

科学数学解谜

KEXUE SHUXUE JIEMI

——中学数学新视角

曲少云 著



《科学数学解谜》以图文并茂、妙趣横生的形式讲述“深奥”的数学，让每一个中学生从这里找到学习数学的新途径。学会数学，会学数学。

33.6

山西科学技术出版社

276

G63.6

Q.6

科学数学解谜

——中学数学新视角

曲少云 著



A1037508

山西科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

科学数学解谜/曲少云著. —太原:山西科学技术出版社, 2003. 1

ISBN 7 - 5377 - 2039 - 8

I . 科… II . 曲… III . 数学 - 普及读物 IV . 01 - 49

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2002) 第 057089 号

科学数学解谜

作 者: 曲少云

出版发行: 山西科学技术出版社

社 址: 太原市建设南路 15 号

邮 编: 030012

编辑部电话: 0351 - 4922073

发行部电话: 0351 - 4922121

E - mail: cszcc2643@sina.com

印 刷: 山西科林印刷有限公司

开 本: 850 × 1168

字 数: 132 千字

印 张: 5.25

版 次: 2003 年 1 月第一版

印 次: 2003 年 1 月第一次印刷

印 数: 1 - 5000 册

书 号: ISBN 7 - 5377 - 2039 - 8/O·75

定 价: 10.00 元

如发现印、装质量问题,影响阅读,请与发行部联系调换。

目 录

开场	(1)
第一章 认识数学	(1)
(一)从数觉说起	(2)
(二)图形识别	(8)
(三)上帝之数	(15)
(四)数学与生活	(21)
第二章 算术与代数	(24)
(一)算术与四则运算	(25)
(二)代数点滴	(31)
(三)方程	(40)
(四)不等式	(44)
(五)了解我们的《九章算术》	(46)
第三章 了解几何	(50)
(一)几何渊源	(51)
(二)尺规作图	(52)
(三)几何的诞生	(54)
(四)三大不可能的作图难题	(65)
第四章 无理数和函数	(69)
(一)实数	(70)
(二)形象化的代数	(77)

(三)函数	(83)
(四)统计初步	(91)
(五)从赌博中产生的	(93)
第五章	(96)
(一)《几何原本》	(97)
(二)已知的东西	(98)
(三)命题的证明	(105)
(四)再视勾股定理	(120)
(五)勾股定理的证明	(124)
第六章 丰满的几何	(127)
(一)平面相似形问题	(128)
(二)丰富的平面图形	(136)
(三)美妙的镶嵌	(148)
结束语	(155)

第一章 认识数学

数和形是数学中最基本的两个问题。

数的概念从何而来?人类是怎样开始计数的?万千世界如何识别?它又如何影响到人对自然的认识?这既是数学问题,又是人类数学意识的形成问题。人类从数觉开始认识数,运用基本形状进行图形识别,蒙昧中创造了神秘的数论。

本章中,我们先讨论数的由来,接着回顾基本的图形,最后介绍数论——一门在人类发展的幼稚年代偶然出现的数学学科。了解这些数学源头,对后续知识的理解具有重要的意义。

(一)从数觉说起

匹配起来

记数制

现代命数法

其他记数方法

(二)图形识别

(三)上帝之数

数的解释

数论重要部分——质数

(四)数学与生活

(一)从数觉说起

“数学把我们带进绝对必要的区域，这个区域是不仅真实世界而且每一个可能世界都一定适合的。”

—— 阿尔伯特·爱因斯坦

有这样一个故事，说有个田主决心要打死一只在他庄园的望楼里筑巢的乌鸦，他试了好多次想不惊动它，始终没有成功：因为人一走近，乌鸦就离开了巢，飞开了。它栖在不远的树上守着，等到人离开了望楼，才肯飞回巢去。有一天，这田主定下了一个计策：两个人走进望楼，一个留着，一个出来走开了，但是乌鸦并不上当：它老等着，直到留在望楼里的人也走出来才罢。这个试验一连做了几天：两个人，三个人，四个人，都没有成功。末了，用了五个人：也像以前一样，先都进了望楼，留一个在里面，其他四人走出来离开了，这次乌鸦却数不清了，它不能辨别四和五，马上就飞回巢去了。……



