高等数学习题解析

同济五版《高等数学》配套习题解析

主　编　北京大学数学科学学院　田勇
副主编　周景萍
编　写　双博士数学课题组
总策划　胡东华

机械工业出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题解析:同济5版《高等数学》配套习题解析/田勇等主编. -北京:机械工业出版社,2002.11

(高等学校数学教材配套辅导丛书)

ISBN 7-111-02967-4

Ⅰ.高... Ⅱ田.... Ⅲ.高等数学-高等学校-解题 Ⅳ.013-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第084371号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号 邮编:100037)

责任编辑:荆宏智 责任校对:郝峥嵘

封面设计:蒲菊祥 责任印制:何全君

保定市印刷厂印刷 新华书店北京发行所发行

2002年11月第1版 第1次印刷

850mm×1168mm 1/32 印张:20 字数:693千字

定价:22.00元

http://www.bbdd.cc(中国教育考试双博士网站)

http://www.cmpbook.com(机械工业出版社网站)

凡购买本书,如有字迹不清、缺页、倒页、脱页,由本社发行部负责调换。

订书电话:新华书店系统:(010)68993821 (010)68326094

邮购及各省图书批发市场:(010)62579473 (010)62534708

http://www.bbdd.cc

“考研押题讲座”免费授课计划

一、内容：考研政治、英语、数学(一、二、三、四)、西医综合科目考前一个半月押题讲座

二、讲座总策划及献爱心人：胡东华

三、讲座资料提供：

北大、清华、人大考研辅导班资料采编组
京城考研命题信息搜集研究组　联合提供

四、免费讲座时间：2002 年 12 月 1 日 ~ 2003 年 1 月 15 日

五、中国教育考试双博士网站：http://www.bbdd.cc

六、课程表：

时间 科目	12 月第 1 周	12 月第 2 周	12 月第 3 周	12 月第 4 周	1 月第 1 周	1 月第 2 周
政　治	马克思主义哲学、政治经济学	毛泽东思想概论	邓小平理论概论	国际政治、时事政治	网上通知	网上通知
英　语	听力	英语知识运用	阅读理解 A (多项选择)	阅读理解 B (英译汉)	写作命题预测及背诵范文	网上通知
数学一	高数 (1~4)	高数 (4~8)	线性代数	概率论与数理统计	网上通知	网上通知
数学二	高数(1~2)	高数(3)	高数(4)	线性代数	网上通知	网上通知
数学三	微积分 (1~3)	微积分 (4~6)	线性代数	概率论与数理统计	网上通知	网上通知
数学四	微积分 (1~3)	微积分 (4~5)	线性代数	概率论	网上通知	网上通知
西医综合	生理学 生物化学	病理学	外科学	内科学	网上通知	网上通知

(如有变化，另行通知)

双博士品牌　真情大奉献

郑州某大学学生的来信

双博士：

您好！

收到您的回信十分高兴，您能如此重视一名普通读者的意见，在百忙之中给予回复，并提供赠书，令我这名学管理的学生看到了贵公司完善的管理机制，也看到了"双博士"品牌光辉的前景。

我曾购买了"双博士"的《大学英语精读课文辅导》(3)、(4)册，并且我认为质量很好，因为我在准备2001年6月份的全国四级考试前没买太多的辅导资料，仅是每天背《辅导》上的知识点，另外又做(看)了双博士的模拟题、真题解析及词汇，而我却考出了94.5分的骄人成绩，真应感谢双博士为我们带来了如此上乘的资料。我信赖双博士，也相信考研中借助双博士的力量，会取得更好的成绩。所以我在您寄来的书目中挑了一下，如果可以的话，我想得到代号为"RB12"的《考研应试教程(英语分册)》，或者是代号为"B18A"的《研究生入学考试英语词汇备考手册》。两本书中的任何一本，我都相信会给我带来好运！

另外，……

最后，预祝双博士前途无量，事业有成！

李XX

2001年11月22日

天津某高校学生的来信

双博士：

你们好！

期待中，我们收到了所需要的书目，同时也收到了对我们学生工作热情的支持与无偿的帮助，这更加证明"双博士"是我们真诚的朋友，你们已经用你们的信誉与忠诚占领了一个将永远信任你们的市场！我在此代表我校所有爱好英语的同学，向你们道一声：谢谢！

