

成都工學院圖書館

351396

基本館藏

机车动力学

И.И. 尼科拉耶夫 著



人民铁道出版社

机 車 动 力 学

И.И.尼科拉耶夫著

冯 登 泰 译

• 人 民 铁 道 出 版 社

1 9 6 4 年 • 北 京

书中研究了機車动力学的基本問題，如活塞式
机器慣性力的平衡、軸的扭轉振动、彈簧悬挂工
作、簧上结构的振动、各輪对上載荷的分配及機車
在鋼軌上的运行等基本問題。

本书可作为鐵道高等学校的教学用书，也可供
与機車制造、运用有关的科研和工程技術人員參
考。

机 車 动 力 学

ДИНАМИКА ЛОКОМОТИВОВ

苏联 И.И.НИКОЛАЕВ著

苏联国家铁路运输出版社（一九六二年莫斯科俄文版）

ТРАНСЖЕЛДОРИЗДАТ

МОСКВА 1962

馮登泰 譯

人民鐵道出版社出版

（北京市霞公府甲24号）

北京市书刊出版业營業許可証出字第010号

新华书店北京发行所发行

人民鐵道出版社印刷厂印

书号 1931 开本 $350 \times 1168_{24}^1$ 印张 $10\frac{1}{4}$ 插頁2 字数263千

1964年4月第1版

1964年4月第1版第1次印刷

印数 0,001—2,000 冊 定价（科七）1.70元

作者的話

摆在读者面前的这本机车动力学教科书，包括电力机车、内燃机车的动力学基本原理，也是机车动力学的一般教程。

一般教程范围之外的问题，例如运动稳定性，当有二级悬挂时簧下质量的振动，电力机车受电弓架动力学与内燃机车液力传动动力学，车体和牵引电动机的振动问题，活节转向架式机车的蛇行摆动，机车进入缓和曲线时的动力学以及其他一连串的问题，则在本教科书中未作研讨。

作者在叙述此教程时，力求将这些问题的数学式，与所发生的物理现象联系起来。对于惯性力的平衡问题，我们首先就这样做了。例如，表明了，如果平衡重块的惯性力共轭分量虽按正弦、余弦规律变化，但无相应的方向，则不可能平衡掉一阶谐波量。发动机平衡理论，是以一种广义方式叙述的，这样则有可能将它应用于任何类型的机车。对受周期性铅垂力作用而出现的铅垂振动，从物理学上作了解释。

在本教程中，研究了发动机曲轴的扭转振动问题，并叙述了减振器的基本原理。

在“机车弹簧装置的理论”一章中，除了讨论板弹簧、圆弹簧的工作，以及详细叙述了板弹簧摩擦力的影响而外，还分析了橡皮元件和扭转式装置的工作。

在阐述机车通过曲线的问题时，特别注意于车体以摇摆支承架于转向架上的机车，以及具有复原装置的机车；并阐述了T93内燃机车复原装置的工作原理。

在“机车对线路的作用和运行安全性”一章中，主要注意力放在车轮抵靠钢轨及与钢轨的相互作用、轮缘超前值的计算，以及行驶安全准则和磨损准则。

众所周知，编写机车动力学教科书是有困难的。在此，作者将感谢以其意见与愿望见告的读者。

目 录

作者的话

第一章 活塞式机器惯性力的平衡	1
§ 1. 机车平衡性概念.....	1
§ 2. 纯迴转运动部件惯性力的平衡.....	4
§ 3. 第二、三类部件惯性力的平衡.....	8
§ 4. 多缸发动机的平衡.....	34
a) 单排多缸发动机的平衡.....	34
b) 气缸作 V 形排列的多缸发动机的平衡.....	40
§ 5. 具有连杆系统的机车的平衡.....	41
§ 6. 发动机飞轮参数的计算.....	50
第二章 轴的扭转振动	55
. 振动的一般概念.....	55
A. 轴的自由振动.....	58
§ 1. 单圆盘轴的扭转振动.....	58
§ 2. 多圆盘轴的扭转振动.....	69
§ 3. 将轴转换成单一直径的轴.....	77
§ 4. 轴曲拐的计算.....	78
§ 5. 连杆与活塞质量的计算.....	81
§ 6. 单个质量对于扭转振动的影响.....	82
§ 7. 六缸发动机自由振动圆周频率算例.....	85
B. 轴的受迫振动.....	92
§ 1. 轴的无衰减受迫振动.....	96
§ 2. 轴的衰减受迫振动.....	97
§ 3. 扰动力矩分谐波幅度的计算.....	103
§ 4. 谐波幅度与相位错角的算例.....	109
§ 5. 发动机各缸发火顺序对于扭转受迫振动的影响.....	113

