研究生教学用书

教育部研究生工作办公室推荐

大气动力学

Atmospheric Dynamics

（修订版）

伍荣生

高等教育出版社

研究生教学用书

教育部研究生工作办公室推荐

大气动力学

Atmospheric Dynamics

（修订版）

伍荣生

高等教育出版社

内容简介

本书是教育部研究生工作办公室推荐的研究生教材，是作者长期从事大气动力学教学和科研实践的总结。主要内容以大气动力学中最基本的概念和处理方法，以及新近发展起来的一些比较成熟的理论为基础，包括矢量与张量运算初步，大气运动基本方程组，大气中的涡旋运动，大气中的准地转运动与地转动量近似，大气边界层，波动的基本概念与数学模型，大气中的 Rossby 波，大气中的一些非线性运动。

本书可作为大气科学类各专业研究生教材或教学参考书，也可供大学高年级学生和科研工作者参阅。

图书在版编目(CIP)数据

大气动力学/伍荣生．—修订版．—北京：高等教育出版社，2002

大气科学专业研究生教材

ISBN 7-04-010427-X

Ⅰ．大…　Ⅱ．伍…　Ⅲ．大气动力学－研究生－教材　Ⅳ．P433

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 074172 号

大气动力学(修订版)

伍荣生

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市东城区沙滩后街 55 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100009	网　　址	http://www.hep.edu.cn
传　　真	010-64014048		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
排　　版	高等教育出版社照排中心		
印　　刷	国防工业出版社印刷厂		
		版　　次	1990 年 10 月第 1 版
开　　本	787×960　1/16		2002 年 7 月第 2 版
印　　张	20.5	印　　次	2002 年 7 月第 1 次印刷
字　　数	350 000	定　　价	28.40 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

前　言

本书自1990年出版后，被许多院校的师生和广大气象工作者选作教材或参考书。在使用该书的同时，他们对此书提出了许多宝贵意见。考虑到本书只涵盖了20世纪80年代以前大气动力学的主要研究结果，而在过去的十年中，气象学者在大气动力学的研究方面已取得了显著进展，提出了许多新的理论和观点。鉴于上述两点，著者感到有必要对此书进行修订。

大气动力学的内容是如此广泛，因此不可能加以全面的介绍，本书只能就最近十年新进展的某些方面进行一些补充。在内容的增补与编写方面，也本着"授之以鱼，不若授之以渔"的精神，以讲授基本原理为主，而不局限于某些特定现象的介绍。

本书的新增内容如下：在第三章中，考虑到位涡思想在解释气旋生成方面有重要的作用，但在天气学中已对此有了详细讨论，所以本书只增列了一些有关文献；在第四章的地转适应部分，增加了从能量极值角度来讨论地转平衡的成因，从另一角度，配合了惯常的以运动方程中各项相对大小比较而得出结论的讲法。同时，也增加了一节地转适应理论在解释锋生现象方面的应用等内容；在本书的第五章大气边界层一章中，我们增加了Ekman动量近似和关于大气边界层抽吸的各种参数化方案比较的内容；在第八章中，还补充了一节非线性斜压波包的内容，这是近年来颇为大家所感兴趣的问题。为了便于学习，在本书中，还增加了一些思考题或习题。

本书的再版得到了高等教育出版社的大力支持，高等理工编辑部办公室的肖娜主任和靳剑辉编辑为本书的再版做了许多辛勤的工作。本书的再版还得到许多同志的鼓励和领导的支持。在再版时，徐银梓教授在他多年使用此书作为研究生教材的基础上，指出了本书在印刷与内容上的一些错误，并提出了许多宝贵的改进意见。北京大学的谭本馗教授以及南京大学的谈哲敏教授，在十年前为本书的出版就付出了许多辛劳，这次他们又不辞辛劳，为本书的再版补充了一些内容，谭本馗教授为本书写了非线性斜压波包一节，谈哲敏教授为本书的增补提出了许多建设性意

见。在此对他们始终不渝的关心与支持，表示谢意。特别要指出，方娟博士协助我增补了有关章节，整理了有关图表与文献，最后，还为全书作了认真细致的审稿，为本书的出版做了大量工作。王春明同学还为本书整理了索引。徐亚梅同志校阅了本书的部分样稿。总之，没有他们的大力支持，本书很难能够如期交付再版，对他们的帮助和支持，在此表示诚挚的谢意。

