

912046

计算流体力学基础

刘导治 著



北京航空航天大学出版社

3326
7233

912010

计算流体力学基础

刘导治 著

北京航空航天大学出版社

内 容 简 介

本书是计算流体力学的一本入门教材。前半部分分析了数值解法的精度、收敛性和稳定性等基本概念，从复杂的流动现象中分解出对流迁移、波动、激波突跃、扩散和平衡等基本物理现象，讲解了不同性质现象差分法解法的不同特点。后半部分从信息传播方向分析了流体力学各类方程的可解性与求解途径；介绍了位势方程、欧拉方程组和纳维埃-斯托克斯方程组各种显式和隐式差分法，包括马考马克、近似因式和矢量分裂等先进方法和网格变换。

本书内容新颖，系统性强，强调基本物理概念和思路，讲解深入浅出，循序渐进，便于自学，可作为高等院校有关专业大学生和研究生的教材，也可供有关工程技术人员参考。

计算流体力学基础

JISUAN LIUTI LIXUE JICHU

刘导治 著

责任编辑 郭维烈

北京航空航天大学出版社出版

新华书店总店科技发行所发行 各地新华书店经销

北京农业工程大学印刷厂印装

787×1092 1/16 印张：14.5 字数：371千字
1989年3月第一版 1989年3月第一次印刷 印数：3500册
ISBN 7-81012-105-7/TB·020 定价：2.45元

序 言

随着计算机的发展,计算流体力学很快在航空、气象、海洋、流体机械、输油、建筑和汽车设计等各个领域显示出巨大威力。然而,这门新学科还远没有普及和发挥出应有的潜力,还没有在广大工程技术人员手里形成强大的生产力。因而,很需要有一本入门的教材。

国内外已有不少计算流体力学的书,它们对各种计算方法作了具体详尽的介绍,但不少读者由于不熟悉这方面的一些基础知识而难于入门。另有一些严谨介绍计算流体力学数学理论的书,对不专攻数学的工程技术人员来说也显得远水解不了近渴。本书从目前需要出发,以理工科大学高年级学生的程度为起点,介绍计算流体力学的基本规律和方法。主要篇幅用来讲解物理概念和思路,而不记录一个个具体计算方法的细节。对基本概念的叙述和推导较为细致,但不过多地追求理论上的严谨。用到计算数学或数学物理方程课程的地方,不去重述原课程的内容,而从物理意义上深入浅出地讲清思路。这样,学过气体力学或流体力学并具有一般微积分和线性代数基本知识的读者便可自学本书。

流动现象复杂,其中包含着迁移、波动、突跃、扩散和平衡等基本物理现象。不同性质物理现象的数值解法有其不同的特点。故宜难点分散、循序渐进地讲解。本书第一、二章介绍差分解法的精度、收敛性和稳定性等基本概念。第三至七章把迁移、波动、突跃、扩散和平衡等基本物理现象分解出来,分别讨论它们的差分解法。在此基础上,第八至十二章再讨论流动现象本身,离散网格的设计以及无旋流、无粘流和有粘流等流动现象的差分解法。给研究生和研究人员讲课时,可在本书的基础上继续讲几节专门内容,例如边界条件、激波解法、强隐式法、马考马克法、近似因式法、矢通分裂法、抛物化法和多重网格等方法,以及不可压流、非定常流、紊流、两相流、化学反应流和磁流体力学等问题。