§ 6. 利用机电比拟法求发动机曲轴振动频率.....	120
§ 7. 减振器理论.....	123
第三章 機車彈簧裝置的理論	131
§ 1. 彈簧裝置的作用.....	131
§ 2. 機車的緩沖裝置.....	133
a) 板彈簧和圓彈簧.....	133
b) 複式彈簧裝置.....	145
c) 橡皮元件的彈性裝置.....	154
d) 扭轉式懸挂.....	158
第四章 各輪对上載荷的分配	161
§ 1. 機車重量分配中的主要問題.....	161
§ 2. 機車的懸挂系統示意圖.....	166
第五章 簧上結構的振動	170
§ 1. 振動的種類.....	170
§ 2. 鉛垂振動.....	171
§ 3. 縱向搖擺.....	177
§ 4. 橫向搖擺.....	185
§ 5. 轉動慣量的計算.....	189
第六章 傳動方式与牽引力對於輪对作用於 鋼軌載荷的影响	191
第七章 機車在鋼軌上的运行	210
§ 1. 機車在直线上的运行.....	210
§ 2. 曲线上运行的特点.....	215
§ 3. 复原裝置.....	218
a) 搖枕与拉杆式复原裝置.....	220
b) 圓彈簧式复原裝置.....	222
c) 箱式复原裝置.....	223
d) 斜面式复原裝置.....	226
§ 4. 曲线通过的图解法.....	229
a) 圆弧法.....	229

b) 抛物线法.....	239
c) 用图解法计算机车曲线几何通过的例子.....	240
§ 5. 用分析法求转向架式机车轮对的极距和游动量...	247
§ 6. 通过限界 (平面内)	250
§ 7. 确定机车在曲线上运行时的水平力.....	253
a) 一般原理.....	253
b) 沿曲线运行时机车上的作用力.....	255
c) 确定轴式为0-n-0 机车的水平力 (轮对 无横向游动量)	257
d) 具有横向游动量的轮对 (无复原装置) 对于横向水平力的影响.....	266
e) 确定轴式为 3 ₀ -3 ₀ 、车体为摆式支承的 机车的水平力.....	269
f) 活节机车水平力的计算方法.....	279
§ 8. 机车在曲线上的稳定性.....	287
§ 9. 簧上结构的高度对于水平力的影响.....	293
第八章 机车对线路的作用和运行安全性	295
§ 1. 车轮给钢轨的动载.....	295
§ 2. 钢轨应力和压挤量.....	300
§ 3. 车轮爬起.....	304
§ 4. 在曲线上行驶时轮缘与轨顶侧缘的磨损.....	319
参考文献.....	322

第一章 活塞式机器惯性力的平衡

§1. 机车平衡性概念

机车走行特性（平稳或不平稳）和运行安全性所决定的动力学性能，是评价机车质量的重要因素。这些性能，与走行部份的结构和机车的平衡性有关。

令 x 轴的方向为沿线路中心线、在机车水平面内的方向（图1）； y 轴在同一平面内，但垂直于 x 轴，而 z 轴则沿铅垂方向。如果投影于 x 轴上的分力之和不等于零，其数值与方向在变化着，则将觉察到机车的纵向振动。如果水平力在水平面产生力矩，则因此而促成机车的蛇行摆动。铅垂面内未获平衡的力，传到机车的簧承质量与非簧承质量上，造成簧上结构的振动（铅垂振动，纵向摇摆，横向摇摆），造成轮对给钢轨产生周期性变化（按数量与符号）的动载分量。

