 p，反之不然.

(2) A 与 $\complement_U A$ 中元素同时具备 U 中元素性质 p，但是对性质 q，A 中元素具备性质

q,但$\complement_U A$ 中元素不具备性质 q,因而$\complement_U A$ 有时也称非 A 即补集具有否定含义.

知识点 7:补集既可以认为是集合与集合的关系,也可以认为集合与集合的运算,因此常会已知两个集合,求一个集合在另一个集合中的补集,此时要注意全集范围.

如:$A=\{x\mid x=2n,n\in \mathbf{N}\}$,

则:$\complement C_{\mathbf{N}}A=\{x\mid x=2n+1,n\in \mathbf{N}\}$;

$\complement C_{\mathbf{Z}}A=\{x\mid x=2n+1$ 或 $x=-k,n\in \mathbf{N},k\in \mathbf{N}_+\}$.

知识点 8:符号

(1)“$\subseteq$”与“$\subset$”是完全相同的符号,表示“包含于”用于集合和集合之间.

(2)“$\subseteq$”、“$=$”,“$\subsetneqq$”,“$\not\subseteq$”都用于集合与集合之间要区分出“$\not\subseteq$”与“$\subsetneqq$”.

(3)$\complement_S A$ 中读法为:“集合 S 中子集 A 的补集”.

解题能力培养 基础篇

例 1 下列命题正确的是(　　)

A. 任何一个集合必有两个或两个以上的子集

B. 任何一个集合必有一个真子集

C. 如果 $A\subseteq B$,那么凡元素不属于 B,则必不属于 A

D. 空集不是空集的子集

[解] 此题主要考察对子集,真子集概念的理解以及空集的有关问题.只要注意以下几个结论:①任何非空集合既有子集又有真子集,而空集只有子集没有真子集.②空集是任何集合的子集.是任何非空集合的真子集。故 A、B、D 是错误的,应选 C.

例 2 设 $I=\{2,4,1-a\}$,$A=\{2,a^2-a+2\}$,若$\complement_I A=\{-1\}$,求 a.

[分析] 此题既要用到补集知识得知 -1 在 I 中而不属于 A,又要注意集合元素的互异性防止 I 或 A 中元素重复.

[解] 方法一:$\because \complement_I A=\{-1\}$　$\therefore -1\in I$　$\therefore 1-a=-1$　$\therefore a=2$ 代入 A 得 $A=\{2,4\}$,$\therefore a=2$.

方法二:$\because \complement_I A=\{-1\}$　$\therefore -1\notin A$　$\therefore a^2-a+2=4$ 解得 $a=2$ 或 -1,把 $a=-1$ 代入 A 中得 $a^2-a+2=2$ 不满足 A 中元素的互异性,故 $a=2$.

例 3 设集合 $A=\{x,y,x+y\}$,$B=\{0,x^2,2x+y\}$,且 $A=B$。求实数 x,y 的值.

[解] 当 $x=0$ 时,$x^2=0$,根据集合元素的互异性,$x=0$ 不合题意,舍去。同理 $y=0$ 舍去,因此只有 $x+y=0$ 于是得:$\begin{cases}x+y=0\\y=x^2\\x=2x+y\end{cases}$,或$\begin{cases}x+y=0\\x=x^2\\y=2x+y\end{cases}$.解之得:

$\begin{cases}x=-1\\y=1\end{cases}$

点拨 关于已知两个集合相等求它们元素问题,主要是根据集合相等定义列方程组解决,但还应注意集合中元素的互异性和无序性.对于 A 与 B 相等的证明问题既要证明 $A\subseteq B$,同时还要证明 $B\supseteq A$.

例 4 设集合 $A=\{-1,1\}$,集合 $B=\{x|x^2-2ax+b=0\}$,若 $B\neq\varnothing,B\subseteq A$,求 a,b 值.

[解] $\because B\neq\varnothing,B\subseteq A,\therefore$ 集合 B 为集合 A 的非空子集.

当 $B=\{1\}$ 时,$\begin{cases}\Delta=4(a^2-b)=0\\1^2-2a\times1+b=0\end{cases}$ 解之得 $a=b=1$;

当 $B=\{-1\}$ 时,$\begin{cases}\Delta=4(a^2-b)=0\\(-1)^2-2a\times(-1)+b=0\end{cases}$ 解之得 $a=-1,b=1$;

当 $B=\{-1,1\}$ 时 $\begin{cases}1^2-2a\times1+b=0\\(-1)^2-2a\times(-1)+b=0\end{cases}$ 解之得 $a=0,b=-1$;

综上所述 a,b 值为 $\begin{cases}a=1\\b=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-1\\b=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=0\\b=-1\end{cases}$.

点拨 分类讨论是处理集合与子集之间关系的常用方法.

例 5 设集合 $S=\{x|x=12m+8n,m、n\in\mathbf{Z}\}$,$P=\{x|x=20p+16q,p,q\in\mathbf{Z}\}$ 求证:$S=P$

[分析] 根据集合相等定义知,要证明 $S=P$ 应分两步.第一步先证 S 中元素必是 P 中元素,即 $S\subseteq P$.第二步再证明 P 中元素必是 S 中元素即:$P\subseteq S$

[解] 证明:(1)任取 $x_1\in S,x_1=12m+8n,m\in\mathbf{Z},n\in\mathbf{Z}$

$\therefore x$ 亦可表示为 $\begin{cases}20m+16\dfrac{n-m}{2}(m,n\text{ 同奇同偶})\\20(m-2)+16\dfrac{n-m+5}{2}(m,n\text{ 一奇一偶})\end{cases}$

$\because m、n\in\mathbf{Z}$ $\therefore \dfrac{n-m}{2}\in\mathbf{Z}$($m,n$ 同奇同偶)且 $\dfrac{n-m+5}{2}\in\mathbf{Z}$($m,n$ 一奇一偶) $\therefore x_1=20p_o+16q_o,p_o,q_o\in\mathbf{Z}$, $\therefore x_1\in P$, $\therefore S\subseteq P$;

(2)任取 $x_2\in P$,即:$x_2=20p+16q,p\in\mathbf{Z},q\in\mathbf{Z}$ $\therefore x_2=12p+8(p+2q)$,

$\because p\in\mathbf{Z},q\in\mathbf{Z}$ $\therefore p+2q\in\mathbf{Z}$ $\therefore x_2=12m_o+8n_o,m_o、n_o\in\mathbf{Z}$ $\therefore x_2\in S$,

$\therefore P\subseteq S$,从而 $S=P$.

例 6 已知全集 $U=\{1,2,x^2+x\}$,$A=\{1,x^2-2\}$,$\complement_UA=6$,求实数 x 的值.

[分析] $\complement_UA=\{6\}$ 有两层意义,第一层含义是 $6\in U$,第二层是 $6\notin A$.

[解] $\because\complement_UA=\{6\}$, $\therefore 6\in U$ 且 $6\notin A$ $\therefore x^2+x=6$ 解之得 $x=2$ 或 $x=-3$.当 $x=2$ 时,$x^2-2=2$ 符合题意,当 $x=-3$ 时,$x^2-2=7\notin U$ $\therefore x=-3$(舍