怎样考好高等数学

——硕士生入学试题分析

王芝田　李立鹏　钱吉林　汪志文

湖北教育出版社

怎样考好高等数学

硕士生入学试题分析

王芝田　李立鹏　钱吉林　汪志文

湖　北　教　育　出　版　社

怎样考好高等数学

——硕士生入学试题分析

王芝田　李立鹏

钱吉林　汪志文

*

湖北教育出版社出版　湖北省新华书店发行

武汉大学出版社印刷总厂印刷

850×1168毫米32开本　22.5印张　2插页　558,000字

1986年6月第1版　1986年6月第1次印刷

印数：1－4,500

统一书号：7306·110　　定价：5.75元

出 版 说 明

本书是以近几年来作者辅导报考硕士的研究生的讲稿为基础整理而成的。全书分“数学分析”、“线性代数与概率统计”两篇，以试题分析为主，对重要理论和基本概念作了简要的介绍，并对试题进行分类，给以分析和解答，力图使读者不仅掌握如何求解，而且知道为什么这样求解。其所选例题，全部引自近年来的硕士生入学试题，且多系高等院校共同选用过的。试题形式多样、内容覆盖面广，有一定的难度。

本书不但可供报考硕士生的同志作复习辅导，也可供工科院校、电大、夜大、职大、函大的学员和自学者作为学习高等数学的参考书。

本书第一篇第一部分至第十部分由王芝田执笔，第十一部分常微分方程由李立鹏执笔；第二篇第一部分至第六部分由钱吉林执笔，第七部分至第十二部分由汪志文执笔。

编　者

一九八五年七月

目　　录

第一篇　数学分析

第二篇　线性代数与概率统计

第一篇　数学分析

第一部分　函数与极限

一、概述

函数、极限和连续，都是数学分析中的重要概念．函数是微积分学研究的对象，其基本点是掌握函数的定义域、对应规律和值域三要素．极限是微积分理论的核心和基础．函数连续性的要点是基本定义以及闭区间上连续函数的性质．

一元函数着重研究两个变量 x、y 之间的对应关系，而极限则研究 x 依一定条件变化时 y 的变化趋向和规律，可以说，极限是运动着的函数关系．

二、试题类型

Ⅰ．函数

例 1.1　证明：定义在对称区间 $(-l,\ l)$ 内的任何函数 $f(x)$ 必可表示成偶函数 $H(x)$ 与奇函数 $G(x)$ 之和的形式，且这种表示法是唯一的．

分析　1．可先设 $f(x)=H(x)+G(x)$，其中 $H(x)$、$G(x)$ 分别为偶函数与奇函数，再利用其奇偶性来确定新的补充表示关

系.

2. 也可由经验直接令

$$H(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)],$$

$$G(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$$

$$\therefore \quad f(x)=H(x)+G(x).$$

证法 1 设 $f(x)=H(x)+G(x)$. **(1)**

中 $H(-x)=H(x)$; $G(-x)=-G(x)$.

$$\therefore \quad f(-x)=H(x)-G(x) \tag{2}$$

联立方程(1)、(2)

则有

$$\begin{cases} H(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)] \\ G(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)] \end{cases}$$

$$\therefore \quad f(x)=H(x)+G(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]+\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$$

证毕.

证法 2 令

$$H(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)],$$

$$G(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)].$$

显然, $H(x)$、$G(x)$ 分别为定义在 $(-l, l)$ 内的偶函数和奇函数, 且

$$f(x)=H(x)+G(x).$$

设另有偶函数 $H_1(x)$、奇函数 $G_1(x)$, 使

$$f(x)=H_1(x)+G_1(x)$$

从上两式容易得到

$$H(x)-H_1(x)=G_1(x)-G(x).$$

将上式中 x 换为 $(-x)$，并注意到有关函数的奇偶性，则有

$$H(x)-H_1(x)=-G_1(x)+G(x)$$

联立求解它们，可得

$$\begin{cases}H(x)=H_1(x),\\ G(x)=G_1(x).\end{cases}$$

即表示式 $f(x)=H(x)+G(x)$ 是唯一的．证毕．

例 1.2 证明：若函数 $f(x)$ 非负，则函数

$$F(x)=cf^2(x) \qquad (c>0)$$

与函数 $f(x)$ 有相同的极值点．

分析 1．本题主要考查极值概念，但必须注意："$F(x)$ 与 $f(x)$ 有相同的极值点"包含着双向的关系，即：$f(x)$ 的极值点必然是 $F(x)$ 的极值点；同时 $F(x)$ 的极值点也必然是 $f(x)$ 的极值点．