我们都知道，英语学习中，口语是非常重要的，而《英美流行口语》正是我们所需要的，是一场及时雨。五一、五四前后，我校将举办一次口语演讲比赛，我们将把这几本书作为奖品赠送给口语出色的同学，相信他们会很意外，也很高兴的。双博士为我们着想，我们也希望能以微小之力量，给她的工作以支持和回报。其实，我想，只要我们真正为爱好英语的同学做了事，使他们从中受了益，英语有了提高，就是对"双博士"最好的回报了，对不对？

还有，我校对购买"双博士"图书比较困难，到书店买，常被抢购一空，由老师定购又"姗姗来迟"，所以，我想与你们联系，能否帮同学们统一定购？如可以，请将你们的订购时间、办法等以传真方式告诉我。

好了，再次感谢我们的朋友——双博士！

祝：

一马当先！

马到成功！

英语俱乐部会长：于XX

2002年1月

前　　言

同济大学应用数学系主编的《高等数学》第五版，与原四版相比，有质的突破，五版不仅仅是增加了少量的内容，更突出地表现在逻辑论述上更加严密、清晰，在结构形式上层次更加分明，不愧为一本经典教材。

本书是《高等数学辅导》的姊妹篇，同时作为同济版《高等数学》的配套参考书，也伴随着同济版《高等数学》的数次修订而一版再版，并以其卓越的品质逐渐在众多的高数参考书中脱颖而出。

同济版《高等数学》是全国流行已久的经典教材，它具有结构清晰、逻辑严谨、叙述详细、通俗浅显的优点，全书例题较多，比较便于自学。但也有很多同学反映，原教材附录的习题答案过于简单，在使用过程中多有不便，希望拥有一本与之完全相配套的内容详尽的习题解析集。

为此，我们特编写了与同济《高等数学》第五版习题完全相配套的习题解析，以方便高校学生学习过程中参考和为自学高数者打开方便之门。

此书虽然在编写过程中得到专家同行的指点，编者也尽心努力，但由于编写时间相对仓促，书中存在一些不足之处，欢迎读者批评指正。

在编写过程中，总策划胡东华做了大量组织编写及体例策划工作，特此致谢！

本书属于“双博士”品牌系列丛书中的黄金品牌。

本套丛书从 2002 年起由科学技术文献出版社改为由机械工业出版社出版，其内容、用纸及印装质量在原基础上均上了一个大台阶，故称之为“双博士精品”系列。

本书采用 60 克黄色胶版纸印刷，且每印张的定价不上涨，其直接目的是以学生利益为中心，并遏制盗版。

“双博士”品牌系列丛书，以其独有的魅力和卓越的品质被誉为最受大学生欢迎的教学辅导丛书，销量居全国同类书榜首。全国约有三分之一的大学生读过或正在使用本品牌丛书(不含盗版)。本品牌丛书封面、封底都带有双博士书标，此书标已由国家商标局注册。该系列品牌丛书，在读者中已树立起不可替代的品牌形象，引起了媒介的广泛关注。中央电视台 1999 年 9 月 15 日 ~ 10 月 15 日在“99 全球财富论坛”特别节目及《东方时空》黄金时间强档推出该品牌系列丛书，成为当时图书界传媒热点。1999 年 11 月 5 日《光明日报》第 9 版以“图书市场面临商标竞争时代”为标题，以“胡东华系列双博士品牌文教图书引起关注”为副标题做了报道，后被多家报纸转载。《中国青年报》、《新闻出版报》、《中国文化报》、《中国教育报》和《中国大学生》等报刊对该品牌系列丛书也做了相应报道。

欢迎垂询中国教育考试网站 http://www.bbdd.cc，该网站将在 2002 年 12 月 1 日 ~ 2003 年 1 月 15 日举行"考研押题讲座"。

双博士数学课题组

2002 年 11 月北京

目　　录

第一章　函数与极限

习题 1-1

1.设 $A=(-\infty,-5)\cup(5,+\infty)$,$B=[-10,3)$,写出 $A\cup B$,$A\cap B$,$A\setminus B$ 及 $A\setminus(A\setminus B)$ 的表达式.

2.设 A、B、C 是任意三个集合,证明对偶律:$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$.

3.设映射 $f:X\rightarrow Y$,$A\subset X$,$B\subset X$,证明:

(1)$f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$

(2)$f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$

4.设映射 $f:X\rightarrow Y$,若存在一个映射,$g:Y\rightarrow X$,使 $g\circ f=I_X$,$f\circ g=I_Y$,其中 I_X、I_Y 分别是 X、Y 上的恒等映射,即对于每一个 $x\in X$,有 $I_Xx=x$;对于每一个 $y\in Y$,有 $I_Yy=y$.证明:f 是双射,且 g 是 f 的逆映射,$g=f^{-1}$.