于是，因水平不平衡性而出现机车的纵向振动和蛇行摆动，由于机车的铅垂不平衡性而出现各车轮铅垂载荷的变化。

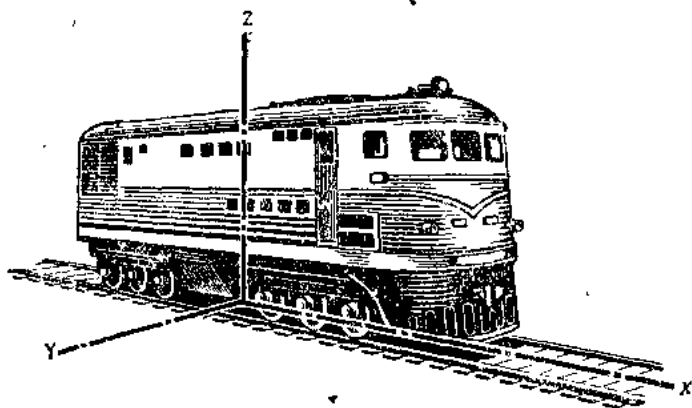


图1. 座标轴的位置

凡是这样的机车可以认为是平衡的机车，即它没有：

- 1) 纵向振动；
- 2) 蛇行摆动；
- 3) 在运行时各车轮铅垂载荷的变化；
- 4) 簧上结构的振动。

这里所说的现象，是机车本身结构中某些部件所引起的，而不是钢轨的缺陷或特点（凹陷，接缝，等等）所造成的；这些缺陷，不仅破坏一切机车的平稳行驶，也破坏车辆的平稳行驶，而与机车的平衡性无任何关系。

应当指出，上述现象中，一些与整个机车有关（例如，纵向振动可能仅属于整个机车），另一些（例如簧上结构的振动）则仅与机车的簧承质量有关。

如果用这些条件来评价线路上现有的各型机车（电力机车、内燃机车、燃气轮机车与蒸汽机车），那么可以认为，平衡性最好的机车，是电力机车与燃气轮机车。

内燃机车是平衡性较差的机车，其发动机安置在车架上，即在簧承部份上。这种活塞式发动机本身就是不平衡的，当然未经平衡的惯性力将传递到主车架上去，因而引起主车架的振动。车轮动载分量虽然也会出现，但不及具有连杆曲拐机构的内燃机车*或蒸汽机车那样强烈。

从行驶平稳的意义上讲，蒸汽机车是最不平稳的机车，它有纵向振动、蛇行摆动、车轮动载的相当强烈的变化，也有簧上结构的振动。这些振动能导致共振，并引起事故。

研究引起这些现象的一切力，和减轻这些力的方法，也是机车动力学教程的任务。

要将机器惯性力加以平衡，其目的在于，使得这些力既对机车也对线路产生最小的作用。惯性力能成为柴油机曲轴轴承上出现可观的压力的原因，未平衡力将从轴承传递到车体主车架上

* 指非电传动的以曲拐机构传动的内燃机车。——译者

去，而引起机车的振动。因此，采取措施使这些力的作用变成最小，就成为很重要的问题了。

说到发动机或机器惯性力的平衡，应当考虑到，从结构方面说，它应当简单而可靠。采用复杂机构，形如活动平衡重块，或有自己的传动的平衡重块，以平衡机器是不值得的。所以留下某部份力不予平衡，比之将发动机结构复杂化、降低其工作可靠性与增加修理费用，是更为合理的。从力学观点看来，为达到平衡，可采用固定在发动机轴上的平衡重块（固定式平衡块），或在某些结构中，为了较好的平衡，加上活动的平衡块（以比发动机或机器的轴更大的速度进行迴转）。后一种平衡方法，在机车上未获采用。将几个单缸发动机联合成多缸发动机，就可达到相当好的平衡。

内燃机车原动机常常是由6、8、10或更多的缸数组成的多缸机。各缸排成一排，或排成两排，彼此之间有夹角，并且共一根轴（V形排列）。也有一个发动机具有两根轴（例如TЭ3内燃机车）。

蒸汽机车常常都有两部蒸汽机。比较少见的是三缸或四缸蒸汽机车，其活塞力量传送到一根或两根动轴上。

现在我们直接来讨论活塞式发动机的平衡，可以确定，任何发动机有三类运动的部件。属于第一类的，是作纯迴转运动的零件：内燃机车发动机曲轴的曲柄和轴颈，蒸汽机车的曲拐、连杆和偏心曲拐，以及一般的以转动轴线为基准呈偏心分布的质量；属于第二类的部件，是作纯往复运动的零件（活塞系统）；属于第三类的，是作复合运动的零件（主动连杆）。