2．由题设，$c>0$，$F(x)=cf^2(x)$，从而 $f(x)$ 与 $F(x)$ 皆为非负函数，这是证题的重要条件．

证明 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取极大值，即对 x_0 的某个 ε-邻域 $(x_0-\varepsilon,\ x_0+\varepsilon)$ 内每一个 x，都有

$$f(x_0)>f(x).$$

$\because c>0$，$f(x)$ 非负，$\therefore$ 同时也有 $cf^2(x_0)>c\cdot f^2(x)$，即

$$F(x_0)>F(x),$$

亦即，$x=x_0$ 亦为 $F(x)$ 的极大点．

反之，设 $x=x_1$ 为 $F(x)$ 的极大点，则亦对于某 δ-邻域 $(x_1-\delta,\ x_1+\delta)$ 内每一 x，都有

$$F(x_1)>F(x)$$

从而 $\sqrt{\dfrac{F(x_1)}{c}}>\sqrt{\dfrac{F(x)}{c}}$，即

$$f(x_1)>f(x).$$

$\therefore x=x_1$ 也是 $f(x)$ 的极大点．可见，$f(x)$ 与 $F(x)$ 有相同的极大

点.

同样可证 $f(x)$ 与 $F(x)$ 有相同的极小点. 从而, $f(x)$ 与 $F(x)$ 有相同的极值点. 证毕.

例 1.3 设函数 $f(x)=(x-x_0)^n\varphi(x)$（n 为任意自然数），其中函数 $\varphi(x)$ 当点 $x=x_0$ 时连续. 若 $\varphi(x_0)\neq 0$, 问函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有无极值? 为什么?

分析 1. 条件"$\varphi(x_0)\neq 0$", 可表示得更具体些. 不妨设 $\varphi(x_0)>0$, 由条件"$\varphi(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续"知, 在 x_0 的某邻域内都有 $\varphi(x)>0$.

2. 因为正值函数不影响不等号方向, 所以 $f(x)$ 与 $(x-x_0)^n$ 在 $x=x_0$ 处的极值性完全一致. 而后者的讨论要简单得多.

解 因 $\varphi(x_0)\neq 0$, 不妨设 $\varphi(x_0)>0$, 又因 $\varphi(x)$ 在 $x=x_0$ 连续, 所以存在某 ε-邻域, 使得当 $x\in(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ 时, $\varphi(x)>0$

当 $n=2k$ 时,

$$f(x)=(x-x_0)^{2k}\cdot\varphi(x)>0=f(x_0). \text{〔当 } x\neq x_0\text{〕}$$

$\therefore x=x_0$ 为 $f(x)$ 的极小点.

当 $n=2k-1$ 时, 在 $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ 内,

$x>x_0$ 时, $f(x)=(x-x_0)^{2k-1}\varphi(x_0)>0=f(x_0)$;

$x<x_0$ 时, $f(x)<f(x_0)$.

$\therefore f(x)$ 在 $x=x_0$ 处不取极值.

同理, 若 $\varphi(x_0)<0$, 则 $n=2k$ 时, $f(x)$ 在 $x=x_0$ 取极大值; $n=2k-1$ 时, $f(x)$ 在 $x=x_0$ 不取极值.

例 1.4 在平面图形 $ABCDOA$ 中, 已知 AB 的方程为 $y=18-x^2$, BC 的方程为 $y=2$, CD 的方程为 $x=25$. 设有初始位置与 oy 轴重合的动直线 MN 以变速 $v=2t$ 向右作平行离开 y 轴的移动. 试把 MN 所扫过的该平面图形的面积 S 表示成时间 t 的函数, 并标出它的定义域.