5.设映射 $f:X\rightarrow Y$,$A\subset X$,证明:

(1)$f^{-1}(f(A))\supset A$

(2) 当 f 是单射时,有 $f^{-1}(f(A))=A$

6.求下列函数的自然定义域:

(1)$y=\sqrt{3x+2}$　　(2)$y=\dfrac{1}{1-x^2}$

(3)$y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$

(4)$y=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

(5)$y=\sin\sqrt{x}$　　(6)$y=\tan(x+1)$

(7)$y=\arcsin(x-3)$　　(8)$y=\sqrt{3-x}+\arctan\dfrac{1}{x}$

(9)$y=\ln(x+1)$　　(10)$y=e^{\frac{1}{x}}$

7. 下列各题中,函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同?为什么?

(1)$f(x)=\lg x^2$,$g(x)=2\lg x$

(2) $f(x)=x, g(x)=\sqrt{x^2}$

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}, g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$

(4) $f(x)=1, g(x)=\sec^2 x-\tan^2 x$

8. 设 $y=\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<\dfrac{\pi}{3}\\ 0, & |x|\geqslant\dfrac{\pi}{3}\end{cases}$, 求 $\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}\right),\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$, $\varphi\left(-\dfrac{\pi}{4}\right),\varphi(-2)$,并作出函数 $y=\varphi(x)$ 的图形.

9.试证下列函数在指定区间内的单调性:

(1) $y=\dfrac{x}{1-x},(-\infty,1)$

(2) $y=x+\ln x,(0,+\infty)$

10. 设 $f(x)$ 为定义在 $(-l,l)$ 内的奇函数,若 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内单调增加,证明 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也单调增加.

11. 设下面所考虑的函数都是定义域在对称区间 $(-l,l)$ 上的,证明:

(1) 两个偶函数的和是偶函数,两个奇函数的和是奇函数;

(2) 两个偶函数的积是偶函数,两个奇函数的积是偶函数,偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

12. 下列函数中哪些是偶函数?哪些是奇函数?哪些既非奇函数又非偶函数?

(1) $y=x^2(1-x^2)$　　(2) $y=3x^2-x^3$

(3) $y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$　　(4) $y=x(x-1)(x+1)$

(5) $y=\sin x-\cos x+1$　　(6) $y=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$

13. 下列各函数中哪些是周期函数?对于周期函数,指出其周期:

(1) $y=\cos(x-2)$　　(2) $y=\cos 4x$

(3) $y=1+\sin\pi x$　　(4) $y=x\cos x$

(5) $y=\sin^2 x$

14.求下列函数的反函数:

(1) $y=\sqrt[3]{x+1}$　　(2) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$

(3) $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}(ad-bc\neq 0)$　　(4) $y=2\sin 3x$

(5) $y = 1 + \ln(x + 2)$　　　　(6) $y = \dfrac{2^x}{2^x + 1}$

15. 设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义,试证:$f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界.

16. 在下列各题中,求由所给函数复合而成的函数,并求这函数分别对应于给定自变量值 x_1 和 x_2 的函数值:

(1) $y = u^2,\quad u = \sin x,\quad x_1 = \dfrac{\pi}{6},\quad x_2 = \dfrac{\pi}{3}$

(2) $y = \sin u,\quad u = 2x,\quad x_1 = \dfrac{\pi}{8},\quad x_2 = \dfrac{\pi}{4}$

(3) $y = \sqrt{u},\quad u = 1 + x^2,\quad x_1 = 1,\quad x_2 = 2$

(4) $y = e^u,\quad u = x^2,\quad x_1 = 0,\quad x_2 = 1$

(5) $y = u^2,\quad u = e^x,\quad x_1 = 1,\quad x_2 = -1$

17. 设 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$,问 (1) $f(x^2)$, (2) $f(\sin x)$, (3) $f(x + a)$, $(a > 0)$, (4) $f(x + a) + f(x - a)$ $(a > 0)$ 的定义域各是什么?

18. 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & |x| = 1 \\ -1, & |x| > 1 \end{cases}$, $g(x) = e^x$,求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$,并作出这两个函数的图形.