图 1-1 乌鸦与人

很难想象：如果我们人类现在只有和乌鸦一样的数觉，世界将是怎样？但事实是，人的数觉最初十分有限，以至于连乌鸦都可与我们一比高下，一种比鸟类高强不了多少的原始的数觉是我们早期数概念的核心。

匹配起来

经历了一连串特殊的环境，我们的祖先对自然界有了一定的亲身体验和了解，学会了一种技巧来给他们帮忙。

这在他们初次驯化野兽时突出表现出来：为了记录畜群的数目，他们用一粒小石卵代替一只羊、两粒代替两只……，一堆石卵代替一群羊。不论是放羊时还是送羊归圈，采用这种方法都能较清晰地记录下羊对应石粒的数目。这种数字根源的实例到今天还能在不少原始语言中找到痕迹。如英文中的 *calculate* (计算) 就来源于拉丁文的 *calculus* (石卵) 一词。

不过，这种匹配只能算是一种对应，还不能说产生了绝对意义下的数。

慢慢地，他们开始了较稳定的农耕和牧业生活。单一的匹配方法不能解决自然界众多“量”的意义，于是经过观察，他们逐渐找到了一些标准：鸟的翼可以代表 2，苜蓿叶代表 3，兽足代表 4，自己的手指代表 5。要想把收获的农作物及牲畜的数量告诉周围的人，只消把它们拿出来表示就可以了。由此，显露出数本身的绝对意义。

这样看来，是人类生存的需要提供了数字优先发展的条件。

在进一步的交流中，他们发现了手指的快捷和实用：一指代表 1，二指代表 2，…，五指代表 5 (最早应用的就是五指的功能)；要想表示 6，再拿一只手出来；而要想表示 11，连脚也用上，……当人们用手指既可以代表 5 只羊，又可以代表 5 个人或别的什么东

西时,数的抽象概念随即形成。

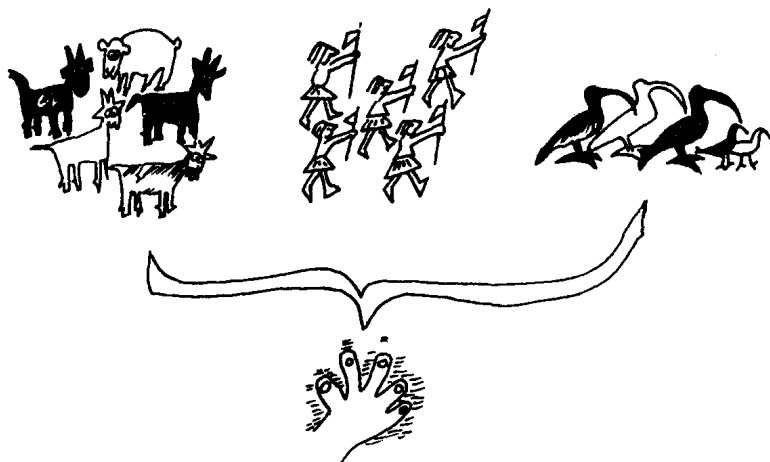


图 1-2 数的诞生:各种 5 的意义

可以说,发现手指可以代替事物量的多少,在当时可谓“创世之举”。后面我们将会看到人类双手创造的奇迹。

记数制

最初人类借助手指这个工具,不自觉地屈回或伸出,以表达事物的个数。随着人类的不断强大,需要表达的事物也以超忽想象的速度扩大。怎样以有限的手指作为工具表达大数呢?记数制在这种需要中产生,它用来记录或表达数目,其思想是,用尽可能少的记号和尽可能简单的约定将所有的数表示出来。

人们想到得比较多的是用进位的办法。

进位法遵循位置原则。位置原则的涵义是,一个数字的值不仅依赖于它在自然序列中的意义,同时也依赖于它在数组中相对于其他数的位置。同一个 2,在 342,725,245 三数中,意义是各不相同的:在第一个数中,它代表二;在第二个数中,代表二十;在第三个数中,代表二百。

手指毫无疑问地影响了我们记数制的选择，也许你不相信——是人类生理上的凑巧，创造了“逢十进一”的十进制：它是以十为基数，十以下的数都有独立的名称，十以上则按照组合原则利用最初的十个记号进行表示的记数方法。^[1]