鉴于本人水平与能力有限，本书在选题与内容的更新等方面，难免会存在错误和不妥之处，欢迎读者批评指正。

伍荣生

2000 年 8 月于南京

一版序言

本书是作者多年来在为研究生讲授的大气动力学讲义基础上编写而成的。讲义稿虽经1978年、1985年两次修改、重印，但近几年的实践深感仍有许多内容没有涉及，特别是新近发展起来的一些比较成熟的理论。因此，在原有基础上，根据大气动力学发展的要求，对讲义的某些重要部分作了进一步的改写和补充，使其系统化。作者希望该书的出版，能为大气动力学的学习提供方便和帮助，并能对大气动力学的研究有所裨益。

大气动力学发展迅速，内容广泛，从中小尺度到大尺度，从中高纬度到热带赤道，从平流层、对流层到边界层，以及近年来兴起的中层大气动力学，这些众多的内容几乎不能用一本书加以概括论述，而且也不可能在半学年内讲授完毕，再加上作者学识限制，无法将这些内容深入掌握、了解并讲授。因此，我们着重选择了最基本的且较为成熟的理论作为本书的框架。书中对大气动力学基本概念和处理方法的讨论优于结论和现象的描述。希望通过对这些内容的学习，能够掌握大气动力学中最常用的概念和处理方法。只有深入地掌握了研究问题的概念、观点和方法，才能充分发挥科学研究的创造力。另外要指出的是，对于中尺度锋生等动力学、流体不稳定理论等问题，鉴于动力气象教科书已有部分介绍，有的内容用少许章节也难以概括，而且发展较快，希望有机会就这两个问题作专门介绍。

本书的编写出版得到气象出版社的大力支持；在整理讲稿和编写过程中，得到我的研究生谭本馗、仪垂祥、谈哲敏等同志的帮助，并提出了许多宝贵意见，在此向他们表示感谢。由于水平有限，难免有不妥和错误之处，望批评指正。

作者

1989年4月

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》。行为人将承担相应的民事责任和行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

现公布举报电话及通讯地址：

电　话：(010) 84043279　13801081108

传　真：(010) 64033424

E-mail：dd@hep.com.cn

地　址：北京市东城区沙滩后街55号

邮　编：100009

责任编辑　靳剑辉

封面设计　李卫青

责任绘图　吴文信

版式设计　史新薇

责任校对　李　辉

责任印制　杨　明

目　录

第一章 矢量与张量运算初步

在讨论与分析具体问题时，常常要引用某一给定的坐标系，而坐标系在气象问题中是非常重要的。对于不同的研究对象经常采用某些不同的特殊坐标系，例如，有平面标准坐标，球面坐标，p 坐标，σ 坐标等等。但对于研究物理问题时，例如，了解力与运动的关系时，设法抛弃坐标系，采用矢量表示，从较抽象角度来进行研究，从而可以演化到各个具体坐标系。张量是矢量的一种逻辑上的推广，对于更复杂的对象，可以有一个较好的处理方法。它与矢量一样，不着重于坐标系，对于任意坐标均可以计算其分量，同时，通过坐标变换，即从一个坐标变换到另一个坐标，计算出对应的分量关系，这也是张量计算的重要特点。这对于研究大气运动的普遍规律与具体问题，都有很大好处。鉴于目前的大气动力学教科书中，均没有对此进行讲解，所以在本章中，给它一定的篇幅，将张量运算的基本概念与方法，作一简明的介绍。

§1 直角坐标系中的矢量运算规则

本节引进了一种简写记法——指标记法，并讨论了矢量的一些基本运算规则。

在三维欧氏(Euclid)空间中，某一点 P 的矢径 $\vec{r}$ 可用笛卡尔直角坐标系① $Ox_1x_2x_3$ 中的三个坐标分量 x_1,x_2,x_3 来确定(图 1.1)，即

$$\vec{r}=\sum_{i=1}^{3}x_i\vec{e}_i \tag{1.1.1}$$

其中 $\vec{e}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\vec{e}_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\vec{e}_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$，它们分别为坐标轴 Ox_1，Ox_2，Ox_3 上的单位矢量，方程(1.1.1)中的指标 i 叫做哑指标，其中 T 表示行列的转置。

① 在以后的章节中，为了方便起见均用直角坐标系来称笛卡尔坐标。

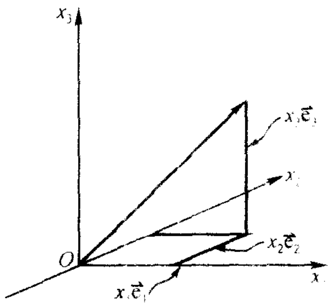

图 1.1　直角坐标系中矢量 $\vec{r}$ 的各分量单位矢分别为 $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$