19. 已知水渠的横断面为等腰梯形,斜角 $\varphi = 40°$(图 1-1),当过水断面 $ABCD$ 的面积为定值 S_0 时,求湿周 L($L = AB + BC + CD$)与水深 h 之间的函数关系式,并说明定义域.

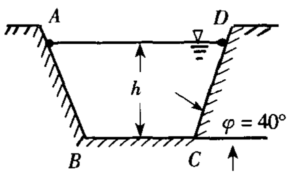

图 1-1

20. 收音机每台售价为 90 元,成本为 60 元.厂方为鼓励销售商大量采购,决定凡是订购量超过 100 台的,每多订购 1 台,售价就降低 1 分,但最低价为每台 75 元.

(1) 将每台的实际售价 p 表示为订购量 x 的函数;

(2) 将厂方所获的利润 P 表示成订购量 x 的函数;

(3) 某一商行订购了 1 000 台,厂方可获利润多少?

习题解析

1.**解** $A \cup B = (-\infty, 3) \cup (5, +\infty)$, $A \cap B = [-10, -5)$,

$A \setminus B = (-\infty, -10) \cup (5, +\infty)$, $A \setminus (A \setminus B) = [-10, -5)$.

2.**证明** 因为 $x \in (A \cap B)^c \Rightarrow x \notin A \cap B \Rightarrow x \notin A$ 或 $x \notin B \Rightarrow x \in A^c$ 或 $x \in B^c \Rightarrow B^c \Rightarrow x \in A^c \cup B^c$

所以 $(A \cap B)^c \subset A^c \cup B^c$

反之 $x \in A^c \cup B^c \Rightarrow x \in A^c$ 或 $x \in B^c \Rightarrow x \notin A$ 或 $x \notin B \Rightarrow x \notin A \cap B \Rightarrow x \in (A \cap B)^c$

所以 $A^c \cup B^c \subset (A \cap B)^c$

于是 $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

3.**证明** (1) $y = f(x_0) \in f(A \cup B) = \{f(x) \mid x \in A \cup B\}$

$\Leftrightarrow x_0 \in A$ 或 $x_0 \in B \Rightarrow f(x_0) \in f(A)$ 或 $f(x_0) \in f(B)$

$\Leftrightarrow f(x_0) \in f(A) \cup f(B)$

所以 $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$ 且 $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$

故 $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

(2) $f(A \cap B) = \{f(x) \mid x \in A \cap B\}$

$y \in f(A \cap B)$,则 $\exists x_0 \in A \cap B$,有 $y = f(x_0)$

则 $x_0 \in A$ 且 $x_0 \in B$,即 $f(x_0) \in f(A)$ 且 $f(x_0) \in f(B)$.

$y = f(x_0) \in f(A) \cap f(B)$.

故 $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

4.**证明** 首先证明 f 是双射

$\forall y \in Y, \exists x \in X$,使得 $x = g(y)$

$f(x) = f \circ g(y) = y$

对于 X 中任意两个元素 $x_1, x_2, x_1 \neq x_2$,要证明 $f(x_1) \neq f(x_2)$,用反证法.如果 $f(x_1) = f(x_2)$,则 $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$,即 $x_1 = x_2$ 矛盾.

所以 f 是双射

根据定义 g 是 f 的逆映射.

5.**证明** (1) $\forall x \in A$,则 $y = f(x) \in f(A)$, $f(-1)(y) = x \in \{f^{-1}(y) \mid y \in f(A)\} = f^{-1}(f(A))$

即 $A \subset f^{-1}(f(A))$

(2) 如果 f 是单射

$\forall x \in f^{-1}(f(A))$, $\exists y \in f(A)$, 有 $f^{-1}(y) = x$, 即 $f(x) = y$

由 $x' \in A$, $f(x') = y$. 由于是单射, 则 $x = x' \in A$

$\therefore f^{-1}(f(A)) \subset A$. $\quad \therefore f^{-1}(f(A)) = A$

6. **解** (1) 要使函数有定义, 需且只需 $3x+2 \geqslant 0$, 即 $x \geqslant \frac{-2}{3}$, 所以函数 $y = \sqrt{3x+2}$ 的定义域为 $\left[-\frac{2}{3}, +\infty\right)$

(2) 要使函数有意义, 需且只须 $1-x^2 \neq 0$, 即 $x \neq \pm 1$, 所以函数 $y = \frac{1}{1-x^2}$ 的定义域为 $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$