可以说，人是万物的尺度。

现代命数法

最早人们是利用计数盘来表示计数的。342 是用下图表示的。



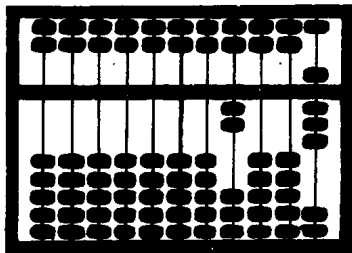
图 1-3 计数盘

可是还有一个困难：当我们想把计数盘上的演算永久记录下来时，会遇到这样的障碍： $\equiv \equiv$ 这样一个记号，可以代表下列任何一个数字：32, 302, 320, 3002 等等。

也许你已经着急了，咳！太简单了，最笨的学生也不难领会。

这正是我要告诉你们的：为避免模糊，必须找出某种办法，把其中的空隙表示出来，即我们需要一个表示空位的记号。

中国的算盘可谓这种空位思想的最早发源。



算盘上的“0”

[1]进位系统不只有十进制，还有二进制、八进制、十六进制、二十进制、六十进制。

图 1-4 算盘:这算盘上算珠所代表的值为 2008

它依据进位原则,在某一位满十时空出这一位,进而到它的下一位继续计数。但问题是,算盘可以解决一时的数字结论,这样一个什么符号都没有的空位还是不能解决因记录带来的不便。

于是空位符号应运而生。也就是说,空位——即我们现代的零——是为了永久记录的准确性偶然产生的。这种巧妙的方法意义深远,是一件有世界意义的大事,是印度无名氏在公元初期的几个世纪发明的。它使我们从此可以用有限记号来表示一切的数,每个记号不但有绝对的值,而且有位置的值。这就是现代命数法。

简练、明晰的现代命数法将位置原则和空位意义合二为一,作为一项伟大发明引领人类走出了数学荒凉停滞的地带。

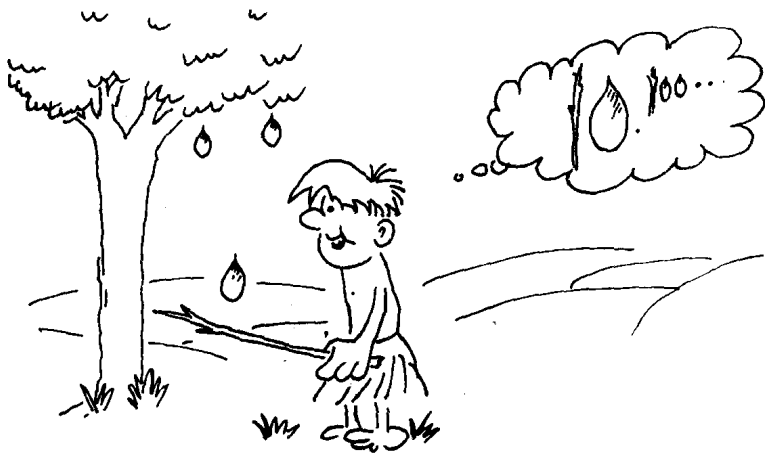


图 1-5 荒漠遇甘露

后来,聪明的阿拉伯人将其溶入自己简便的数字系统中,产生了0,1,2,3,4,5,6,7,8,9十个记号,用它们表示一切的数,伴随殖民扩张传入意大利以至全世界。今天我们所用的方便的阿拉

伯数系准确地说应是：印度 - 阿拉伯数系。

到现在，0 作为不可缺少的数字，不仅是一个“定位的数”，用于象“数 203”中的“0”——充当十位上的数；还用来表达“没有”的意义，例如，本来有 2 个梨，吃了 2 个，最后一个也没剩，那么表达出来就是 $2 - 2 = 0$ ；除此而外，它还可以作为某种标准来使用，例如，发射火箭的时候，指挥人员会倒记时“10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0”，此时“0”自然就成了发射的标准，还有一些计量仪也都以 0 为标准。

