

5(3)81

669401

4448

土的本构关系

蒋彭年 编著



科学出版社

土的本构关系

蒋彭年 编著

科学出版社

1982

内 容 简 介

本书系统地介绍了土的应力应变本构关系在近年来的新发展及其学术水平，其中包括一般材料的应力与应变的基本概念、土的破坏准则、弹性体本构关系、流变体的基本性质以及非线性土体的本构关系，并考虑了本构关系在实际应用方面的效果。

本书可供岩土工程学专业的教师、工程技术人员与科学工作者参考。

土 的 本 构 关 系

蒋彭年 编著

责任编辑 杨家福

科学出版社出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1982 年 11 月第 一 版 开本：787×1092 1/32

1982 年 11 月第一次印刷 印张：9

印数：0001—3,400 字数：202,000

统一书号：13031·2052

本社书号：2805·13—12

定 价：1.40 元

序

过去，在土力学与土工技术计算问题方面，地基沉陷计算是以单向固结仪测定的土的变形模量为依据，而土坡稳定分析、地基承载力与挡土墙上土压力的计算是用三轴或直接剪切仪测定的土的抗剪强度指标为基础。在计算理论方面，沉陷计算是将土作为弹性体，而稳定分析与土压力计算是将土作为塑性体。其实，如果土力学与土工技术中的计算问题要得到合理、切实的解决，就应将土作为土体，也就是说都离不开土的应力、应变和时间的本构关系。因此，土的应力、应变和时间的本构关系确有深入研究的必要。

二十多年来，解决土工问题所用的数值方法已有蓬勃发展，尤其是土力学方面有限单元法的应用取得了巨大进展。由于大型高速度计算机的有效应用，数值技术就得到了广泛普及与应用。因此，在土工建筑物与地基的变形和稳定计算方面，复杂的(如非线性性态、不均匀性等)土工技术问题可得出切实的解答。然而，在切实解决土工问题中，关键问题还是土的工程特性，即土的应力应变和时间的本构关系；这就是说，土的本构关系是土力学与土工技术问题中数值研究的首要部分。但是，这方面目前还没有系统的、简明的、有用的近代资料可资利用。本书的目的就在于提出土力学与土工技术领域中土的应力、应变和时间的本构关系的基本论述。

第一章是从现象学观点概述土的本构关系及其基本型式。第二、三、四章分别叙述任何材料的应力与应变的基本概念以及土的破坏准则，这三章是以后各章的基础。第五与第

六章分别论述不考虑时间的弹性体本构定律与考虑时间的流变体的基本性态，这是流变学的基本原理。以上都是土的本构关系的基础。第七与第八章是本书的主要部分，论述了非线性土体的本构关系，其中包括曲线配合法、插值法或用数学函数代表已知的应力应变曲线、非线性弹性理论模型以及弹塑性理论模型，这两章还概括论述了本构关系近年来的最新进展。

本书的特点是，从普及的角度出发，从任何材料在本构关系方面的各项参数的基本概念及其相互关系出发，详细阐述土的本构关系及其破坏准则，同时也考虑了这些本构关系在实际土工问题中的使用效果。此外，本书还论述弹性体本构定律与流变体的基本性态，但没有涉及到土与水相互作用的本构关系。

符 号

A	面积	J	蠕变顺性
c	凝聚强度	J_1, J_2, J_3	应变不变量
C_c	压缩指数	J'_1, J'_2, J'_3	偏应变不变量
C_s	湿胀指数	J''_1, J''_2, J''_3	球应变不变量
$[C]$	弹性矩阵	i, j, k	下角标
α	流动规则中非负常量	K	体积模量
$[D]$	弹性矩阵	K_0	静止土压系数
e	孔隙比, 自然对数之底	k	屈服参数
E_i	起始弹性模量	k_f	破坏参数
E_p	塑性区弹性模量	l, m, n	方向余弦
E_t	正切弹性模量	M	压缩模量, $p-q$ 线的斜率
E_{ur}	卸载弹性模量	N	法向力
E'	弹性模量	n_p	预压比
E'	应变张量	p	静水应力
E''	偏应变张量	p_c	预先固结压强
E''	球应变张量	Q	塑性势函数
F	力	q	广义剪应力
f	屈服函数	q'	象征剪应力
f^*	破坏函数	q_u	无侧限抗压强度
G	剪切模量	R_f	破坏比
G_i	起始剪切模量	r, θ, z	圆柱坐标
G_t	正切剪切模量	s	样条函数, 剪力
H	硬化参数	s	应力
I_1, I_2, I_3	应力不变量	S	应力张量
I'_1, I'_2, I'_3	偏应力不变量	S'	偏应力张量
I''_1, I''_2, I''_3	球应力不变量	S''	球应力张量