在平衡工作的实践中，常常将第三类部件的惯性力归到第二类部件中一起研究。

我们将从迴转部件的平衡工作开始，来讨论机器的平衡问题。

§2. 純迴轉运动部件慣性力的平衡

根据机车内装置的发动机(或机器)类型的不同,属于迴转运动部件(质量)的,有:內燃机的曲轴,曲拐,蒸汽机车的偏心曲拐与连杆。这些质量可以表示成为集中的重块,具有某一迴转半径,位于同轴有关的一定平面之內(图2)。在轴以角速度 ω 迴转时,产生离心力 C_1 的数值,按如下的公式计算:

$$C_1 = m_1 \omega^2 \rho_1, \quad (1)$$

式中 m_1 ——迴转的质量;
 ρ_1 ——迴转半径。

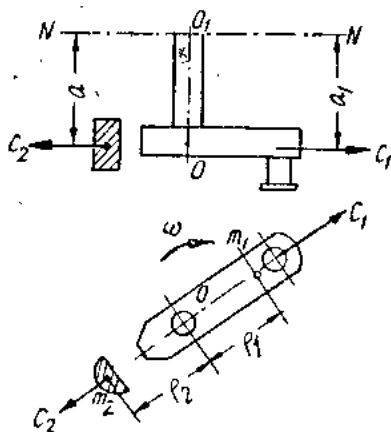


图2. 用同一平面內的平衡重块的迴轉质量作平衡

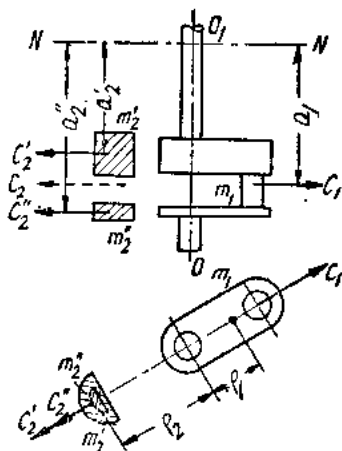


图3. 用两个平面內的重块的迴轉质量作平衡

为了平衡这个质量,还需知道该质量相对于某一选定的平面 NN 的位置,及其间之距离 a 。

这一力量的平衡,主要在于装上数值为 m_2 的一个质量,其迴转半径为 ρ_2 ,产生的离心力为

$$C_2 = m_2 \omega^2 \rho_2, \quad (2)$$

此离心力完完全全等于前一力,就是说, $C_1 = C_2$, 或者

$$m_1 \omega^2 \rho_1 = m_2 \omega^2 \rho_2, \quad (3)$$

由此得到

$$m_1 \rho_1 = m_2 \rho_2 \quad (4)$$

按照机器的结构选定迴转半径 ρ_2 以后，即可求出平衡质量的数值 m_2

$$m_2 = m_1 \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad (5)$$

及其重量

$$Q_2 = m_2 g^*。$$

求出的质量应当装置在质量 m_1 的同一直径的相反位置上，并位于同一平面内。但是，由于结构方面的原因，一个质量 m_2 ，作为平衡重块，不是总能安置上的，因而人们将它用两个质量 m'_2 与 m''_2 代替，使后两质量安装在选定的、便于结构设计的两个平面之内（图3），让两离心力 C'_2 和 C''_2 的合力，等于力 C_2 ，且位于力 C_1 的平面内。