假如我们采用爱因斯坦求和约定，即当一个指标重复一次时(哑指标)，就表示对该指标遍取 1,2,3 求和，据此，(1.1.1)可缩写为

$$\vec{r} = x_i \vec{e}_i \tag{1.1.2}$$

这样，大气运动速度 $\vec{V}$ 可写为

$$\vec{V} = v_i \vec{e}_i \tag{1.1.3}$$

大气运动的动能可写为

$$K = \frac{1}{2} v_i v_i \tag{1.1.4}$$

由此可见，求和约定对于今后的讨论将会带来很大方便。

在直角坐标系中，两个矢量 $\vec{A},\vec{B}$ 的点乘或内积的定义为

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\alpha \tag{1.1.5}$$

其中 α 为两个矢量的夹角。在直角坐标系中，单位矢之间有以下关系

$$\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j = \begin{cases} 1 & 若\ i=j \\ 0 & 若\ i\neq j \end{cases} \tag{1.1.6}$$

现引入 Kronecker 符号 δ_{ij}，它的定义为

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & 若\ i=j \\ 0 & 若\ i\neq j \end{cases} \tag{1.1.7}$$

因此有表示式

$$\delta_{ij} = \vec{e}_i\cdot\vec{e}_j \tag{1.1.8}$$

这也是 δ_{ij} 的另一种定义。

排列符号 $\in_{ijk}$ 可表示为

$$\in_{ijk}=\begin{cases}1 & \text{当 } i,j,k \text{ 构成 } 1,2,3 \text{ 的偶置换} \\ -1 & \text{当 } i,j,k \text{ 构成 } 1,2,3 \text{ 的奇置换} \\ 0 & \text{当 } i,j,k \text{ 中至少有两个相同}\end{cases} \tag{1.1.9}$$

据此

$$\begin{aligned}&\in_{123}=\in_{231}=\in_{312}=1\\&\in_{132}=\in_{321}=\in_{213}=-1\end{aligned} \tag{1.1.10}$$

于是按直角坐标系中右手法则，可知三单位矢的矢乘有以下关系

$$\vec{e}_i\times\vec{e}_j=\in_{ijk}\vec{e}_k \tag{1.1.11}$$

利用 δ_{ij}，$\in_{ijk}$ 可使运算化简。例如，a_j 乘以 δ_{ij} 可写为

$$\delta_{ij}a_j=\delta_{i1}a_1+\delta_{i2}a_2+\delta_{i3}a_3$$

当 $i=1$ 时，$\delta_{1j}a_j=a_1$，当 $i=2$ 时，$\delta_{2j}a_j=a_2$，依此可推知

$$\delta_{ij}a_j=a_i \tag{1.1.12}$$

同理，

$$\delta_{im}T_{mj}=T_{ij} \tag{1.1.13}$$

Kronecker 符号与排列符号具有一定的关系，即

$$\in_{ijk}\in_{mnk}=\delta_{im}\delta_{jn}-\delta_{in}\delta_{jm} \tag{1.1.14}$$

有关它的证明，在一般的矢量分析书中都可找到。

利用上述的关系式，对于直角坐标系中的矢量运算，是很方便的，下面举出应用的例子。

设有矢量 $\vec{a}$，$\vec{b}$、$\vec{c}$，则它们可分别表示为

$$\vec{a}=a_i\vec{e}_i \tag{1.1.15}$$

$$\vec{b}=b_j\vec{e}_j \tag{1.1.16}$$

$$\vec{c}=c_k\vec{e}_k \tag{1.1.17}$$

于是，可得以下关系式

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_i\vec{e}_i\cdot b_j\vec{e}_j=a_ib_j\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j=a_ib_i \tag{1.1.18}$$

$$\begin{aligned}\vec{a}\times\vec{b}&=a_i\vec{e}_i\times b_j\vec{e}_j\\&=a_ib_j\vec{e}_i\times\vec{e}_j=a_ib_j\in_{ijk}\vec{e}_k\end{aligned} \tag{1.1.19}$$

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})&=a_i\vec{e}_i\cdot(b_j\vec{e}_j\times c_k\vec{e}_k)\\&=a_ib_jc_k\vec{e}_i\cdot(\vec{e}_j\times\vec{e}_k)\\&=a_ib_jc_k\vec{e}_i\cdot\in_{jkl}\vec{e}_l=a_ib_jc_k\in_{jkl}\delta_{li}\\&=a_ib_jc_k\in_{ijk}\end{aligned} \tag{1.1.20}$$

同理可得

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=a_i b_l c_k \in_{lkm} \in_{imn} \vec{e}_n \tag{1.1.21}$$