T	松弛时间	η	应力比($\eta = q/p$),粘滞系数
T_s	延滞时间	$\theta_\sigma, \theta'_\sigma$	应力角
$\operatorname{tg} i$	剪胀率	$\theta_\epsilon, \theta'_\epsilon$	应变角
u	位移,孔隙压强	κ	硬化参数
U	应变能	λ	拉梅常数
U'	畸变应变能	μ	拉梅常数
U''	体变应变能	μ_σ	应力参数(洛德)
U_i^t	单位位移张量	μ_ϵ	应变参数(洛德)
w_p	塑性功	ν	泊桑比
x, y, z	直角坐标	ν_i	起始泊桑比
α	角,参数	ν_t	正切泊桑比
β	角,破坏面倾角,应力参数	σ	法向应力,总应力
γ	角,工程剪应变	σ_c	抗压强度
$\bar{\gamma}$	广义剪应变	σ_{ij}	应力张量
$\tilde{\gamma}'$	象征剪应变	σ'_{ij}	偏应力张量
γ_{oct}	八面体剪应变	σ_m	平均应力
$\bar{\gamma}_{rt}$	对数剪应变	σ_t	抗拉强度
γ_s	纯剪应变	σ_y	屈服应力
γ_σ	偏剪应变	$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	主应力
$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$	主剪应变	$\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3$	偏主应力
δ_{ij}	克罗内克尔 δ	σ_{oct}	八面体法向应力
ε	应变	$\bar{\sigma}$	有效应力
$\bar{\varepsilon}$	对数应变	τ	剪应力
ε'	偏应变	τ_{ij}	抗剪强度
ε_{ij}	应变张量	τ_{oct}	八面体剪应力
ε'_{ij}	偏应变张量	τ_p	驼峰强度
ε_m	平均应变	τ_r	残余强度
$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$	主应变	τ_s	纯剪应力
$\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \varepsilon'_3$	偏主应变	τ_o	偏剪应力
ε_v	体积应变	τ_{max}	最大剪应力
ξ	应变比($\xi = \bar{\gamma}/\varepsilon_v$)	τ_1, τ_2, τ_s	主剪应力

$\tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{12}$	主剪应力	ω	转动分量
ϕ	内摩擦角	ω_σ	应力角
ϕ_s	粒间摩擦滑动阻力角	ω_e	应变角
ω_i	转动张量		

目 录

序	i
符号	vi
第一章 概论	1
第二章 应力	10
2.1 一点处应力	10
2.2 三维应力系统	16
2.3 应力张量分解与应力不变量	25
2.4 八面体应力、纯应力与广义应力	29
2.5 偏主应力、主应力与应力角、广义剪应力之间的关系 ..	34
2.6 主应力空间与主应力面	45
2.7 静水应力、广义剪应力与应力参数的应力状态系统	50
2.8 孔隙应力、有效应力与总应力	52
2.9 应力状态的莫尔圆	53
2.10 应力状态举例	59
第三章 应变	67
3.1 一点处应变	67
3.2 主应变	77
3.3 应变张量分解	79
3.4 八面体应变、纯应变与广义应变	83
3.5 偏主应变、主应变与应变角、广义剪应变之间的关系 ..	86
3.6 大应变与大位移	91
3.7 应变状态的莫尔圆	95
第四章 破坏准则	98
4.1 概论	98
4.2 莫尔-库仑准则	102