从数学上说，这可用下面的方程表示：

$$m_1 \rho_1 = m'_2 \rho_2 + m''_2 \rho_2, \quad (6)$$

$$m_1 \rho_1 a_1 = m'_2 \rho_2 a'_2 + m''_2 \rho_2 a''_2. \quad (7)$$

在特殊情况中，当各个质量的迴转半径相同时（ $\rho_1 = \rho_2$ ），将有

$$m_1 = m'_2 + m''_2, \quad (8)$$

$$m_1 a_1 = m'_2 a'_2 + m''_2 a''_2, \quad (9)$$

由此我们求得

$$m''_2 = \frac{m_1(a_1 - a'_2)}{a''_2 - a'_2}, \quad (10)$$

$$m'_2 = m_1 - m''_2 = \frac{m_1(a''_2 - a_1)}{a''_2 - a'_2}. \quad (11)$$

如果采用 a'_2 与 a''_2 时，由下面的条件出发，

$$\frac{a'_2 + a''_2}{2} = a_1, \quad (12)$$

*. 在下面，用以平衡迴轉质量的平衡重量，用 Q_r 表示。

则求得每一平衡质量等于被平衡质量的一半

$$m_2' = m_2'' = \frac{m_1}{2}. \quad (13)$$

一个偏心质量的平衡，就是这样做的。很明显，我们讨论过的平衡方法，可以推广到任何数目的、位于平行平面内的迴转质量的平衡。假设质量 $m_1, m_2, m_3 \dots$ (图 4)，彼此之间有不同的夹角 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots$ ，具有迴转半径 $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \dots$ ，距一选定平面 NN' 有不同的距离 $a_1, a_2, a_3 \dots$ 。要求用位于相距为 b 的二给定平面 NN' 和 WW' 内的两平衡重量 Q_N 和 Q_W 来平衡这一系统。这些平衡重量的迴转半径，可以是任意的，在特殊情况下，等于 r 。

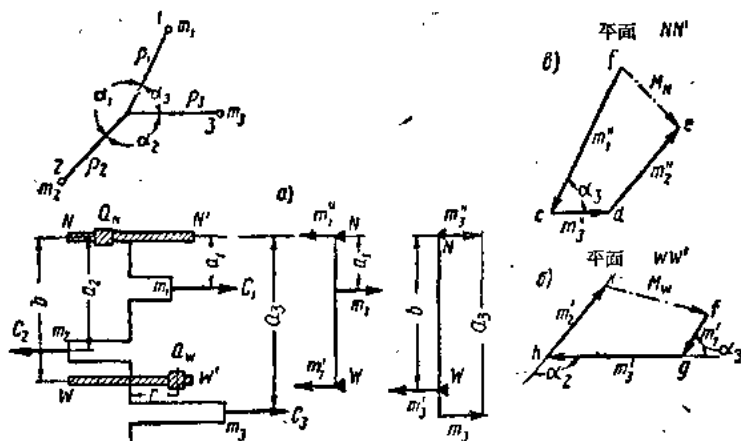


图4. 用两个平行平面内的平衡质量以平衡几个迴转质量

从确定平衡质量开始，我们来解决此问题，将平衡质量分布在选定的平面上。为此，对于平面 WW' (图 4, 6) 将有：

a) 对于第一质量，取质量 m_1' 等于

$$m_1' = m_1 \frac{a_1}{b} \quad (\text{图 4, 6 中的线段 } fg);$$

b) 对于第二质量，

$$m_2' = m_2 \frac{a_2}{b} \quad (\text{图 4, 6 中的线段 } hk);$$

c) 对于第三质量,

$$m'_3 = m_3 - \frac{a_3}{b} \quad (\text{图 4, 6 中的线段 } gh)。$$

必须指出, 平衡质量 m'_1 、 m'_2 与 m'_3 的分布, 和对应的曲拐 1、2、3 的分布正好相反; 同时, 前两平衡质量 m'_1 与 m'_2 将小于被平衡的质量 m_1 与 m_2 , 至于第三平衡质量 m'_3 , 则其数量将大于被平衡的质量 m_3 , 因为力臂 a_3 大于力臂 b 。

对于平面 NN' , 平衡质量 m'_1 与 m'_2 的分布方向, 与曲拐 1 和 2 的方向相反; 而质量 m'_3 的分布方向, 则与曲拐 3 的方向重合, 因为被平衡的质量 m_3 位于选定的平面 NN' 和 WW' 之外。