本书是结合个人多年来的研究工作以及给大学生、研究生和研究人员讲课的经验,在原讲义的基础上写成。其中许多内容属于个人研究心得。若有片面不当之处,欢迎批评指正。

刘尊治

1988年1月

目 录

结 论	(1)
第一章 差分格式及其精度	
§ 1-1 差分格式	(4)
§ 1-2 精度的泰勒级数分析	(5)
§ 1-3 常用的差分格式	(7)
§ 1-4 格式设计的待定系数法	(11)
§ 1-5 精度的傅立叶级数分析	(14)
§ 1-6 差分方程的精度和相容性	(18)
第二章 差分解的收敛性与稳定性	
§ 2-1 差分解的收敛性	(21)
§ 2-2 收敛性的检验	(23)
§ 2-3 差分解的稳定性	(24)
§ 2-4 稳定性的傅立叶分析法	(29)
§ 2-5 收敛性与稳定性的关系	(32)
第三章 迁移现象	
§ 3-1 迁移现象	(34)
§ 3-2 信息依赖域	(36)
§ 3-3 显式差分格式	(39)
§ 3-4 隐式差分格式	(44)
§ 3-5 多维迁移现象	(48)
第四章 波动现象	
§ 4-1 波动现象	(50)
§ 4-2 收敛性与依赖域的关系	(54)
§ 4-3 差分格式	(55)
§ 4-4 超音流动现象	(57)
第五章 突跃现象	
§ 5-1 突跃现象	(60)
§ 5-2 频散现象与耗散现象	(62)
§ 5-3 等价微分方程	(66)
§ 5-4 差分格式	(69)

第六章 扩散现象

§ 6-1 扩散现象	(73)
§ 6-2 显式差分格式	(75)
§ 6-3 输运现象	(79)
§ 6-4 稳定性的矩阵分析法	(80)
§ 6-5 隐式差分格式	(86)
§ 6-6 多维扩散现象	(89)

第七章 平衡现象

§ 7-1 平衡现象	(95)
§ 7-2 差分格式	(97)
§ 7-3 代数方程组的直接解法	(99)
§ 7-4 代数方程组的迭代解法	(102)
§ 7-5 显式迭代格式	(105)
§ 7-6 隐式迭代格式	(107)

第八章 流动现象

§ 8-1 流动现象	(112)
§ 8-2 无旋流动	(118)
§ 8-3 无粘流动	(119)
§ 8-4 粘性流动	(125)
§ 8-5 微分方程的定解条件	(126)
§ 8-6 差分方程的定解条件	(128)

第九章 离散网格

§ 9-1 对离散网格的要求	(133)
§ 9-2 网格生成的代数法	(134)
§ 9-3 网格生成的微分方程法	(136)
§ 9-4 有限体积离散法	(142)

第十章 无旋流动

§ 10-1 微分方程	(145)
§ 10-2 差分格式	(148)
§ 10-3 守恒形方程	(154)
§ 10-4 代数方程组解法	(160)

第十一章 无粘流动

§ 11-1 微分方程.....	(164)
§ 11-2 定解条件.....	(168)
§ 11-3 显式差分格式.....	(176)
§ 11-4 矢通分裂措施.....	(188)
§ 11-5 隐式差分格式.....	(194)

第十二章 粘性流动

§ 12-1 微分方程.....	(201)
§ 12-2 差分格式.....	(206)
§ 12-3 $N-S$ 方程组的抛物化.....	(209)
§ 12-4 附面层.....	(212)
§ 12-5 不可压流.....	(215)
参考书	(222)

绪 论

流体力学早年只有理论和实验两个分支。理论流体力学公式严谨，但只能求解十分简单的流动，例如一维流动或作了线性化假设的二维位势流动以及简化的附面层流动等；只适用于十分简单的几何形状，如平板、正弦形壁、圆柱体以及圆弧、椭圆或抛物形翼型等。实验流体力学可研究复杂几何形状下的复杂流动，但昂贵费时，所能模拟的因素也受到限制。大型风洞的投资费用以亿元计，设计大型飞机要吹风十多年。实验还难于测量复杂流动的详细结构，也不易做孤立因素的优化分析。

计算机问世以来，计算流体力学这一新的分支发展迅速。它能计算理论流体力学所不能求解的复杂几何形状下的非线性复杂流动。它省钱省时，已代替了很大一部分风洞试验。它还可模拟复杂流动的详细结构，也便于做孤立因素的优化分析。用计算手段已开始发现了一些理论还解不出、实验还测不到的流动中的新现象。从六十年代后期以来的短短二十年里，它已解决了流体力学中许多疑难问题，已应用于航空、气象、海洋、流体机械、输油、建筑和汽车设计等各个领域。目前，先进的计算机已达内存许多亿字节，速度每秒许多亿次。人工算几个世纪的问题，现在只需算一秒钟，已有能力作整架飞机的三维流气动设计。计算流体力学正在蓬勃发展，具有很大的潜力。