(3) 要使函数有意义, 需且 $x \neq 0$ 且 $1-x^2 \geqslant 0$, 即 $-1 \leqslant x \leqslant 1$ 且 $x \neq 0$ 所以函数 $y = \frac{1}{x} - \sqrt{1-x^2}$ 的定义域为: $[-1, 0) \cup (0, 1]$

(4) 要使函数有意义, 需且只须 $4-x^2 > 0$, 即 $-2 < x < 2$, 所以原函数的定义域为 $(-2, 2)$

(5) $[0, +\infty)$

(6) $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} - 1 \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

(7) $2 \leqslant x \leqslant 4$, 即 $[2, 4]$

(8) $(-\infty, 0) \cup (0, 3]$

(9) $(-1, +\infty)$

(10) $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

7. **解** (1) 不同. 因为定义域不同, $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 而 $g(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$.

(2) 不同. 因为对应法则不同, $f(x) = x$, 而 $g(x) = |x|$.

(3) 相同. 因为定义域、对应法则均相同.

(4) 不相同: 定义域不同.

8. **解** $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left|\sin\frac{\pi}{6}\right| = \frac{1}{2}$, $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left|\sin\frac{\pi}{4}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \left|\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

因为 $|-2| > \frac{\pi}{3}$, 所以 $\varphi(-2) = 0$

$y = \varphi(x)$ 的图形如图 1 - 2 所示.

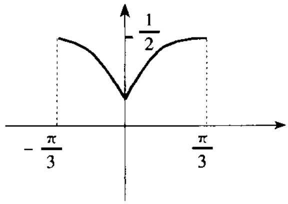

图 1 - 2

9.**证明**(1)　设 $x_1, x_2 \in (-\infty, 1)$ 且 $x_1 \leqslant x_1$

$$y(x_2) - y(x_1) = \frac{x_2}{1 - x_2} - \frac{x_1}{1 - x_1}$$

$$= \frac{x_2 - x_1}{(1 - x_2)(1 - x_1)}$$

$\therefore y(x_2) - y(x_1) \geqslant 0$

$\therefore y = \dfrac{x}{1 - x}$ 在$(-\infty, 1)$ 内单调增加.

(2)　设 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ 且 $x_1 \leqslant x_2$

$$y(x_2) - y(x_1) = x_2 + \ln x_2 - (x_1 + \ln x_1)$$

$$= (x_2 - x_1) + \ln(\frac{x_2}{x_1})$$

$\because x_1 x_2 \in (0, +\infty)$ 且 $x_1 \leqslant x_2$

$\therefore \dfrac{x_2}{x_1} \geqslant 1, \therefore \ln(\dfrac{x_2}{x_1}) \geqslant 0$

$\therefore y(x_2) - y(x_1) \geqslant 0$

$\therefore y = x + \ln x$ 在$(0, +\infty)$ 上单调增加.

10.**证明**　设 $x_1, x_2 \in (-l, 0)$ 且 $x_1 < x_2$,则

$f(x_2) - f(x_1) = f[-(-x_2)] - f[-(-x_1)] \xlongequal{\text{奇函数}} -f(-x_2) + f(-x_1)$

又 $-x_2, -x_1 \in (0, l)$ 且 $-x_1 > -x_2$,故由 $f(x)$ 在$(0, l)$ 内的单增性知:

$$f(x_2) - f(x_1) = f(-x_1) - f(-x_2) > 0$$

从而 $f(x)$ 在$(-l, 0)$ 内也是单调增加的.

11. **证明**　(1) 设 $f_1(x), f_2(x)$ 为两个任意的偶函数,

令　$F(x) = f_1(x) + f_2(x)$

则 $F(-x)=f_1(-x_1)+f_2(-x)=f_1(x)+f_2(x)=F(x)$

故 $F(x)$ 为偶函数.

设 $g_1(x),g_2(x)$ 为两个任意的奇函数,令 $G(x)=g_1(x)+g_2(x)$

则 $G(-x)=g_1(-x)+g_2(-x)=-g_1(x)-g_2(x)=-G(x)$

故 $G(x)$ 为奇函数.

(2) 设 $f_1(x),f_2(x)$ 为任意两个偶函数,令 $F(x)=f_1(x)f_2(x)$

则 $F(-x)=f_1(-x)f_2(-x)=f_1(x)f_2(x)=F(x)$

故 $F(x)$ 为偶函数.