0 是一个伟大的发明。

好，现在明白啦。不要忘了：在今天你认为理所当然的结论都是前人几经周折得到的。越是简单越容易忽视它的真正伟绩。

遇到一件事要多问几个为什么。

其他记数方法

特别值得一提的是二进制，这种“逢二进一”的记数制是基数最小的一种记数方法。

在许多没有达到屈指可数的原始部族，独立的数字只有一和二，由此产生的数字也只能达到六而已。他们以“双”记数，对类同的感觉最为敏感。这可以说是二进制记数思想的最早发源。

然而，直到 17 ~ 18 世纪，二进制才正式由德国数学家莱布尼兹(1646 ~ 1716 年)提出。

以二为底的好处是符号的经济和演算的简单。只用 0 和 1 就可以表示一切的数：如十进制中的 1、2、3、4，用二进制表示只出现 0 和 1 两个符号，即 1、10、11、100；二进制的运算也简化到只剩下 $1 + 1 = 10$ 和 $1 \times 1 = 1$ 了。

我们从数的具体分析中可以清楚地理解不同进位的思想——当我们把十进制中的数 5603 拆开时，可以写成：

$$5 \times 10^3 + 6 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 3 \times 10^0$$

同样,一个二进制数,比如 10110 可以拆分成:

$$1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$$

利用上面的方法可以进行不同数制的相互转化。

这里,给出 16 以内的二进制数和对应的十进制数:

$$\begin{array}{llll} 1 = 1 & 2 = 10 & 3 = 11 & 4 = 100 \\ 5 = 101 & 6 = 110 & 7 = 111 & 8 = 1000 \\ 9 = 1001 & 10 = 1010 & 11 = 1011 & 12 = 1100 \\ 13 = 1101 & 14 = 1110 & 15 = 1111 & 16 = 10000 \end{array}$$

我们看到,二进制简便的这种好处却被书写的麻烦抵消了:仅仅是十进制的数 16 在二进制中便要写成 10000。再加上人们惯用十进记数法,当然在日常计算中就很少见到它了。

然而,连莱布尼兹都没想到的是,二进制却被现代的计算机拿来进行计算。这主要是因为计算机内部有很多电子开关,每个开关只有 2 种状态:开和关,正好可以用 1 和 0 来表示。

此外,在逻辑(一种是与非的表示)和不少数学理论、数学游戏中运用二进制也很方便。

这正应了莱布尼兹所说的:

“用一,从无,可生万物。”

(二) 图形识别

你有没有观察过一片叶子,对它为什么能精确地分成两半表示奇怪?你有没有注意到各种花的花瓣形成的完美星形?有没有注意到某些贝壳和松果的螺旋形生长模式?……



图 1-6 自然花园景观

自然界中充满各式各样的形状,形状是物体所有属性中最重要的属性。我们要认识世界,就必须分辨物体的形状,进行图形识别,以阐释和理解它们的形成。

一切科学的起源都可以溯源于人类对各种自然现象和空间图形的认真思索。数学尤其如此。

数是人类必需应付的一个基本概念,另一个人类必需面对的是空间。我们可以从任何文明的发源中寻得人类对空间探索的足迹。

例如在古埃及文明中,就发现了数学发展的明显迹象。根据考古记载,在公元前 2000 年以前,埃及人已经建立了原始数系,并具备了某些有关三角形和棱锥体等的几何概念。据传说,古埃及建筑师用一种非常巧妙的方法确定直角。他们把 12 段同样长的绳子相互连成环状(如图 7),把从 B 到 C 之间的五段绳子拉成直线,