分析 1. 第一步应确定 S 与 x 的关系, 这是一个分段函

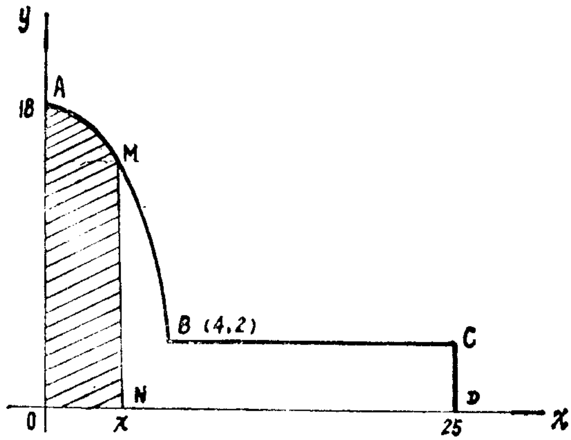

图 1.1

数，显然可由定积分确定其具体的函数关系.

2．第二步再确定 x 与 t 的关系， 这可由题设 $v=2t$， 即 $\dfrac{dx}{dt}=2t$ 定出.

解 由

$$\begin{cases} y=18-x^2, \\ y=2 \end{cases}$$

可解出 B 点的坐标为(4, 2).

$\therefore$ $0\leqslant x\leqslant 4$ 时， $S=\int_0^x(18-x^2)\,dx=18x-\dfrac{1}{3}x^3$；

$4\leqslant x\leqslant 25$ 时， $S=\int_0^4(18-x^2)\,dx+(x-4)\cdot 2=2x+\dfrac{128}{3}$.

即

$$S=\begin{cases} 18x-\dfrac{1}{3}x^3, & 0\leqslant x\leqslant 4, \\ 2x+\dfrac{128}{3}, & 4<x\leqslant 25. \end{cases}$$

另方面，$v=2t$. 注意到 v 的方向即 ox 轴的正向，$\therefore$ $v=\dfrac{dx}{dt}$、即

$\frac{dx}{dt}=2t$，$\therefore x=t^2+c$. 显然 $x|_{t=0}=0$，即 $C=0$， 于是 $x=t^2$.
且 $x\in[0.4]$时，$t\in[0.2]$；$x\in[4.25]$时，$t\in[2.5]$.
从而

$$S=\begin{cases}18t^2-\frac{1}{3}t^6, & 0\leqslant t\leqslant 2.\\ 2t^2+\frac{128}{3}, & 2<t\leqslant 5.\end{cases}$$

当然，$S=S(t)$的定义域为[0.5].

例 1.5 已知 $f\left(\sin\frac{x}{2}\right)=\cos x+1$，求 $f\left(\cos\frac{x}{2}\right)=?$

分析 1. 由于条件 $f\left(\sin\frac{x}{2}\right)=\cos x+1$ 中 $\cos x$ 与 $\sin\frac{x}{2}$ 不一致，因而应首先把 $(\cos x+1)$ 转化为以 $\left(\sin\frac{x}{2}\right)$ 为基本自变量的表达形式，从而定出 $f(x)$，进一步再定出 $f\left(\cos\frac{x}{2}\right)$.

2. 另外，注意到 $\sin\frac{x}{2}$ 与 $\cos\frac{x}{2}$的特殊关系， 可引代换 $t=\pi-x$ 则 $\sin\frac{x}{2}$和 $\cos\frac{x}{2}$即可互化，而 $\cos x$ 的形式保持不变.

3. 类似试题如："$f(x+1)=\sin x+x^2$，求 $f(x-1)$. $f(2x)$."同样可利用上述思想：

$$f(x+1)=\sin x+x^2=\sin[(x+1)-1]+[(x+1)-1]^2$$

$\therefore\quad f(x)=\sin(x-1)+(x-1)^2$.