对于平面 NN' , 将有 (图 4, 6):

a) 对于第一质量,

$$m'_1 = m_1 - m'_1 = m_1 \frac{b - a_1}{b} \quad (\text{图 4, 6 中的线段 } fc);$$

b) 对于第二质量,

$$m'_2 = m_2 - m'_2 = m_2 \frac{b - a_2}{b} \quad (\text{图 4, 6 中的线段 } de);$$

c) 对于第三质量,

$$m'_3 = m_3 - m'_3 = m_3 \frac{b - a_3}{b} \quad (\text{图 4, 6 中的线段 } cd)。$$

按多边形规则, 将各平面内的质量 m'_1 、 m'_2 、 m'_3 和 m'_1 、 m'_2 、 m'_3 相加以后, 可以求出二个总和质量 M_N 和 M_W , 或和他们相对应的平衡重量 $Q_N = M_N g$ 与 $Q_W = M_W g$ 。

应当指出, 在内燃机车内装置的多缸柴油机中, 用以平衡惯性力或迴转质量的平衡重量, 不是分布在两个平面中, 如所周知, 它会实现全系统的平衡 (整个发动机), 而是分布在每一缸的曲拐上, 以减轻主轴承承受的载荷, 结果, 也减轻其磨损。至于连杆式蒸汽机车, 则平衡平面的选择很受限制。实际上, 平衡重量只能装设在车轮平面内。

从上面所述可知, 迴转质量能够全部被平衡掉。

§3. 第二. 三类部件慣性力的平衡

假设气缸的中心线是铅垂的, 并和曲轴中心或主动车轮中心有距离 b (图5; b 称为“偏心度”)。对于此种普遍情况所推得的结论, 可以推广到气缸呈任何排列的发动机。

为了平衡发动机的慣性力, 首先应当知道活塞的加速度, 将活塞经过的路程按时间取二次导数, 即可决定它。

当曲拐转过角 φ 时, 令活塞走过的路程为

$$\begin{aligned} x &= ME_0 - ME = OE_0 \cos \alpha'_0 \\ &\quad - (MC + EC) = (r + L) \\ &\quad \cos \alpha'_0 - (r \cos \varphi + L \cos \alpha) \\ &= r(\cos \alpha'_0 - \cos \varphi) + \\ &\quad L(\cos \alpha'_0 - \cos \alpha), \quad (14) \end{aligned}$$

式中 α'_0 ——活塞在上止点时, 连杆与气缸中心线 OE_0 间的夹角(常数值);

φ ——从 ON 线算起, 曲拐的转角, ON 通过轴或轮的中心, 平行于气缸轴线 ME_0 ;

α ——连杆和直线 ME_0 间的夹角(此角和角 φ 同为变数)。

取 $\cos \alpha'_0 = 1$, 并代换以 $\cos \alpha = 1 - \frac{\sin^2 \alpha}{2}$ 。

为了求 $\sin \alpha$, 由三角形 ACE 中得

$$AC = AD + DC = r \sin \varphi + b, \quad (15)$$

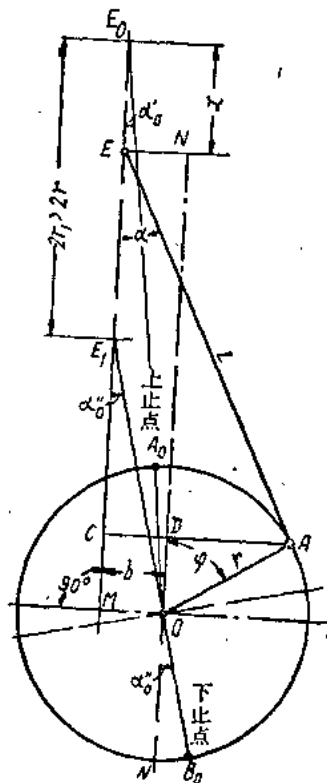


图5. 在曲拐转过角 φ 时, 活塞经过路程的计算

但是 $AC = L \sin \alpha$, 因此有

$$r \sin \varphi + b = L \sin \alpha. \quad (16)$$

结果,

$$\sin \alpha = \frac{r}{L} \sin \varphi + \frac{b}{L}. \quad (17)$$

将方程 (14) 作此代换以后, 得到活塞在曲拐转过角 φ 时期经过路程的更简单公式:

$$\begin{aligned} x &= r(1 - \cos \varphi) + \frac{L}{2} \sin^2 \alpha = r(1 - \cos \varphi) \\ &+ \frac{L}{2} \left(\frac{r}{L} \sin \varphi + \frac{b}{L} \right)^2 = r(1 - \cos \varphi) \\ &+ \frac{r^2}{2L} \sin^2 \varphi + \frac{rb}{L} \sin \varphi + \frac{b^2}{2L}. \end{aligned} \quad (18)$$

