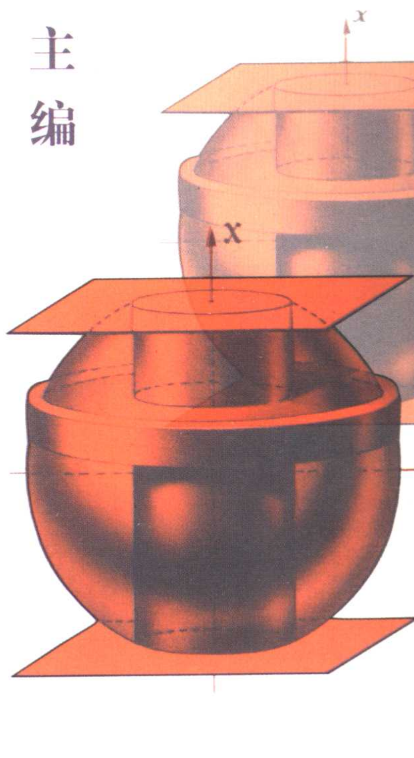
高等数学

一元微积分

上海市普通高校『九五』重点教材

谢国瑞 主编



华东理工大学出版社

上海普通高校“九五”重点教材

高 等 数 学

（一元微积分）

上海市教育委员会　组编
谢国瑞　主编

华东理工大学出版社

内 容 提 要

这是大学高等数学(微积分)课程的教材,本册为一元微积分部分,由函数、导数、微分学的基本定理、微分学的应用、积分、积分的应用、微分方程、再论极限、数列与无穷级数等共九章组成。所含内容深广度达到工学、经济学各专业对相应内容的教学基本要求。

本书的编写比较注意教学法,突出重点,分散难点,注意锻炼处理实际问题的能力,激发学习兴趣,适宜作为一般院校相应课程的教材。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.一元微积分/谢国瑞主编.—上海:华东理工大学出版社,1998.7(2002.6重印)

ISBN 7-5628-0860-0

Ⅰ.高… Ⅱ.谢… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材②微积分-高等学校-教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第042898号

上海普通高校"九五"重点教材

高 等 数 学

(一元微积分)

上海市教育委员会 组编

谢国瑞 主编

华东理工大学出版社出版发行

上海市梅陇路130号

邮政编码 200237 电话 64250306

新华书店上海发行所发行经销

南京理工大学激光照排公司排版

上海展望印刷厂印刷

开本 850×1194 1/32 印张 22 字数 590千字

1998年7月第1版 2002年6月第4次印刷

印数 11001-16030 册

ISBN 7-5628-0860-0/O·43 定价:29.00元(平装)

35.00元(精装)

序　言

以微积分为主要内容的高等数学课程是各工科院校的一门重要基础理论课，其教学状况深受多方关注。近年来，各校对该课程从教学内容、课程体系到教学手段都进行着改革与探索，取得了不少成果。

上海高校工科数学协作组在1996年8月召开的年会上议定要组织编写一套教材，希望能集中各校的成功经验，并把教材建设工作推向前进。本书就是在这样的背景下，由谢国瑞（华东理工大学）、孙薇荣（上海交通大学）、朱学炎（上海铁道大学）、沈关生（上海海运学院）、姜健飞（中国纺织大学）、蔡兴国（上海理工大学）、龚成通、冯家裕（华东理工大学）及何正伟（上海大学）等编写的一本高等数学（微积分）教材。

该书取材适当，理论与应用并重，在内容及安排上进行了改革，改变了传统的顺序，富有新意，且能自成体系，满足课程的教学要求，适合一般高等工业学校作为该课程的教材。

该书比较重视教学法，对问题的提出、解决问题的思路及来龙去脉介绍得比较清楚，在传授知识的同时，注意培养分析问题和解决问题的能力。编者根据多年教学经验，对涉及高等数学中最基本的一些概念、理论和思想方法的有关内容，作了相对集中又多次反复出现的处理，有利于多数学生的学习与掌握。如对极限概念采取了前后分层次展开讨论的方法，这样不仅使全书能较早地展开对微积分主题的讨论，而且在后面再论极限时，由于对使用极限语言已有一定了解，所以在描述与定义有关概念时，就比较容易理解；及至论及数列极限时，因可用微积分方法处理，而使学生已有数列的知识得到了提高。又如对于数学应用中非常重要的微分方程，早在微分学应用中就插入了一节“列微分方程”，而在有关章节中相对集中地介绍了微分方程的基本概念、解法、应用后，在级数、多元