4.3 特雷斯卡准则	109
4.4 米西斯准则	110
4.5 德鲁克-普拉格准则	113
4.6 格里菲斯破坏准则	114
4.7 岩石内薄弱结构面的破坏	117
4.8 各向异性破坏准则	120
第五章 弹性体本构定律	124
5.1 弹性体内弹性常数的关系	124
5.2 弹性体线性应力应变关系	125
5.3 体积改变定律与畸变定律	131
5.4 张量表示的弹性体线性应力应变关系	132
5.5 主应力与主应变的关系	134
5.6 八面体应力应变关系、广义应力应变关系以及纯应力应变关系	134
5.7 弹性应变能	137
5.8 几个特例	138
5.9 各向异性弹性体线性应力应变关系	141
第六章 流变体性态	146
6.1 概论	146
6.2 刚塑性体性态	148
6.3 弹塑性体性态	150
6.4 粘塑性体性态	152
6.5 弹性粘塑性体性态	153
6.6 弹性粘滞液体性态	155
6.7 粘弹性固体性态	161
6.8 弹性粘弹性体性态	166
6.9 滞弹性体性态	167
6.10 粘弹性体性态	169
6.11 普遍线性粘弹性体性态	172
第七章 非线性体性态	177

7.1	概论	177
7.2	双线性模型与多线性模型	177
7.3	双曲线模型	179
7.4	兰堡-奥斯古德模型及其类同模型	189
7.5	多项式模型	190
7.6	高次弹性模型	191
7.7	应变软化模型	192
7.8	戴马舒克-瓦利潘模型	194
7.9	南科所模型	201
第八章	弹塑性体本构定律	210
8.1	概论	210
8.2	破坏面与屈服面	210
8.3	塑性势与流动规则	211
8.4	硬化定律	214
8.5	普遍弹塑性应力应变关系	222
8.6	简单完全塑性、无摩擦模型	224
8.7	完全塑性、有摩擦模型	229
8.8	雷德-邓肯模型	233
8.9	帽盖屈服模型	241
8.10	剑桥模型	243
8.11	柯斯那-吴天行模型	256
8.12	应变软化	259
8.13	弹性粘塑性模型	260
8.14	罗韦剪胀模型	272

第一章 概 论

土体受到外力作用时，内部就产生应力和应变。在某些土体中，发生应变需要一定的时间。因此，土体中发生的应力、应变与时间之间有一定的关系；这些关系取决于土的力学性质，称为土的本构关系。例如，单向固结或三向固结（等固结或不等固结）就是这种关系之一。本书将从土的基本性态及任何材料的一些基本概念出发，进行探讨。

一物体内某点处的应力状态，是由作用于该点的一个微小单元体的各面上法向应力的三个分量 σ_x 、 σ_y 、 σ_z 与剪应力的三个分量 $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ 、 $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ 、 $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ 确定的。这些分量可表达为二阶对称张量（称为应力张量 σ_{ij} ，其中 $i, j = x, y, z$ ）。同样，变形状态或应变状态可按变形张量或应变张量 ϵ_{ij} 来描述，应变张量 ϵ_{ij} 类同于应力张量 σ_{ij} 。变形张量不是对称的，但它能分解成一个对称应变张量和一个有转动而没有变形的反对称张量。

在理想弹塑性体中，应力张量和应变张量可表示该物体内部的状况。但在许多岩土工程技术问题中，不能忽略时间因素，故应变不仅是应力的函数，而且也是时间的函数。因而，任何点的平衡状态或不平衡状态，必须引进应变速率张量 $\dot{\epsilon}_{ij}$ 。故要求得应力应变问题的通解，就需要列出应力张量、应变张量与应变速率张量之间的关系。如果要忽略不计应变速率张量就需要有实验证据，或者在特殊问题中需要从数学方面进行处理。否则，就不能断定应变速率张量可以忽略不计。