然后在 A 点将绳子拉紧,于是就形成了直角 BAC。他们将这种构形放在地上,让工人们按照这个构形在金字塔、庙宇或其他建筑的拐角处建成标准的直角。

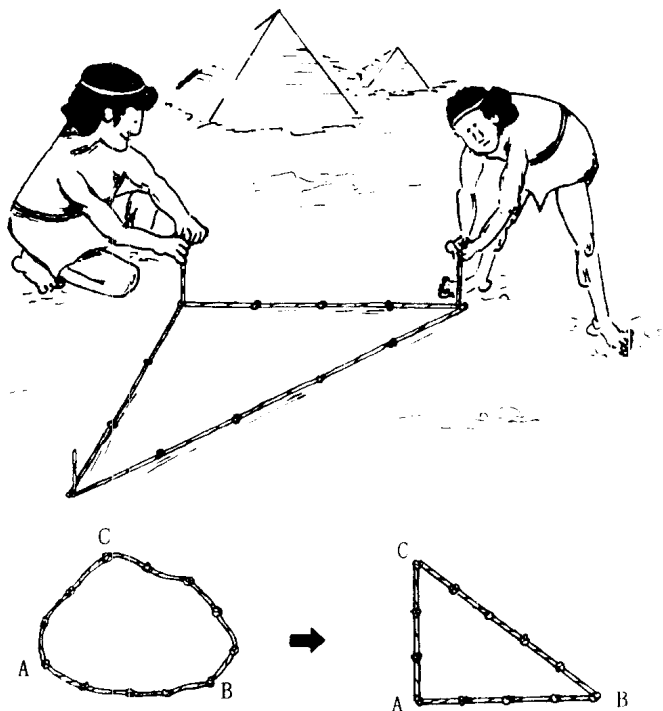


图 1-7 古埃及人是这样确定直角的

这种构形表明,古埃及人已对直角三角形的勾股关系有所认识。他们似乎懂得,边长为 3,4,5 和边长为 5,12,13……的三角形肯定会含有直角。^[1]

有了前人的根基,今天,不用特意学习,我们对许多基本构形从小就有所认识:

[1] 直角三角形的详细知识我们后面会有专门介绍

先说点吧。无论是遥望夜空的星辰，还是俯首海岸线无垠的细沙，都给我们以点的印象；

一棵大树、一条延伸的街道又留给我们什么呢？——那是线段和直线；

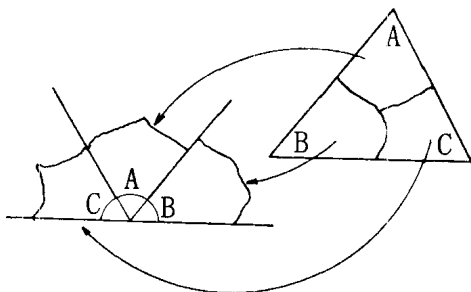
当然，生活中不可能见到绝对平直伸展的道路。当我们遇到斜坡时，坡的“急”呀、“缓”的在数学上叫做“角度”。用数字来表示角度，也就是用科学的方法来表达“急”、“缓”这些感觉。很久以前人们就规定了转一圈是 360° 。



图 1-8 坡的“急”、“缓”在数学上叫角度

你肯定知道什么是三角形？对，是由不在同一直线上的三点用线段相连构成的封闭的平面图形。但你知道它们多么奇妙吗？任意一个三角形的三个内角之和都是 180° 。

玄了。拿一个三角形用撕角的办法去拼一下。

图 1-9 $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$

它们是平面中最稳定的图形。我们常见的三角形支架即蕴涵这一特性；不但如此，特殊的三角形还有特殊功用，直到现在，我们周围仍保留有用直角三角形作木匠的矩；

关于正方形你都知道些什么呢？它们有四个角和四条边，但你知道这些正方形的特别之处吗？它们的四条边是一样的长，四个角也相等都是直角。而长方形，四个角具有相同的角度，它们相对的两条边长度相等；

平行四边形作为正方形、长方形的掌门人，它还包括漂亮的菱形。你我互容、你中有我的擅变正体现它们的不稳定性质，试着留意一下商家巨大的伸缩门，看一看就能了解这一性质；

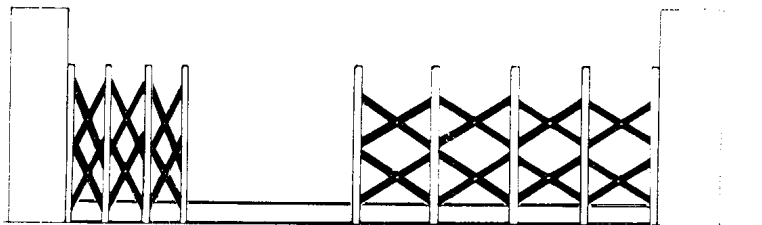


图 1-10 平行四边形的不稳定性：商家伸缩门