设 $g_1(x),g_2(x)$ 为任意两个奇函数,令 $G(x)=g_1(x)g_2(x)$

则
$$\begin{aligned}G(-x)&=g_1(-x)g_2(-x)=[-g_1(x)][-g_2(x)]\\&=g_1(x)g_2(x)=G(x)\end{aligned}$$

故 $G(x)$ 为偶函数.

设 $f(x)$ 为任一偶函数,而 $g(x)$ 为任一奇函数,令 $T(x)=f(x)g(x)$

则
$$\begin{aligned}T(-x)&=f(-x)g(-x)=f(x)[-g(x)]\\&=-f(x)g(x)=-T(x)\end{aligned}$$

故 $T(x)$ 为奇函数.

12. **解** (1) 因为 $f(-x)=(-x)^2[1-(-x)^2]=x^2(1-x^2)=f(x)$,所以 $y=x^2(1-x^2)$ 为偶函数.

(2) 因为 $f(-x)=3(-x)^2-(-x)^3=3x^2+x^3$,所以 $f(-x)\neq f(x)$ 且 $f(-x)\neq -f(x)$,即 $f(x)$ 既非奇函数又非偶函数.

(3) 因为 $f(-x)=\dfrac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2}=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}=f(x)$,所以 $f(x)$ 为偶函数.

(4) 因为 $f(-x)=(-x)[-(x)-1][-(x)+1]=-x(x-1)(x+1)=-f(x)$,所以 $f(x)$ 为奇函数.

(5) 因为 $f(-x)=\sin(-x)-\cos(-x)+1=-\sin x-\cos x+1$,所以 $f(-x)\neq -f(x)$ 且 $f(-x)\neq f(x)$,即 $f(x)$ 既非奇函数又非偶函数.

(6) 因为 $f(-x)=\dfrac{a^{(-x)}+a^{-(-x)}}{2}=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}=f(x)$,所以 $f(x)$ 是偶函数.

13. **解** (1) 是周期函数,周期 $T=2\pi$

(2) 是周期函数,周期 $T=\dfrac{2\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$

(3) 是周期函数,周期 $T=\dfrac{2\pi}{\pi}=2$

(4) 不是周期函数

(5) 是周期函数.因为 $y = \sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$,所以周期为 $T = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$

14.**解** (1) 因为 $y = \sqrt[3]{x+1}$,所以 $x = y^3 - 1$,从而 $y = \sqrt[3]{x+1}$ 的反函数为 $y = x^3 - 1$

(2) 因为 $y = \dfrac{1-x}{1+x}$,所以 $x = \dfrac{1-y}{1+y}$,从而 $y = \dfrac{1-x}{1+x}$ 的反函数为

$$y = \frac{1-x}{1+x}$$

(3) $\because y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $\quad \therefore x = \dfrac{-dy+b}{cx-a}$

$\therefore y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ 的反函数为:

$y = \dfrac{-dx+b}{cx-a}$.

(4) 由 $y = 2\sin 3x$ 得 $x = \dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{y}{2}$,所以 $y = 2\sin 3x$ 的反函数为 $y = \dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{x}{2}$

(5) 由 $y = 1 + \ln(x+2)$ 得 $x = \dfrac{e^y}{e} - 2$,所以,反函数为 $y = e^{x-1} - 2$

(6) 由 $y = \dfrac{2^x}{2^x+1}$ 得 $x = \log_2\dfrac{y}{1-y}$,所以,反函数为 $y = \log_2\dfrac{x}{1-x}$

15. **证明** 1) 必要性

设 $f(x)$ 在 X 上有界,即存在数 $M > 0$ 使得

$$|f(x)| \leqslant M, \quad x \in X$$

因而 $$-M \leqslant f(x) \leqslant M, \quad x \in X$$

亦即 $f(x)$ 在 X 上既有上界(M),又有下界($-M$).

2) 充分性

设 $f(x)$ 在 X 上有上界 M_1,下界 M_2,即

$$M_2 \leqslant f(x) \leqslant M_1, x \in X$$

令 $M = \max(|M_1|, |M_2|)$,则 $-M \leqslant M_2, M_1 \leqslant M$

因而 $-M \leqslant f(x) \leqslant M, x \in X$

即 $|f(x)| \leqslant M, x \in X$

故 $f(x)$ 在 X 上有界.

16. **解** (1) $y = \sin^2 x$, $\quad y(x_1) = \dfrac{1}{4}$, $\quad y(x_2) = \dfrac{3}{4}$