利用(1.1.14)式很容易证得

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c} \tag{1.1.22}$$

下面将对流体力学中经常引用的∇符号及其运算，作一扼要介绍。

令∇符号定义为

$$\nabla\equiv\vec{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i} \tag{1.1.23}$$

因此对任一标量 φ，其梯度为

$$\nabla\varphi\equiv\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi\vec{e}_i \tag{1.1.24}$$

对任一矢量 $\vec{a}$，其散度及旋度分别为

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\vec{a}&=\vec{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}\cdot a_j\vec{e}_j\\&=\frac{\partial a_j}{\partial x_i}\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j=\frac{\partial a_j}{\partial x_i}\delta_{ij}=\frac{\partial a_i}{\partial x_i}\end{aligned} \tag{1.1.25}$$

$$\nabla\times\vec{a}=\frac{\partial a_j}{\partial x_i}\in_{ijk}\vec{e}_k \tag{1.1.26}$$

利用这些公式，可以很方便地来推演有关流体力学的方程。

有关非直角坐标系中的微分运算，即散度，旋度等，将在§6中从张量的角度来加以介绍。

§2 斜交坐标系中的矢量运算规则

如果坐标轴不是正交而是斜交的，则有许多不同的特点。为了方便起见，就以二维的情况来加以说明。

如图1.2所示，$\vec{e}_1,\vec{e}_2$ 为斜交坐标的单位矢，其夹角为 α，$\vec{r}$矢在坐标轴上的投影，分别为 r^1,r^2(注意，在此处将附标已移到上部，理由下面再说)，如此，依矢量的加法原理，有

$$\vec{r}=r^i\vec{e}_i \tag{1.2.1}$$

在斜交坐标中，两个矢量的点乘或内积与直角坐标有所不同，因为两个矢量 $\vec{a},\vec{b}$的内积为

$$a^i\vec{e}_i\cdot b^j\vec{e}_j=a^ib^j\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j \tag{1.2.2}$$

在二维问题中，将上式展开，即

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(a^1\vec{e}_1+a^2\vec{e}_2)\cdot(b^1\vec{e}_1+b^2\vec{e}_2)$$
$$=a^1b^1+a^1b^2\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2+a^2b^1\vec{e}_2\cdot\vec{e}_1+a^2b^2 \quad (1.2.3)$$

由于，坐标是斜交的，交角为 α，故有

$$\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2=\cos\alpha \quad (1.2.4)$$

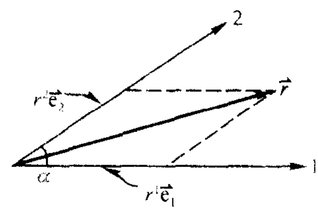

图 1.2　在斜交坐标中，矢量 $\vec{r}$ 的各分量，单位矢分别为 $\vec{e}_1,\vec{e}_2$

所以上式可写成

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(a^1+a^2\cos\alpha)b^1+(a^2+a^1\cos\alpha)b^2$$
$$=a^1(b^1+b^2\cos\alpha)+a^2(b^2+b^1\cos\alpha) \quad (1.2.5)$$

如令

$$a^1+a^2\cos\alpha=a_1 \quad (1.2.6a)$$
$$a^2+a^1\cos\alpha=a_2 \quad (1.2.6b)$$

或者

$$b^1+b^2\cos\alpha=b_1 \quad (1.2.7a)$$
$$b^2+b^1\cos\alpha=b_2 \quad (1.2.7b)$$

则上式可写成

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b^1+a_2b^2$$
$$=a^1b_1+a^2b_2 \quad (1.2.8)$$

这样，在形式上与直角坐标系是相同的，很容易将上述处理方法推广到三维情况，即

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a^ib_i=a_ib^i \quad (1.2.9)$$

从图 1.3 可知

$$a_1=a^1+a^2\cos\alpha=Oa'=\vec{a}\text{在 }O1\text{ 轴上的投影} \quad (1.2.10)$$

同理

$$a_2=\vec{a}\text{在 }O2\text{ 轴上的投影} \quad (1.2.11)$$

对于 b_1,b_2 有相似的结果。

如另作一个坐标系，$O1'2'$，使得 $O1'$ 垂直于 $O2$ 轴，$O2'$ 垂直于 $O1$ 轴。从图可以知道

$$Oa''=\frac{Oa'}{\sin\alpha}=\frac{a_1}{\sin\alpha}$$
$$O\hat{\hat{a}}=\frac{O\dot{a}}{\sin\alpha}=\frac{a_2}{\sin\alpha} \quad (1.2.12)$$