土的本构定律的实验研究，需要把张量关系作为一个整

体。但目前只用简单的实验，例如只考虑主应力来简化，这样应力张量就简化为 σ_{ii} ，其中 $i = 1, 2, 3$ 。单向固结只是应变 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$ 或 $\sigma_1 = K_0 \sigma_r = K_0 \sigma_2 = K_0 \sigma_3$ 的情况。单面直剪仪内试件的应力状态是复杂的，它是破坏时 σ_{1f} 和 σ_{3f} 已知的情况。普通三轴仪内试件的受力条件是 $\sigma_r = \sigma_2 = \sigma_3$ 的这个张量 σ_{ii} 的一种特殊情况，该仪器是一种比较容易研制的设备。其它还有真三轴仪 ($\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$)、平面应变仪 ($\varepsilon_2 = 0$) 及扭转空心圆筒试验仪 ($\sigma_z \neq \sigma_r \neq \sigma_\theta$) 等。

现就过去通用的实验所得出的土的本构关系作一概括说明。

单向固结试验与三向固结试验^[1-6] 从单向固结试验或三向固结试验可得出，在固结应力条件下孔隙比 e 与固结应力 p 的关系曲线，或在静水应力条件下体积应变 ε_v 与静水应力 p 的关系曲线，如图 1.1(a) 所示。正常固结粘土或松砂的这种关

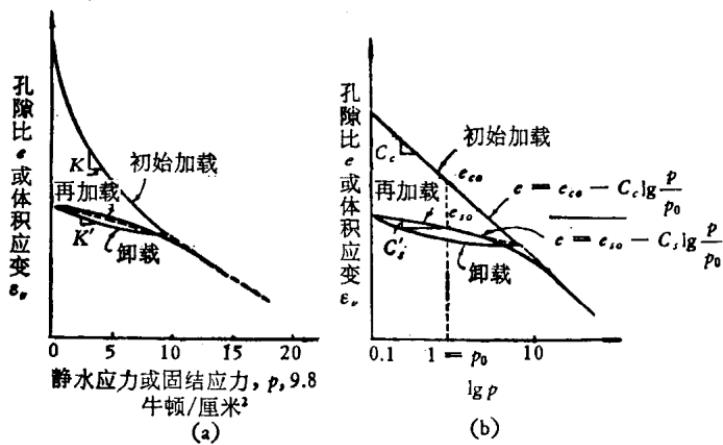


图 1.1 固结应力或静水应力下土的应力应变曲线

系曲线是一条初始加载曲线，它的卸载曲线与再加载曲线也示于图上。从预先固结粘土或紧密度较大的砂土，可得如正

常固结粘土或松砂的再加载曲线那样的 ϵ_v-p 或 $e-p$ 关系曲线。但预先固结应力不同，得出的 ϵ_v-p 或 $e-p$ 关系曲线的位置也不同。预先固结应力小，位置高；预先固结应力大，位置低。

固结应力或静水应力条件下的 ϵ_v-p 或 $e-p$ 关系曲线显然是非线性的，如图 1.1(a)所示；但对于初始加载时正常固结粘土或松砂，其 $\epsilon_v-\lg p$ 或 $e-\lg p$ 关系曲线常接近于一条直线，如图 1.1(b)所示，故可用下列方程表示：

$$e = e_{c_0} - C_c \lg(p/p_0)$$

其中 e_{c_0} 为 $p_0 = 1$ 公斤/厘米² 时的孔隙比， C_c 为压缩指数。

卸载与再加载时其 $e-p$ 关系曲线的方程为

$$e = e_{s_0} - C_s \lg(p/p_0)$$

其中 e_{s_0} 为 $p_0 = 1$ 公斤/厘米² 时的孔隙比， C_s 为湿胀指数。

不同土类如粘土、粉土、砂、有机土、沉积土、人工土或残积土等的压缩模量 M 对固结应力 p (线性比例尺) 的关系曲线通过单向固结试验得出，这些曲线具有 U 形的形状^[7]，如图 1.2 所示。因此，压缩模量具有最低值 M_0 ，相应的固结应力为 p_0 。这条曲线可用下列方程表示：