函数微分学及曲线积分的一些章节中还多次涉及；另外，为了适应在工科学生中加强计算机及经济类知识的教学要求，本书较为重视有关的计算方法及微积分在经济中应用的介绍。

例题是教材的一个重要组成部分，该书的例题量多面广，且举例的目的性明确，或是为了说明、引出问题，或是为了指明解题的思路与方法，或是为了使读者了解高等数学在科技和工程中的广泛应用，使人感到内容丰富有趣，不觉得干瘪枯燥。

该书的出版在高等数学教材的百花园中又增添一株奇葩，可以预期，这对推动教学改革、提高教学质量定将起到积极的促进作用。

王嘉善

1998年1月

编者的话

在国内外，已经有了为数不少的高等数学（微积分）教材，其中不乏具有鲜明特点与优秀的著作，我们之所以愿意自己编写一本，主要是为了更好地适应当前教学的需要，同时也想把编者们在各校进行多年教学、改革中积累的认识、看法提出来，进一步接受实践的检验，为教育改革的大目标、为培养出符合时代发展要求的工科高级专门人才献出绵薄之力。

本书的核心内容是微积分的概念、理论、计算、应用，及一些与之密切相关的课题如微分方程、级数等。由于已把为后继课建立必要的基础及发展运用数学知识直接处理实际问题的能力并列为课程的教育目标，所以随着内容的展开，不仅涉及到微积分在几何、物理、工程、经济等众多领域的应用，也重视用计算机求近似解的处理方法；而且，对于数学应用于实际问题必须涉及的几个步骤：描述问题（建立问题的数学模型）、分析与求解、将结果用于实际问题去作解释进行预测或作出控制、决策等，在指导思想上都给予了同样的重视，前后多次涉及了微分方程的建立，还通过变量连续化而用微分法解释一些经济或数列中的结果。

在编写方式上，本书既大体保持了微积分教材传统的演绎推理与几何直观并重的特征，又经常通过归纳和类比"发现"概念、"猜测"结果、"想出"解法，很多地方详细介绍了"分析过程"，也不时"点明"沿怎样的思路考虑问题，对不少例题介绍了从不同角度入手导致的多种解法以启迪思维和引起学习兴趣。这种种努力是希望在教材中直接反映本课程对提高工科学生数学素质的要求，而且也希望能对多数工科学生培养数学思维能力作些有益的引导。

从目录可以看出本书内容体系编排上的一些特点。这里要作几点说明。首先，如所熟知，极限是微积分的基本研究方法。为了

强化这部分内容的教学，更为了能尽快地进入微积分主题的学习（以更好地适应其他课程应用微积分的要求），我们把极限内容作了分散处理：在引入导数概念的同时，主要讨论函数在 $x\to a$ 时的极限，初次接触极限语言，熟悉极限性质，导出一些极限计算方法；在再论极限一章中才介绍涉及无穷的种种极限问题，在这里，极限的语言、性质得到巩固，计算更为系统化；而广义积分则被明确规定成定积分的极限；习惯上在极限论中首先处理的数列极限，被推迟到和级数放在一起讨论。这样做的原因，既考虑了要把学生已有数列极限的知识提高一步需要足够的背景知识，也考虑到它在定义“级数和”这个概念中有直接的作用。其次，关于对数函数和指数函数，我们不仅承认学生的已有知识，在第 1 章内作了简单的回顾，而且还在积分一章中对其作了较为自然的重新定义。为便于不同教学要求的课程安排，本书将多元函数积分学的内容处理成了四个章次，即二重积分、平面曲线积分、多重积分以及第二型曲面积与积分公式，教师可视具体情况，调整教学内容的顺序，或只教其中的部分章节。

演算一定数量的习题是学好微积分的必由之路。为此，本书以两种不同的方式安排了相当数量的练习与习题供学生选用。穿插在课文中的那些最基本的练习题是每个学生都应独立完成的，而各节末的习题则可根据各自的具体情况或在教师指导下演算其中的部分或全部。对少数要求进行强化训练的学生，可选用配套的习题集。

“大学教书不是照本讲”①，按这种认识，更为了有利于学生在今后的自学扩展知识面、提高综合运用知识的能力，本书也包括了少量可教可不教的内容。如某些关于应用课题与个别应用数学概念的讨论以及少数的习题等（特别是那些带 * 的部分内容、节、段、