因此 $\vec{a}$ 可以写成

$$\vec{a} = a_1\vec{e}^1 + a_2\vec{e}^2 = a_i\vec{e}^i \tag{1.2.13}$$

其中 $\vec{e}^1,\vec{e}^2$ 表示在 $O1',O2'$ 方向上的矢量，其大小为 $\frac{1}{\sin\alpha}$。

从以上简单例子可以见到，$\vec{e}_1$ 和 $\vec{e}_2$ 是单位矢，而 $\vec{e}^1,\vec{e}^2$ 的大小不等于 1，其方向分别在与 O2，O1 轴相正交的方向上。

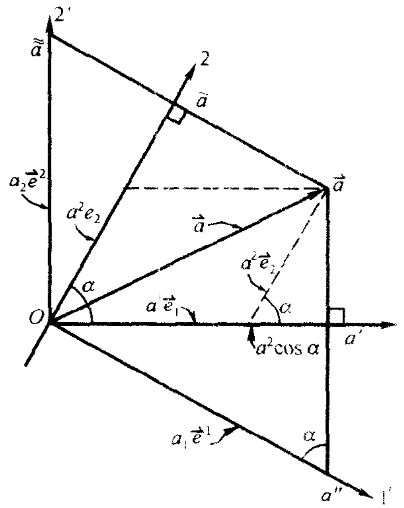

图 1.3 在斜交坐标中，逆变与协变矢量、逆变与协变分量的示意图

引入 $\vec{e}_i$ 与 $\vec{e}^i$ 的概念之后，很容易看到它们有以下的关系式，即

$$\vec{e}^i\cdot\vec{e}_j = \delta^i_j = \begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases} \tag{1.2.14}$$

这样，在斜交坐标中，也有与直角坐标相似的结果，所不同的是附标有上，有下，而上附标与下附标的量是具有不同的定义。

以后约定，称 $\vec{e}_i$（有下标的量）为协变矢量，$\vec{e}^i$（有上标的量）为逆变矢量。称 a^i,a_i 分别为逆变分量和协变分量，对于斜交坐标系中，矢量可以写成

$$\begin{aligned}\vec{a} &= a^i\vec{e}_i = a_i\vec{e}^i\\ \vec{b} &= b^i\vec{e}_i = b_i\vec{e}^i\end{aligned} \tag{1.2.15}$$

利用这些关系，便可以求得

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a^i\vec{e}_i\cdot b_j\vec{e}^j = a^ib_j\vec{e}_i\cdot\vec{e}^j \tag{1.2.16}$$

利用(1.2.14)式便得到

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_i b^i \tag{1.2.17}$$

这样，在形式上，便完全与直角坐标相同了。

在直角坐标中，$\alpha=\frac{\pi}{2}$，因之，逆变矢量 $\vec{e}^i$ 和协变矢量 $\vec{e}_i$ 完全重合，因之，两个表示式是相同的，所以就没有必要区分协变和逆变分量。而对于非直角坐标系，则必须将矢量写成(1.2.15)式即逆变或协变分量的形式，这样可以利用(1.2.14)式，便于运算。这是直角坐标与斜交坐标的差异所在，也是引入张量的一个基本的出发点，在以后将根据这一概念来分析坐标变换，张量定义等。

§3　基本矢量与度量张量

气象问题中，首先遇到的是坐标问题，通常有标准坐标，柱面坐标，球面坐标等等，因此，有必要从较高一点的观点来分析与讨论坐标问题。

下面就以一个最简单的例子来加以说明，设在平面的极坐标中，如图1.4所示，有

$$d\vec{r}=dr\,\vec{e}_1+r d\theta\,\vec{e}_2 \tag{1.3.1}$$

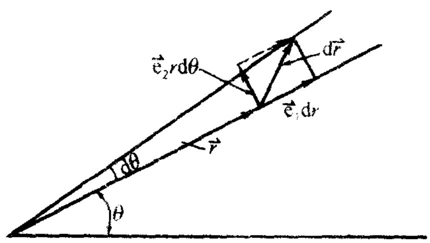

图1.4　极坐标中的基本矢

在此坐标系中，坐标的变化为 dr，$d\theta$，因此上式还可以写成

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= dr\,\vec{g}_1+d\theta\,\vec{g}_2 \\ &= \vec{g}_i\,dx^i \end{aligned} \tag{1.3.2}$$

其中

$$\vec{g}_1=\vec{e}_1 \quad \vec{g}_2=r\,\vec{e}_2 \tag{1.3.3}$$

$$dx^1=dr \quad dx^2=d\theta \tag{1.3.4}$$