北京朗曼教学与研究中心资料

中学数学 1+1

——初三几何同步讲解与测试

主编　张志朝　储建国

天津人民出版社

敬告读者

原由中国青年出版社出版的，由宋伯涛总主编的《中学1+1》系列丛书，在经过较大程度的修订、改版或重新编写以后，现改由天津人民出版社出版，特此声明。

《中学1+1》系列丛书为作者精心之作，值此重新出版之际北京朗曼教学与研究中心向全国千百万热心读者深表谢意。

本书读者如有疑难问题，可来信与我们联系，朗曼中心将本着为读者服务及负责的精神，及时帮助您排忧解难，与您共同切磋，共同研究，携手共勉，建立友谊。

作者声明：《中学1+1》和《非常讲解》系列丛书为北京朗曼教学与研究中心专项研究成果，请读者认准封面上“**北京朗曼教学与研究中心教研成果**”、“**宋伯涛总主编**”等字样，以防假冒。凡以**《中学1+1》**或“**宋伯涛总主编**”名义出版的任何其它版本均为侵权行为。

近年来，已发现个别出版物和非出版物公然冒用《中学1+1》品牌，大量盗用《中学1+1》系列丛书内容及其它著作内容。作者声明：凡冒用“1+1”品牌，盗用本书内容或与本书内容雷同的任何其它版本，均为侵犯知识产权行为。保护正版是每个真正尊重知识的忠诚读者的义务，如发现侵权及盗版行为，请及时来信告诉我们，我们将根据有关法律及规定对侵权及盗版者和非法买卖盗版书的个人及单位作出严肃处理。

本书在全国各地均有销售，读者可来信邮购。

来信请寄：北京市朝阳区亚运村邮局89号信箱，北京朗曼教学与研究中心蒋雯丽收，**邮编**：100101。**联系电话**：010-64925886，010-64925887。**本中心网址**：http:// www.lmedu.com.cn

再版前言

国家基础教育课程改革启动至今已近两年，义务教育《课程标准》的实施范围正在逐步扩大，新的教育理念被越来越多的教育工作者和社会人士所接受，我国基础教育事业正经历着一次深刻的变革。这个变革的核心，对于教师来说，就是改变角色定位；对于学生来说，就是变革学习方式。本着这样的精神，同时为了适应课程改革深入发展的需要，今年再版时，我们在广泛征求专家、教师、学生和家长意见的基础上，作了较大程度的修改。

本书以新数学大纲为指导，按照新教材的体系分章编写。其特点在于结合教材对各章节重点、难点、疑点及考点等逐一进行讲解，内容详尽，条理清晰，分析透彻，所选例题题型系统全面。所涉及内容主要是各单元应掌握的**基础知识、知识运用、思维方法、解题方法**等，其中对例题的分析处理十分到位，不仅有恰到好处的思路点拨与规范解答，更重要的是解题后的说明，它是作者解题的体会和感受，是解题经验的总结。因此也可以说它是作者从解题实践中具体概括出来的精髓。在说明中，作者言简意赅地揭示巧思的思维过程；如何灵活地选用数学方法；对于可转化或引申的题目，给出其转化或引申的形式及其解法；对题中可能出现的错解予以指出等等。它将给学生以启示，帮助学生领悟作者选题的意图，使学生做到立足基础，抓住关键，突破难点，研究方法，以一题代一类，真正使学生做到举一反三，触类旁通，从而达到跳出题海、启迪思维的效果。同步测试部分根据各章节特点对基础知识、重点难点、知识应用进行针对性的巩固训练。其中选用了目前各地较为常用的题型，增加了一些体现近几年中考命题方向的新题，并补充了一些与生产生活密切相关的应用题，可以说题型十分丰富，且综合性强，旨在帮助学生巩固知识，提高综合运用知识的能力。

学生在使用本书过程中，应结合教科书，努力掌握知识点的各种用法及注意事项，对某些重点难点要进行仔细的分析、研究，结合例题，做到深刻理解与牢固掌握。做同步练习时，要结合教科书及讲解内容进行独立思考，首先考虑应选择何种解题思路与策略，然后实施解题，并注意解题的规范性，解题结束后可与题解对照，弄懂弄通为什么是这个答案而不是那个答案?为什么这样解而不是那样解?还可以怎样解?怎样才对?从一个点进行散发性联想思维。课后还应对某些重点题目进行反复的再思考、再分析、再总结。有问题主动询问，及时解决。