略去数值 $\frac{b^2}{2L}$, 则得

$$x = r \left[(1 - \cos \varphi) + \frac{r}{2L} \sin^2 \varphi + \frac{b}{L} \sin \varphi \right]. \quad (19)$$

如果在此方程中代入 $\sin^2 \varphi = \left(\frac{1 - \cos 2\varphi}{2} \right)$, 则可得到下列 x 的公式:

$$x = r \left[(1 - \cos \varphi) + \frac{r}{4L} (1 - \cos 2\varphi) + \frac{b}{L} \sin \varphi \right]. \quad (20)$$

偏心机构的活塞行程 $E_1 E_0 = 2r_1$ 比圆周直径 ($2r$) 稍大。事实上, 由图 5 可得

$$\begin{aligned} E_1 E_0 &= E_0 M - E_1 M = \sqrt{(\tau + L)^2 - b^2} \\ &- \sqrt{(L - \tau)^2 - b^2}. \end{aligned}$$

展开成级数, 并限用最前面两项, 则得

$$\begin{aligned} E_1 E_0 &= 2\tau' = (L + \tau) \left[1 - \frac{b^2}{2(L + \tau)^2} \right] \\ &- (L - \tau) \left[1 - \frac{b^2}{2(L - \tau)^2} \right] = 2\tau \left[1 + \frac{b^2}{2(L^2 + \tau^2)} \right] \\ &\approx 2\tau \left(1 + \frac{b^2}{2L^2} \right) = 2\tau + \frac{b^2 \tau}{L^2}. \end{aligned} \quad (21)$$

将活塞行程按时间取一次导数 $\frac{dx}{dt}$ ，从方程 (14) 求出速度为

$$\begin{aligned} v &= \frac{dx}{dt} = r \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} + L \sin \alpha \frac{d\alpha}{dt} \\ &= \omega r \sin \varphi + L \sin \alpha \frac{d\alpha}{dt}, \end{aligned} \quad (22)$$

式中 $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ ——角速度。

$\cos \alpha_0$ 的导数等于零，因为 α_0 为常数。数值 $\frac{d\alpha}{dt}$ 可以从方程 (17) 求出：

$$\cos \alpha \frac{d\alpha}{dt} = \frac{r}{L} \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} = \omega \frac{r}{L} \cos \varphi, \quad (23)$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \omega \frac{r}{L} \cdot \frac{\cos \varphi}{\cos \alpha}. \quad (24)$$

将 $\frac{d\alpha}{dt}$ 的数值代入方程 (22)，则得

$$v = \omega r \sin \varphi + \omega r \frac{\cos \varphi \sin \alpha}{\cos \alpha} = \omega r \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos \alpha}, \quad (25)$$

或者根据方程 (17)，

$$v = \omega r \left[\sin \varphi + \frac{\cos \varphi}{\cos \alpha} \left(\frac{r}{L} \sin \varphi + \frac{b}{L} \right) \right]. \quad (26)$$

为了求加速度，取二次导数 $\frac{d^2x}{dt^2}$ ，对方程 (26) 取微分，

$$\begin{aligned} \dot{j} &= \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \omega r \left[\cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} + \frac{r}{L} \right. \\ &\quad \times \frac{\cos \alpha \cos^2 \varphi \frac{d\varphi}{dt} - \cos \alpha \sin^2 \varphi \frac{d\varphi}{dt} + \sin \varphi \cos \varphi \sin \alpha \frac{d\alpha}{dt}}{\cos^2 \alpha} \\ &\quad \left. + \frac{b}{L} \cdot \frac{\sin \alpha \cos \varphi \frac{d\alpha}{dt} - \sin \varphi \cos \alpha \frac{d\varphi}{dt}}{\cos^2 \alpha} \right] \\ &= \omega^2 r \left\{ \left[\cos \varphi + \frac{r}{L} \cdot \frac{\cos^2 \varphi}{\cos \alpha} - \frac{r}{L} \cdot \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \alpha} + \frac{r}{L} \right. \right. \end{aligned}$$