从而

$$f(x-1)=\sin(x-2)+(x-2)^2,$$
$$f(2x)=\sin(2x-1)+(2x-1)^2.$$

也可以将上述两步合并为一步：

$$f(x-1)=f[(x-2)+1]=\sin(x-2)+(x-2)^2,$$
$$f(2x)=f[(2x-1)+1]=\sin(2x-1)+(2x-1)^2.$$

4．上述解题思想对多元函数也适用．

如：“若 $f\left(x+y, \frac{y}{x}\right)=x^2-y^2$，求 $f(x、y)=?$”

可令

$$\begin{cases} u=x+y, \\ \mathrm{V}=\frac{y}{x}. \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x=\frac{u}{1+\mathrm{v}} \\ y=\frac{u\mathrm{v}}{1+\mathrm{v}}, \end{cases}$$

$$\therefore \quad f(u, \mathrm{v})=f\left(x+y, \frac{y}{x}\right)=x^2-y^2=(x+y)(x-y)$$

$$=u\cdot\left(\frac{u}{1+\mathrm{v}}-\frac{u\mathrm{v}}{1+\mathrm{v}}\right)=u^2\cdot\frac{1-\mathrm{v}}{1+\mathrm{v}},$$

$$\therefore \quad f(x、y)=x^2\cdot\frac{1-y}{1+y}.$$

解法 1 $\because$ $f\left(\sin\frac{x}{2}\right)=\cos x+1=2-2\sin^2\frac{x}{2}$

$\therefore$ $f(x)=2-2x^2$

故 $f\left(\cos\frac{x}{2}\right)=2-2\cos^2\frac{x}{2}=1-\cos x.$

解法 2 在 $f\left(\sin\frac{x}{2}\right)=\cos x+1$ 中，令 $t=\pi-x$，则

$$f\left(\sin\frac{\pi-t}{2}\right)=\cos(\pi-t)+1=1-\cos t.$$

即 $$f\left(\cos\frac{t}{2}\right)=1-\cos t.$$

亦即 $$f\left(\cos\frac{x}{2}\right)=1-\cos x.$$

例 1.6 若 $z=\sqrt{y}+f(\sqrt[3]{x}-1)$ 并且已知当 $y=1$ 时，有

$z=x$，试求函数 $f(x)$ 的分析表达式以及 z 的分析表达式.

分析 表面上看来，$z=\sqrt{y}+f(\sqrt[3]{x}-1)$ 是比较复杂的多元关系，但条件"$y=1$ 时有 $z=x$"却将多元关系降为一元关系了.

解 ∵ $y=1$ 时，$z=x$，∴原已知条件为：

$$x=\sqrt{1}+f(\sqrt[3]{x}-1),$$

或

$$f(\sqrt[3]{x}-1)=x-1=[(\sqrt[3]{x}-1)+1]^3-1=(\sqrt[3]{x}-1)^3+3(\sqrt[3]{x}-1)^2+3(\sqrt[3]{x}-1)$$

∴

$$f(x)=x^3+3x^2+3x.$$

同时

$$z=\sqrt{y}+f(\sqrt[3]{x}-1)=\sqrt{y}+x-1.$$

Ⅱ．极限

例 1.7 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}$.

分析 1．关键的一点是，不把 $n!$ 直接投入运算，而是通过比较、转化，并从而引出不同的解法.

2．由 $\dfrac{1}{n^n}\leqslant\dfrac{n!}{n^n}\leqslant\dfrac{1}{n}$ 并利用"夹挤定理"即可求解.

3．也可由 $\left(\dfrac{n}{e}\right)^n<n!<e\left(\dfrac{n}{2}\right)^n$ 得

$$\frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n}{n!}<\frac{n!}{n^n}<\frac{e\left(\frac{n}{2}\right)^n}{n^n}$$

$$\left(\frac{1}{e}\right)^n<\frac{n!}{n^n}<e\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

同样再利用"夹挤定理"，亦可求解.