学习《课程标准》，更新教育观念，有一个不断深入的过程;课程改革的实施，也需要不断地探索和积累。本书此次修订正是学习《课程标准》，改革教学内容和方法的一个具体的落实。希望我们的努力能给老师和同学们的教学活动带来切实而有效的帮助，虽然我们兢兢业业，勉力为之，但因水平有限，难免有错漏之处，诚望批评指正，以利再版时修改和完善。

凡需要本书以及本系列其他图书的读者可与本中心联系，联系电话:010-64925886,64925887，通信地址:北京市朝阳区亚运村邮局 89 号信箱。

宋伯涛

2003 年 6 月于北师大

目录

CONTENTS

第 6 章 解直角三角形

本章教材分析

本章内容分为两部分.第一部分包括三小节,主要介绍锐角三角函数的概念、特殊角的三角函数值、同角三角函数关系、互余角的三角函数关系,以及用计算器求锐角三角函数和由锐角三角函数值求锐角.介绍如何利用计算器,由已知锐角求出它的三角函数值和由已知的三角函数值求出它对应的锐角.第二部分包括三小节,主要研究解直角三角形及其应用.

本章内容属于三角学,中学数学把三角学内容分成两个部分.第一部分归入初中阶段,就是本章的解直角三角形,第二部分是三角学内容的主体部分,包括解斜三角形、三角函数、反三角函数和三角方程,将归入高中阶段.前一部分是后一部分的基础,学好锐角三角函数和解直角三角形,将为继续学习三角学的第二部分内容打下扎实的基础.

本章的重点是锐角三角函数的概念和直角三角形的解法.特殊锐角及其三角函数值之间的对应关系也很重要,应当牢记,即:已知特殊角,说出它的四个三角函数值;反之,已知特殊角的函数值,说出这个角的度数.

锐角三角函数的概念,既是本章的难点,又是学好本章知识的关键.

一、锐角三角函数

6.1 正弦和余弦

学习目标

1.了解直角三角形中正弦和余弦的概念.能正确地应用 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 表示直角三角形中两边的比.

2.熟记特殊角(0°、90°、30°、45°、60°)的正弦值和余弦值.

3.掌握互余两角的正弦和余弦的关系.

4.掌握同角的正弦和余弦的关系式.

5.了解正弦函数和余弦函数的增减性,由已知锐角求出它的正弦值和余弦值;由已知三角函数值求出它对应的锐角的度数.

中考要求

1. 了解正弦和余弦的概念，掌握正弦和余弦的定义.

2. 熟记 $30°, 45°, 60°$ 角的正弦值和余弦值，会计算含有特殊角的三角函数式的值，会由一个特殊角的正弦或余弦值，求出它对应的角度.

3. 掌握互余两角的正弦和余弦的关系以及同角的正弦和余弦的关系.

重点难点

重点是正弦和余弦的概念及特殊锐角与其正弦、余弦值之间的对应关系，互余两角的正弦和余弦的关系.

难点是正弦和余弦的概念.

知识点讲解

1. 正弦、余弦定义

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，我们把锐角 A 的对边与斜边之比叫做 $\angle A$ 的正弦，记作 $\sin A$. 即 $\sin A=\dfrac{\angle A\text{ 的对边}}{\text{斜边}}=\dfrac{a}{c}$.

我们把锐角 A 的邻边与斜边之比叫做 $\angle A$ 的余弦，记作 $\cos A$. 即

$$\cos A=\frac{\angle A\text{ 的邻边}}{\text{斜边}}=\frac{b}{c}.$$

(如图 6.1—1)

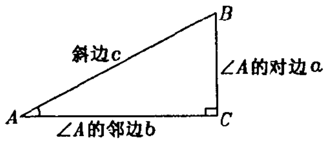

图 6.1—1

注意：(1)"$\sin A$"和"$\cos A$"都是一个完整的记号. 不能把 $\sin A$ 看作 $\sin$ 与 A 的乘积，离开了 $\angle A$ 的 $\sin$ 没有什么意义，只有连起来写成 $\sin A$ 才表示 $\angle A$ 的正弦.

(2) $\sin A=\dfrac{a}{c}$ 实质是一个比值，没有单位，它只与 $\angle A$ 的大小有关，而与三角形的大小无关. 例如，$\sin 30°=\dfrac{1}{2}$，并不表示 $\angle A$ 的对边长是 1，斜边长是 2. 只表示对边与斜边之比是 $1:2$.