---

① 华罗庚：高等数学引论第一卷第一分册序言。科学出版社，1963 年（华罗庚：1910～1985，中国现代数学家）。

定理或示例）。对于这些“不属”教学基本要求范围之内的题材，老师们在教学中可灵活掌握，或用作专题讲座的素材，也可指导学有余力的学生自学，等等。

编写出能够反映“培养学生能力”要求的高等数学教材，是我们自悬的努力目标，对这样一项带探索性的工作，自不敢说在这里已取得了多少的成功，但我们确信已迈出了开始的一步。因此，我们特别要感谢给这项工作以有力支持的许多领导、专家和同志们。

本书的编写是在上海市教委、高教办、上海市高校工科数学协作组、华东理工大学校领导、教务处的直接支持下，由多所高校数学教师发扬协作精神在一年内共同完成的。参加讨论本书编写计划、执笔编写初稿的有：孙薇荣（上海交通大学）、朱学炎（上海铁道大学）、沈关生（上海海运学院）、姜健飞（中国纺织大学）、蔡兴国（上海理工大学）、龚成通、冯家裕（华东理工大学）及何正伟（上海大学）。华东理工大学的蒲思立、陈秀华、王刚、殷锡鸣等提供了不少有益的建议。王嘉善（上海交通大学，主审）、骆承钦（同济大学）、曹助我（上海海运学院）等教授为本书审稿并提出了不少宝贵意见。我们对给本书的编写、出版以种种帮助及爱护、使用本书与提出各种意见的同志们深表谢意。由于水平所限，书中难免留存错、漏不妥之处，敬祈专家、读者予以指正。

谢国瑞

1998 年 1 月

目　　录

第1章 函　　数

函数是微积分的研究对象，作为全书的简短引论，本章从复习函数的定义开始，讨论函数的表示法及函数记号的运用，描述函数在微积分中的一些有用性质，指出函数间一些能用来简化微积分讨论的关系(复合函数与反函数)，并且罗列基本初等函数的性质与图形。

1.1 函 数 概 念

1.1.1 变量 集合 区间

在研究实际问题、观察各种现象或过程的时候，会遇到许多的量。从变化的角度看，可以从中区分出两类量：**常量**与**变量**。一些在整个考察过程中始终保持不变的量，称为**常量**；另一种在考察过程中能取不同数值的量，称为**变量**。

例如，在考察自由落体的运动过程时，物体下降的距离和所花的时间都是变量，而物体的质量在下落过程中可以看作是常量；再如在对一密封容器内气体加热的过程中，气体的体积及分子数目是常量，而气体的温度及压力是变量；又如，在考察一化学反应器中发生化学反应的过程时，反应物及生成物的摩尔数是变量，而所涉及的各原子的数目却是常量。

在数学中常抽去变量或常量的具体意义，而只在数值上研究这些量之间的关系。上述距离、时间、质量、体积、摩尔数、温度以及压力等量的数值，都可用实数表示，所以应该称它们为实变量或实常量。在本书中，除特别说明外，处理的量都是实变量和实常量，简

称为变量和常量。习惯上常用字母 x、y、z…表示变量，而用 a、b、c…表示常量。

为描述一个变量，重要的是指出它的变化范围。为此先复习一下有关集合与区间的概念。

一组对象的汇集或总体，称为**集合**或**集**。

例如，生长在某座山上的所有树木；在某块草地上放牧的所有鹅以及所有自然数等等都是**集合**。

常用大写英文字母 A、B、…来记集合，而称集 A 中的任一对象 x 为集合 A 的元素，记为 $x \in A$，而 y 不是 A 中的元素这一事实，可用 $y \overline{\in} A$ 或 $y \notin A$ 来表示。

例如，若用 N 表示全体非负整数的集合，而用 N_+ 表示全体自然数的集合，则 $3 \in \mathrm{N}$，$5 \in \mathrm{N}$，而 $0 \overline{\in} \mathrm{N}_+$ 等等。

集合的常用表示法有两种：**列举法**和**描述法**。将集合中的所有元素一一列于一个大括号之内来表示集合的方法叫做**列举法**。如将由数 3，5 组成的集合表示为

$$A = \{3, 5\}.$$

对于一个给定的集合，元素的排列次序是无关的，而且集合中元素是互异的，也就是说同一个对象，只能称作集合的一个元素。即，集合

$$\{3, 5, 3\}; \qquad \{5, 3\}$$

都表示上述集合 A。

把集合中的元素的公共属性描述出来，写在大括号内表示集合的方法叫做**描述法**。一般可写成

$$\{x | P\}, \tag{1-1}$$

这里 x 是元素的一般形式，而 P 表示集合中的每个 x 都具有的属性。

例 1 集合 $B = \{x | x^2 - 8x + 15 = 0\}$ 表示满足方程 $x^2 - 8x$

$+ 15 = 0$ 的数 x 的集合，而 $D = \{(x, y) | x - y = 0\}$ 表示平面直角坐标系中第Ⅰ、Ⅲ象限角平分线上全体点所成的集合。