$$M = \frac{a}{p} + bp + c$$

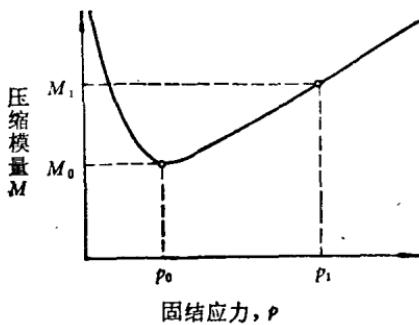


图 1.2 压缩模量与固结应力的关系曲线

其中 a 、 b 、 c 为实验常量, 其值可用下列各式确定:

$$a = \frac{p_1(M_1 - M_0)p_0^2}{(p_1 - p_0)^2}$$

$$b = \frac{p_1(M_1 - M_0)}{(p_1 - p_0)^2} \approx \frac{1 + c_0}{0.434} \frac{1}{C_e}$$

$$c = M_0 - \frac{2p_0p_1(M_1 - M_0)}{(p_1 - p_0)^2}$$

其中 p_1 、 D_1 相应于这条 $M-p$ 曲线末端附近 ($p_1 > p_0$) 的某一点, 如图 1.2 所示。

三轴剪切试验 在普通三轴仪中, 试件只在轴对称变形条件下达到剪切破坏, 但在这条件下可能有各种的应力组合。通常, 在常用的简单的应力组合下进行三轴剪切试验, 即压缩试验与拉伸试验。压缩试验有三种: (1) 轴应力 ($\sigma_a = \sigma_1$) 增加, 径向应力 ($\sigma_r = \sigma_2 = \sigma_3$) 一定; (2) 轴应力一定, 径向应力减少; (3) 平均主应力一定, 轴应力增加, 径向应力减少。拉伸

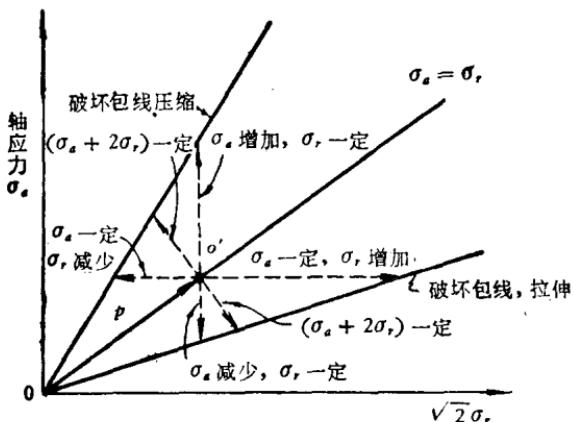


图 1.3 排水试验中的应力路线

试验也有三种: (1) 轴应力减少, 径向应力一定; (2) 轴应力一定, 径向应力增加; (3) 平均主应力一定, 轴应力减少, 径向应

力增加。在排水试验中，试样上有效应力等于施加总应力，因此可控制试验中的有效应力路线。以上压缩试验与拉伸试验的有效应力路线如图 1.3 所示。图中平均有效主应力 ($o o' = p$)—定的试验是以 $\sigma_a + 2\sigma_r = 3p$ 表示的。

由于预压比¹⁾或紧密度不同，由三轴剪切试验可得出两类不同的应力应变曲线。

正常固结粘土与松砂在剪应力条件下的广义剪应力 q 与广义剪应变 $\bar{\gamma}$ 或 $q = (\sigma_1 - \sigma_3)$ 与轴应变 ε_a 的关系曲线，如图 1.4 所示。此曲线具有双曲线型式^[5,8,9]：

$$q = \frac{\varepsilon_a}{a + b\varepsilon_a}$$

其中 a 与 b 为实验常量。图 1.4 表明，从 o 至 A ，土是线性弹性的。 A 点以上，变形部分地不可恢复。 C 点处应变是弹性部分 $C''C'$ 与塑性部分 $C'C$ 之和。 C 点处如卸载，则沿着 CDE 进行卸载与再加载。用虚线表示卸载-再加载曲线； DC 的斜