(3) $\sin A$ 和 $\cos A$ 中的 $\angle A$ 的角的记号"$\angle$"习惯上省略不写，但对于用三个大写字母和阿拉伯数字表示的角，角的记号不能省略.

例如："$\sin\angle ADB$"不能写成"$\sin ADB$"；"$\sin\angle 1$"不能写成"$\sin 1$".

(4) $\sin A+\sin B\neq\sin(A+B)$，$\sin A\cdot\sin B\neq\sin(AB)$.

(5) $(\sin A)^2$ 和 $(\cos A)^2$ 常常简写成 $\sin^2 A$ 和 $\cos^2 A$，不要写成 $\sin A^2$ 和 $\cos A^2$.

2. $30°$、$45°$、$60°$ 角的正弦、余弦值

根据正弦和余弦定义，结合图 6.1—2，可得到如下几个常用的特殊角的正弦、余

弦值：

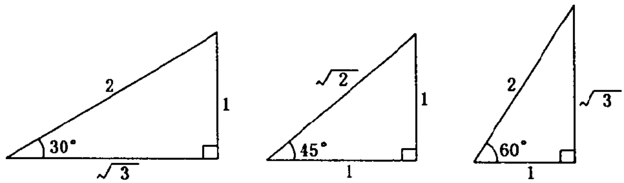

图 6.1－2

(1)$\sin30°=\frac{1}{2}$，$\sin45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\sin60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(2)$\cos30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos60°=\frac{1}{2}$.

注意：(1)以上数值必须熟记，以便会由这些数值立即说出对应的特殊锐角的度数.注意抓住在直角三角形中，30°角的对边是斜边的一半这一特点.

(2)30°、45°、60°的正弦、余弦值也可以按下面口诀记忆.“1、2、3，3、2、1，都比2，分子根号别忘带.”

思考：由上述数值，容易看到：

$\sin30°=\cos60°$，$\sin45°=\cos45°$，$\sin60°=\cos30°$.

也就是说，30°、45°、60°这三个特殊角的余弦值分别等于它们的余角60°、45°、30°的正弦值.这个结论是否对任意锐角都成立呢？

3.互余两角的正弦和余弦的关系

观察图 6.1－3 得$\angle A$的对边恰是$\angle B$的邻边，而$\angle B$的对边也是$\angle A$的邻边.

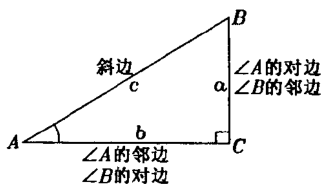

图 6.1－3

∵ $\sin A=\frac{\angle A\text{的对边}}{\text{斜边}}=\frac{a}{c}$，

$\cos B=\frac{\angle B\text{的邻边}}{\text{斜边}}=\frac{a}{c}$，

∴ $\sin A=\cos B$.

同理可得 $\cos A=\sin B$.又$\angle A+\angle B=90°$，

即$\angle B=90°-\angle A$，

因此 $\sin A=\cos(90°-A)$，$\cos A=\sin(90°-A)$.

就是说：任意锐角的正弦值等于它的余角的余弦值，任意锐角的余弦值等于它的余角的正弦值.

注意：此结论适用于两个角互为余角的情况，它们并非一定是同一直角三角形中的两个锐角.

4.同角的正弦和余弦的关系

∵ $\sin^2A+\cos^2A=\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{c^2}$

根据勾股定理可知 $a^2+b^2=c^2$

∴ $\dfrac{a^2+b^2}{c^2}=1$，即

$\sin^2A+\cos^2A=1$

典例剖析

例1 已知 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$\sin A=\dfrac{5}{13}$. 求 $\cos A$.

分析：本题已知$\angle A$ 的正弦，要求余弦，可以设三角形的两条边，求出第三条边，然后根据定义求得 $\cos A$. 也可以直接利用同角的正弦和余弦关系求解.

解：**方法一**：如图 6.1—4，

∵ $\sin A=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{5}{13}$.

∴ 设 $BC=5k$，$AB=13k$.

由勾股定理，得 $AC=12k$.

∴ $\cos A=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{12k}{13k}=\dfrac{12}{13}$.