描述流动现象最完整的是粘流方程组。假设无粘无旋时，流动简化为位势流，可以只用一个位势方程来描述。七十年代发展了用非线性位势方程求解跨音流场的方法。令 Φ 表速度势函数， Ma 表气流马氏数， M^2 表 $(Ma)^2$ ， x 轴平行于流速，则二维跨音小扰动位势方程是

$$(1 - M^2) \frac{\partial \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad (0-1)$$

$Ma > 1$ 超音时流场中有马赫波，方程具有波动性质。 $Ma < 1$ 亚音时方程的性质已不同，其中 $Ma = 0$ 不可压时简化为拉普拉斯方程，它们描述稳恒的平衡现象。

有稍强的激波后不宜再假设无旋，这时流体的运动需用无粘流的欧拉 (Euler) 方程组来描述。八十年代已广泛使用欧拉方程组求解流场。一维等熵流的欧拉方程组是

$$\left. \begin{aligned} \text{质量方程} \quad & \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \text{动量方程} \quad & \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \text{内能方程} \quad & \left(\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} \right) = a^2 \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (0-2)$$

式中 u 、 p 和 ρ 是流速、压强和密度， a 是音速， x 轴平行于流速， t 是时间。上面三个方程里都有带括弧的项 $\left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right)$ ，它代表物理量 u 、 p 或 ρ 随着流体微团迁移时的变化率，

反映了流体微团对流过程中的输运作用。

物面附近等粘性现象显著的流动需用粘流的纳维埃-斯托克斯 (Navier-Stokes) 方程组来描述。近年来正在发展 $N-S$ 方程组的各种解法。 $N-S$ 方程组中除上面已有的迁移即对流项外另有粘性项, 有时还会有传热项, 例如 $\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 和 $\kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ 。式中 ν 是粘性系数, κ 是传热系数, T 是温度。粘性项反映动量的扩散, 传热项反映内能的扩散。它们都借助于分子扩散运动而不是微团的迁移来输运, 都具有相同的形式和性质。

我们看到, 流动过程中包含着迁移、波动、扩散和平衡等不同性质的基本物理现象。令 U 表示待求解的函数, c 表示速度, ν 表扩散系数, 则分别描述这些基本现象的最简单的方程是

$$\text{迁移方程} \quad \frac{\partial U}{\partial t} + c \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (0-3)$$

$$\text{波动方程} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (0-4)$$

$$\text{扩散方程} \quad \frac{\partial U}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (0-5)$$

$$\text{拉普拉斯方程} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \quad (0-6)$$

在迁移或波动过程中, 若方程的系数是变量。例如

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (0-7)$$

还会出现现象激波那样的参数突跃现象。

流体力学方程数值解法中广泛应用的是有限差分法, 即在离散的网格点上把各偏导数项化为差商来求数值解。早年人们没有意识到差分求解另有其自身的内在规律时, 曾简单地以为只要把微商 $\frac{dy}{dx}$ 化为差商 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 就行了。例如, 求解扩散方程 (0-5) 时可试以 t 向中心差分

分 $\frac{U_i^{j+1} - U_i^{j-1}}{2\Delta t}$ 代表 $\frac{\partial U}{\partial t}$, 以 x 向中心差分 $\frac{U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j}{\Delta x^2}$ 代表 $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, 成为

$$\frac{U_i^{j+1} - U_i^{j-1}}{2\Delta t} = \nu \frac{U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j}{\Delta x^2}$$

这便是著名的里恰森 (Richardson) 中心差分格式。自从1910年里恰森提出这个格式以来, 没有人用它算出过正确的结果, 但不知道为什么。直到1951年才证明这个格式是错误的。流体力学方程差分求解中有其自身的一系列基本规律, 已为人们一步步认识, 但还没有形成很成熟的理论体系。

本书是计算流体力学课程的一本入门教材。为了便于入门, 打好基础, 书中采取难点分散、循序渐进的做法, 并注意深入浅出地建立清晰的物理概念和思路。物理现象的不同性质将深刻地规定差分求解中的不同特点, 故把流动过程中的各种基本物理现象分解开来讲解。