如果根本不存在具有性质 P 的元素，那么形如式(1-1)的集合就称为**空集合**，记为$\varnothing$。称至少有一个元素的那种集合为**非空集合**。引进空集的概念在逻辑上会带来一些便利。

今后常要用到的几个数集是实数集 R，有理数集 Q，非负整数集 N，自然数集 N_+ 及正实数集 R_+ 等，它们可分别为

$$\mathrm{N} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\},$$

$$\mathrm{Q} = \{x | x \text{ 是有理数}\},$$

$$\mathrm{R} = \{x | x \text{ 是实数}\},$$

以及

$$\mathrm{R}_+ = \{x | x \in \mathrm{R}, \text{ 且 } x > 0\}.$$

$$\mathrm{N}_+ = \{1, 2, 3, \cdots\}$$

由中学数学课知道，实数和数轴上的点可建立一一对应关系，故今后常把实数称为(实轴上的)点，有时也反过来称点为数。这样，可把实数集 R 称作数直线 R，等等。

区间是一种特殊的实数集。当 $a < b$ 时，我们把满足不等式 $a \leqslant x \leqslant b$ 的数 x 的集合称为**闭区间**，记作$[a, b]$，即

$$[a, b] = \{x | a \leqslant x \leqslant b\}.$$

点 a 和 b 被分别称为该区间的左端点及右端点，而集合中其他点 x 称为区间的内点，闭区间是数轴上包括两个端点在内的线段。我们又称满足不等式 $a < x < b$ 的数 x 的集合为**开区间**，记作(a, b)，即

$$(a, b) = \{x | a < x < b\}.$$

端点 a 和 b 都不包括在开区间内，所以开区间内的任一点皆为内点。类似的还可以有左闭右开区间$[a, b)$或左开右闭区间$(a, b]$:

$$[a,\ b) = \{x \mid a \leqslant x < b\},$$

$$(a,\ b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}.$$

除了以上这些有限区间外，我们还会遇到无穷区间或半无穷区间：$(-\infty,\ +\infty)$，$(-\infty,\ b]$，$(-\infty,\ b)$，$[a,\ +\infty)$，$(a,\ +\infty)$。其中 $(-\infty,\ +\infty)$ 就是 R，而 R^+ 就是

$$(0,\ +\infty) = \{x \mid 0 < x < +\infty\}.$$

将包含点 x_0 在内的任一开区间 $(a,\ b)$，称为点 x_0 的**邻域**(Neighborhood)，记为 $N(x_0)$，特别称开区间 $(x_0-\delta,\ x_0+\delta) = \{x \mid |x-x_0| < \delta\}$ 为点 x_0 的 **δ 邻域**，记为 $N(x_0,\ \delta)$，这是邻域的对称表示，称 x_0 为此邻域的**中心**，而称正数 δ 为其**半径**(见图 1-1(a))。今后我们常要用到 x_0 点的**去心 δ 邻域**，即从邻域 $N(x_0,\ \delta)$ 中去掉中心 x_0 点后所得到的集合，记为 $\hat{N}(x_0,\ \delta)$，即

$$\hat{N}(x_0,\ \delta) \xlongequal{\text{def}} \{x \mid 0 < |x-x_0| < \delta\}.$$

它在数轴上的表示见图 1-1(b)。并以 $\hat{N}(x_0)$ 记从 $N(x_0)$ 中去掉点 x_0 的集合。

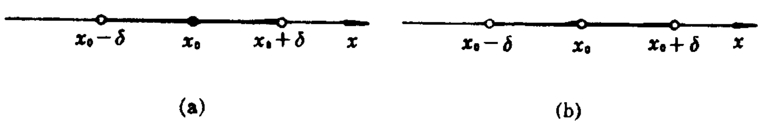


图 1-1

练习 1 试在数轴上画出以下点集：

(1) $\left\{x \,\middle|\, -2 < \dfrac{1}{x+2} < 2\right\}$； (2) $\left\{x \,\middle|\, x^2-16<0,\ x^2-2x \geqslant 0\right\}$.

练习 2 用邻域的对称表示法，表示下列区间：

(1) $(-2,\ 4)$； (2) $(1,\ 5)$.