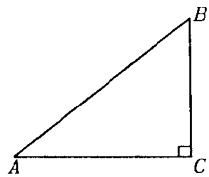

图 6.1—4

方法二：∵ $\sin^2A+\cos^2A=1$. $\sin A=\dfrac{5}{13}$.

∴ $\cos^2A=1-\sin^2A=1-\left(\dfrac{5}{13}\right)^2=\left(\dfrac{12}{13}\right)^2$.

又$\angle A$ 为锐角，$\cos A>0$.

∴ $\cos A=\dfrac{12}{13}$.

说明：本题所用的两种方法都是比较重要的. 方法一构造直角三角形，方法二利用同角的正弦和余弦的关系. 在今后解题中要合理选用. 做到数形结合. 避免用错正弦和余弦的定义.

例2 已知 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，求 $\cos B$ 的值?

分析：由 Rt△ABC 知$\angle A+\angle B=90°$，故 $\sin A=\sin(90°-B)=\cos B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

解：**方法一**：∵ $\angle C=90°$

∴ $\angle A=90°-\angle B$

∴ $\sin A=\sin(90°-B)=\cos B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

方法二：∵ $\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ∴ $\angle A=60°$

∵ $\angle A+\angle B=90°$ ∴ $\angle B=30°$

∴ $\cos B=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

说明：在 Rt△ABC 中，如果$\angle C=90^\circ$，则 $\sin A=\cos B$，$\cos A=\sin B$.

例3 计算下列各式的值.

(1)$1-2\sin 30^\circ\cos 30^\circ$.

(2)$\sin 30^\circ-\cos^2 45^\circ+\sin^2 60^\circ-\cos 60^\circ$.

(3)$\frac{\sin 60^\circ}{2\cos 45^\circ}-2\sin^2 30^\circ$.

分析：将特殊角的正、余弦值代入，并化简即可.

解：(1)原式$=1-2\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(2)原式$=\frac{1}{2}-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$

$=-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$

(3)原式$=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\times\frac{\sqrt{2}}{2}}-2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{1}{2}$

说明：要正确地记忆特殊角的正弦和余弦值，并且结果要化到最简.

例4 计算：(1)$\sin 53^\circ\cos 37^\circ+\cos 53^\circ\sin 37^\circ$.

(2) $\sqrt{\sin^2 36^\circ-4\sin 30^\circ\cos 54^\circ+1}+\cos 54^\circ$.

分析：本题中出现的锐角 53°、37°、36°、54°均为非特殊角．又不能用计算器，因此要考虑利用正弦、余弦的关系将它们消去.

解：(1)∵ $\sin 53^\circ=\sin(90^\circ-37^\circ)=\cos 37^\circ$

$\cos 53^\circ=\cos(90^\circ-37^\circ)=\sin 37^\circ$

∴ 原式$=\cos^2 37^\circ+\sin^2 37^\circ=1$.

(2)∵ $\cos 54^\circ=\cos(90^\circ-36^\circ)=\sin 36^\circ$

∴ 原式$=\sqrt{\sin^2 36^\circ-2\sin 36^\circ+1}+\sin 36^\circ$

$=|\sin 36^\circ-1|+\sin 36^\circ$

$=1-\sin 36^\circ+\sin 36^\circ$

$=1$.

说明：在这类出现非特殊角的计算题中，关键是善于应用互余两角的正、余弦关系以及同角的正余弦关系将正弦或余弦进行转化，从而达到化简的目的.

例5 当锐角 $A>30^\circ$时，$\cos A$ 的值

A. 小于$\frac{1}{2}$ B. 小于$\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. 大于$\frac{1}{2}$ D. 大于$\frac{\sqrt{3}}{2}$

分析：要正确解答此题需明确两点：(1)$\cos 30^\circ$等于多少？ (2)当 $A>30^\circ$时，

$\cos A$ 的值是随 A 增大而增大，还是随 A 的增大而减小？

解：∵ $\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$，且当 A 为锐角时，$\cos A$ 的值随 A 的增大而减小.

∴ $\cos A<\frac{\sqrt{3}}{2}$

∴ 选 B.

说明：本题的关键是要明确正弦和余弦值的增减性. 本题也往往有另外一种考查方法，如：若 $\sin A>\frac{\sqrt{3}}{2}$，则锐角 A 的范围是________. 解答这一题时，仍然利用正弦随锐角 $\angle A$ 的增大而增大这一性质，得到答案：$60°<A<90°$.