第一、二章通过简单方程的求解过程引出精度、收敛性和稳定性等计算流体力学中的基本规律。第三至七章分别讨论迁移、波动、突跃、扩散和平衡等基本物理现象的差分解法。讨论中将以最简单偏导数项组成的典型线性常系数微分方程 (0-3)、(0-4)、(0-5) 和 (0-6) 为例，只突跃现象将以非线性迁移方程 (0-7) 为例。第八至十二章再讨论流动现象本身、离散网格的设计和无旋流动、无粘流动以及粘性流动现象的差分解法。

配合理论学习，宜安排一定的计算机上机时间。通过作业学会编制各类典型物理现象的差分求解程序。在编制简单程序的过程中学习复杂的计算流体力学内容，可收到事半功倍的效果。

第一章 差分格式及其精度

流体力学问题的偏微分方程组比较复杂，很难用理论方法求解解析解。目前只能用计算机求得它近似的数值解。求数值解的主要方法是差分方法，即将微分方程按一定的格式离散为差分方程，然后求它的数值解。差分方法的基本要求应是差分方程能准确地代表微分方程。故应首先分析差分方程趋近于微分方程的精确程度。本章介绍什么是差分方程的格式 (§ 1-1)，常用的差分格式 (§ 1-3) 和设计差分格式的通用方法 (§ 1-4)；并介绍差分格式精度的分析方法，包括泰勒级数法 (§ 1-2) 和傅立叶级数法 (§ 1-5)；最后，确定差分方程对微分方程的近似程度，即所谓相容性 (§ 1-6)。

§ 1-1 差分格式

一个偏微分方程至少有两个自变量，例如空间坐标 x 和时间坐标 t 。偏微分方程的解是连续自变量 x 和 t 的函数，例如 $U(x, t)$ 。目前很难求 U 的解析解，只好用计算机求出在若干个离散的 (x, t) 点上 U 的近似数值。

求离散点上 U 的数值时，需先在 $x-t$ 平面上指定一系列离散的点。例如，可用两组平行线划出长方形网格，如图 1.1 所示。简单情况下可将网格线等距离安排，即取自变量 x 的改变量 $\Delta x = h$ 为常数， t 的改变量 $\Delta t = \tau$ 为另一常数。 h 称为沿 x 方向的网格步长， τ 称为沿 t 方向的网格步长。网格线的交点则称为网格的结点或节点。结点的坐标可用其序号来代表。例如，第 j 条等 x 线与第 n 条等 t 线的交点 (x_j, t_n) 可简写为 (j, n) 。相应地， $(x_j + h, t_n)$ 点可简写为 $(j+1, n)$ 。依此类推。为书写简洁，序号 (j, n) 还可写成注脚和注肩的形式，例如 $U(j, n)$ 可写成 U_j^n 。这里的注肩 n 已不代表指数方次，而只代表第 n 个时间步或时间层。设计好网格后，就可把连续域上的偏微分方程离散为有限个结点上的差分方程。

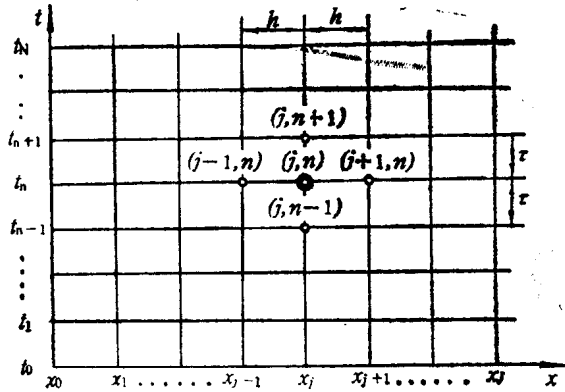


图 1.1

偏微分方程记述了函数的各项偏导数之间的关系。偏导数常简写成注脚形式，如 $\frac{\partial U}{\partial x}$ 可写成 U_x 。当偏微分方程离散为差分方程时，它的各项偏导数将离散为差商。差商的形式称为偏导数的差分格式。由各差商项组成的差分方程的形式，则称为偏微分方程的差分格式。