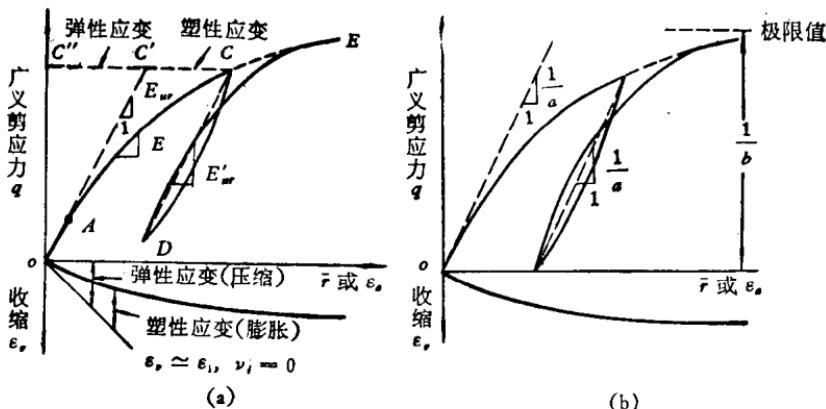


图 1.4 在剪应力条件下正常固结粘土及松砂的 $q-\bar{\gamma}$ 或 $q-\varepsilon_a$ 曲线

1) 预压比（或预先固结比） n_p ，是一个试件受过的最大有效固结应力 $\bar{\sigma}_p$ ，或有效静水应力 p_p ，与剪切试验进行前在加载条件下允许试件膨胀的压强 σ 或 p 的比值。

率一般等于 oC' 的斜率。从 A 至 C 的屈服点随着塑性应变的增加而增大，这叫做应变硬化或加功硬化。在静水应力条件下体积应变 ε_v 压缩着，同样也可认为是应变硬化的弹塑性性态，如图 1.1(a)所示。在剪应力条件下，由于塑性应变（膨胀）与弹性应变（压缩），加载时土体的体积收缩，体积应变具有剪缩性。又卸载-再加载曲线 CDE 是以虚线 DC 代替，从 D 至 C 土被认为是弹性的。图 1.4 中，屈服点 A 的存在意味着弹性性态区的边界处起始屈服面的存在。在再加载曲线 DE 上，屈服点的位置显然高于 A 点。

预先固结粘土、紧砂以及岩石薄弱结构面夹泥层在剪应力条件下的广义剪应力 q 与广义剪应变 $\bar{\gamma}$ 或 $q = (\sigma_1 - \sigma_3)$ 与轴应变 ε_a 的关系曲线，如图 1.5 所示。这曲线具有 q 的驼峰

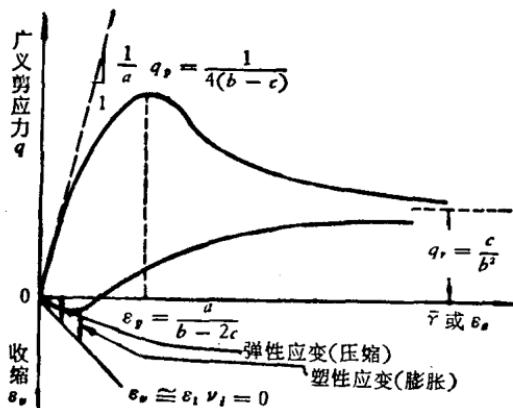


图 1.5 在剪应力条件下预先固结粘土或紧砂的 $q-\bar{\gamma}$ 或 $q-\varepsilon_a$ 曲线

值 q_p 的性质^[10,11]，其方程为^[12,14]：

$$q = \frac{\varepsilon_a(a + c\varepsilon_a)}{(a + b\varepsilon_a)^2}$$

其中 a 、 b 与 c 为实验常量。加载时，土体的体积稍有收缩，此后随即膨胀，体积应变具有明显的剪胀性。一般在体积应变