例 6 已知 $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{4}$，且 $0°<\alpha<45°$.

求 $\sin\alpha-\cos\alpha$ 的值.

分析：根据 $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{4}$ 及隐含条件 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 可以解方程组求出 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$. 但这一方法太繁. 因此，考虑先求 $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=1-\sin\alpha\cos\alpha$，然后再求出 $\sin\alpha-\cos\alpha$.

解：∵ $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{4}$

∴
$$\begin{aligned}(\sin\alpha-\cos\alpha)^2&=\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha\\&=1-2\sin\alpha\cos\alpha\\&=1-2\times\frac{1}{4}\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

又 $0°<\alpha<45°$，∴ $\sin\alpha<\cos\alpha$.

∴ $\sin\alpha-\cos\alpha<0$.

∴ $\sin\alpha-\cos\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

说明：本题要根据 α 的范围确定 $\sin\alpha-\cos\alpha$ 的符号. 一般地，对于锐角 α：

当 $0°<\alpha<45°$ 时，$\sin\alpha<\cos\alpha$

当 $\alpha=45°$ 时，$\sin\alpha=\cos\alpha$

当 $45°<\alpha<90°$ 时，$\sin\alpha>\cos\alpha$.

例 7 如图 6.1—5，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$b=8$，$\angle A$ 的平分线 $AD=\frac{16\sqrt{3}}{3}$，求 $\angle B$ 及 a，c 的值.

分析：本题涉及直角三角形较多的元素. 结合条件和问题，我们可从 Rt△ABC 入手（因为 $b=8$，$AD=\frac{16\sqrt{3}}{3}$，$\angle C=90°$，条件较集中），利用三角函数的定义，可先求出

$\angle DAC$，再结合 AD 平分 $\angle BAC$，求出 $\angle BAC$，进一步求出 $\angle B$ 和 a、c 边长.

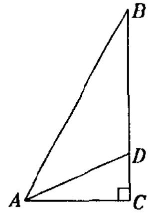

图 6.1—5

解：在 Rt$\triangle ACD$ 中，$AC=8$，$AD=\frac{16\sqrt{3}}{3}$，

$\angle C=90°$

$\cos\angle DAC=\frac{AC}{AD}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\angle DAC=30°$

又 AD 平分 $\angle BAC$，

∴ $\angle BAC=60°$，$\angle B=30°$

$c=AB=2AC=16$

∴ $a=c\cdot\sin A=16\cdot\sin 60°=8\sqrt{3}$

说明：突破口往往要从条件和问题两方面来考虑，将条件有效集中，形成“合力”，以便更有效、更有方向性地解决问题.

例 8 已知$\triangle ABC$，a、b、c 分别是$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的对边，且$\angle C=90°$.

求证：$a^3\cos A+b^3\cos B=abc$.

分析：这是一道证明恒等式问题，我们可以从较复杂的左边入手利用正弦和余弦的定义消去 $\cos A$ 和 $\cos B$，再化简.

证法一：左式 $=a^3\cdot\frac{b}{c}+b^3\cdot\frac{a}{c}$

$$=ab\left(\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{c}\right)=\frac{abc^2}{c}=abc=\text{右式}$$

∴ 原式得证.

证法二：右式 $=ab\cdot\frac{c^2}{c}=ab\frac{a^2+b^2}{c}$

$$=a^3\ \frac{b}{c}+b^3\ \frac{a}{c}$$

$$=a^3\cos A+b^3\cos B=\text{左式}$$

∴ 原式得证.

说明：在证有关恒等式问题中，大都是从一边朝另一边转化，往往是从较复杂的一边向简单的一边转化(但过程中要不断调控方向以防偏差). 有些题目，还可借助第三式作为“桥梁”进行过渡，达到证明的目的.

例 9 已知：在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$. 且 $\sin A$、$\sin B$ 是关于 x 的方程 $(m+5)x^2-(2m-5)x+m-8=0$ 的两根.

求 m 的值.

分析：∵ $A+B=90°$，∴ $\sin B=\cos A$. 即方程的两根为 $\sin A$ 和 $\cos A$. 利用 $\sin^2 A+\cos^2 A=1$ 及根与系数的关系列出关于 m 的方程. 从而可以求出 m.

解：∵ $A+B=90°$，∴ $\sin B=\cos A$.

∴ 方程的两根为 $\sin A$ 和 $\cos A$. 由根与系数的关系知