4．还可把 $u_n=\dfrac{n!}{n^n}$ 看成级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的一般项，若上级数收敛，

则必有

$$\lim_{n\to\infty} u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0.$$

解法 1 ∵ $\frac{1}{n^n}\leqslant\frac{n!}{n^n}\leqslant\frac{1}{n}$, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^n}=0$; $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

∴
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0.$$

解法 2 ∵ $\left(\frac{n}{e}\right)^n<n!<e\left(\frac{n}{2}\right)^n$,

∴
$$\frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n}{n^n}<\frac{n!}{n^n}<\frac{e\left(\frac{n}{2}\right)^n}{n^n},$$

即
$$\left(\frac{1}{e}\right)^n<\frac{n!}{n^n}<e\left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

而
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^n=0,\quad \lim_{n\to\infty} e\left(\frac{1}{2}\right)^n=0,$$

∴
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0.$$

解法 3 记
$$u_n=\frac{n!}{n^n}$$

∵ $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\cdot\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{1}{e}<1.$

∴ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ 收敛，从而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0.$$

例 1.8 求极限 $\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}=0.$

分析 1. 记 $u_n=\frac{n^n}{(n!)^2}$.

利用 u_{n+1} 与 u_n 之关系；并利用命题“单调有界数列的极限必存

在". 从而求解.

2. 如前,可利用$\left(\frac{n}{e}\right)^n<n!<e\left(\frac{n}{2}\right)^n$. 及"夹挤定理"进行求解.

3. 可利用"收敛级数的一般项的极限为零". 如例 1.7 解法 3 那样进行求解.

解法 1 记 $u_n=\frac{n^n}{(n!)^2}$, 则

$$u_{n+1}=\frac{(n+1)^{n+1}}{[(n+1)!]^2}=\frac{n^n}{(n!)^2}\cdot\frac{n+1}{(n+1)^2}\cdot\frac{(n+1)^n}{n^n}$$

$$=u_n\cdot\frac{1}{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

当 n 足够大时, $\frac{1}{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1$, 从而 $u_{n+1}<u_n$ 另一方面, $u_n>0$. 故$\{u_n\}$(当 n 充分大时)单调减少且有下界从而 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$. 存在, 记其值为 A. 则由

$$u_{n+1}=\frac{1}{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot u_n$$

两边令 $n\to+\infty$ 取极限, 得

$$A=0\cdot A,$$

于是
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}=0.$$

解法 2 由 $0<\left(\frac{n}{e}\right)^n<n!<e\left(\frac{n}{2}\right)^n$, 得

$$0<\frac{n^n}{(n!)^2}<\frac{n^n}{\left[\left(\frac{n}{e}\right)^n\right]^2}=\left(\frac{e^2}{n}\right)^n,$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{e^2}{n}\right)^n=0$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}=0$.

解法 3 记 $u_n=\frac{n^n}{(n!)^2}$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\cdot\frac{1}{1+n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=0,$$

故，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}$ 收敛，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}=0$。

例 1.9 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\,(\sqrt[n]{n}-1)$.

分析 1．显然，直接求极限比较困难，但可以看出，这是一种$\infty\cdot 0$型极限，从而应想到转化为连续变量的函数的极限，并利用 *L'Hospital* 法则进行求解

2．类似试题如："求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\cdot n^2(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n+1]{x})\ (x>0)$"

解 $\because$ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x}\,(x^{\frac{1}{x}}-1)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{\frac{1}{x}}-1}{x^{-\frac{1}{2}}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\ln x}{x^2}\right)}{-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}}=-2\lim_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{1-\ln x}{x^{\frac{1}{2}}}$$

$=0.$

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\,(n^{\frac{1}{n}}-1)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\,(\sqrt[n]{n}-1)=0.$

例 1.10 求 $\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{N}\dfrac{1}{1+2+\cdots+n}$.

分析 1．首先化简通项表达式，

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{1+2+\cdots+n}=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\frac{1}{2}n(n+1)}=\sum_{n=1}^{N}\frac{2}{n(n+1)}.$$

再利用有理式分解

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

则本题即可迎刃而解。