现以 (j, n) 点上一阶偏导数项 $(U_x)_j^n$ 为例，看看它可能的差分格式。

见图1.2。一阶差商至少要用到两个结点的参数。
例如，可取 (j, n) 点左右侧两个对称点上的参数组成

$$\frac{U_{j+1}^i - U_{j-1}^i}{2h}$$

这一差商形式对所考虑的结点 (j, n) 说是对称的，故称为 $(U_x)_j^i$ 的中心差分格式。

一个偏导数的差分格式并不唯一，常可根据情况采用不同的格式。例如，超音流里下游信息是不能逆流上传的。设取坐标时让流动由左向右流去，即取 x 的正方向为下游的方向，如图1.2所示。这时， (j, n) 点上的参数只能由 $(j-1, n)$ 等上游结点的信息决定，而不能由 $(j+1, n)$ 等下游结点的信息来决定。故在超音流里求解 $(U_x)_j^i$ 时只好不用下游参数，而需用上游参数，例如可用当地 (j, n) 和上游 $(j-1, n)$ 结点的参数组成

$$\frac{U_j^i - U_{j-1}^i}{h}$$

这称为 $(U_x)_j^i$ 的上游差分格式，或称上风、迎风或逆风差分格式。反之，若使用的是下游结点的参数，则称为下游差分格式。

人们常称坐标轴的正方向为向前的方向，坐标轴的负方向为向后的方向。上面的例子使用的是 x 轴向后方向结点的参数，故又称为向后差分格式，简称后差。若使用的是 x 轴向前方向结点的参数，则称向前差分格式，简称前差。它们统称为一侧差分格式，以区别于中心差分。不同的格式常常具有不同的精度，需要进行分析。

每一偏导数项可采用不同的差分格式。由各差商项组成的差分方程也将具有不同的格式。§1-1到§1-5先讨论偏导数项的差分格式，§1-6再讨论偏微分方程的差分格式。

§1-2 精度的泰勒级数分析

差分方程是用来代替偏微分方程求解的，故评定差分格式好坏的主要指标应是这一代替所达到的精确程度。为此，希能找到联系偏导数和相应差商的某种关系式，从中找出用差商代替偏导数的误差大小。我们知道，泰勒级数和傅立叶级数等都描述着函数与其邻点函数之间的精确关系，因而都有可能用来分析差分格式的精度。拿泰勒级数来说，它描述着相邻点函数值与当地偏导数值之间的精确关系，公式简明，故常使用。只要函数在所讨论的域内有

足够高阶的偏导数存在，就可展成泰勒级数。现在就以 U_x 的向前差分格式 $\frac{U_{j+1}^i - U_j^i}{h}$ 为

例，试用泰勒级数分析它的精度。

对结点 (j, n) 说，其前方邻点 $(j+1, n)$ 上的函数 U_{j+1}^i 可展成泰勒级数

$$U_{j+1}^i = U_j^i + \frac{h}{1!} (U_x)_j^i + \frac{h^2}{2!} (U_{xx})_j^i + \dots$$

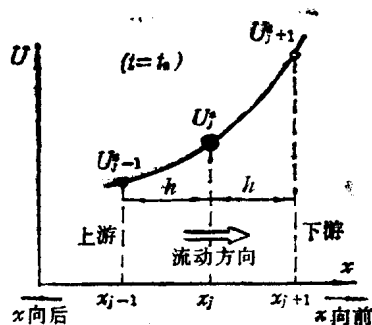


图 1.2

由此可写出偏导数 U_x 及其差商之间的关系式

$$\frac{U_{j+1}^i - U_j^i}{h} = (U_x)_j^i + R_j^i$$

式中 R_j^i 是泰勒级数后面的余项除以 h ,

$$R_j^i = \frac{h}{2} (U_{xx})_j^i + \dots$$

可见, 前差格式的差商 $\frac{U_{j+1}^i - U_j^i}{h}$ 等于微商的精确值 $(U_x)_j^i$ 加上余项 R_j^i , 亦即用前差格式代替微商的误差为 R_j^i 。 R_j^i 来自泰勒级数后面被截去的余项, 故称为截断误差。

同一差分格式可用于不同的流场不同的结点。不同场合下步长 h 不同, U_{xx} 等偏导数的数值也不同。故对一种差分格式说, 只能估计它截断误差的数量级范围。为了精确, 网格常取得足够密, 使 h 足够小, 而 U_{xx} 等偏导数在一般情况下还不致于异常大。这时误差的数量级可由 h 的大小来估计。设 $h = 0.01$, 则上面 R_j^i 式中第一项 $\frac{h}{2} U_{xx}$ 将属于 0.01 的数量级, 而其后各项将属于 $h^2 = 0.01^2$ 或更小的数量级。故前差格式的 R_j^i 可表达为

$$R_j^i = O(h)$$

此式说明, 截断误差为 h 一次方的数量级。 O 是数量级 “Order” 的缩写。由于 $O(h)$ 只代表数量级, 故只取绝对值, 不区分正负。

人们称截断误差为 $O(h)$ 的差分格式的精确程度为一阶精度。若某一格式的截断误差为 h 二次方的数量级, $R_j^i = O(h^2)$, 则为二阶精度。依此类推。

在激波附近等参数变化剧烈的地区, U_{xx} 等各阶偏导数往往很大。即使 h 很小, 误差仍会很大。截断误差已不能只用 h 来衡量, 而应作进一步的分析。这时不得不选取更密的网格或采取其它措施来保证精度。

截断误差只是微分方程离散为差分方程时带来的误差。下一步用计算机解差分方程时, 由于计算机里的字长有限, 后面的尾数都被四舍五入省略了, 于是又带来了新的误差, 即舍入误差。它与截断误差是差分数值解法中的两大类误差。单从减小截断误差考虑, 步长似应越小越好。然而, 当沿网格依次解一个个结点的差分方程时, 每步所得数值都要新添一次舍入误差。经过的结点越多, 舍入误差积累得也越大, 如图 1.3 所示。而且, 结点越多需要计算机的内存和计算时间也越多。故步长只宜适当地小。

分析其它各种差分格式精度时, 需用到 (j, n) 的多个邻点上的泰勒级数。为了书写简洁, 不妨暂时略去基准结点 (n, j) 的注肩和注脚。例如 $(U_x)_j^i$ 可写成 U_x , R_j^i 可写成 R 等。当只讨论 x 向偏导数时, 所有参数都取第 n 时层的, 故全部注肩 n 都可暂时略去。以 x 向偏导数为例, 最常用到的将是 j 的邻近几个结点 $j+1, j-1, j+2$ 和 $j-2$ 上参数的泰勒级数, 如下:

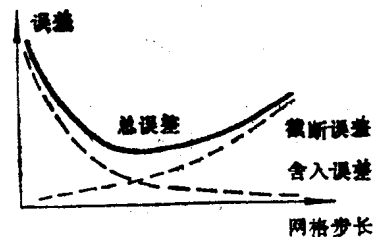


图 1.3

$$U_{j+1} = U_j + \frac{h}{1!} U_x + \frac{h^2}{2!} U_{xx} + \frac{h^3}{3!} U_{xxx} + \frac{h^4}{4!} U_{xxxx} + O(h^5) \quad (1-1)$$

$$U_{j-1} = U_j - \frac{h}{1!} U_x + \frac{h^2}{2!} U_{xx} - \frac{h^3}{3!} U_{xxx} + \frac{h^4}{4!} U_{xxxx} + O(h^5) \quad (1-2)$$

$$U_{j+2} = U_j + \frac{(2h)}{1!} U_x + \frac{(2h)^2}{2!} U_{xx} + \frac{(2h)^3}{3!} U_{xxx} + \frac{(2h)^4}{4!} U_{xxxx} + O(h^5) \quad (1-3)$$

$$U_{j-2} = U_j - \frac{(2h)}{1!} U_x + \frac{(2h)^2}{2!} U_{xx} - \frac{(2h)^3}{3!} U_{xxx} + \frac{(2h)^4}{4!} U_{xxxx} + O(h^5) \quad (1-4)$$

有了这些式子，便可用来分析多种差分格式的精度。

§ 1-3 常用的差分格式

流体力学方程里常见的是一、二阶偏导数，如一阶偏导数 U_x 、二阶普通偏导数 U_{xx} 和二阶混合偏导数 U_{xy} 等。

一、一阶偏导数

一阶偏导数可举 $\frac{\partial U}{\partial x}$ 即 U_x 为例。 U_x 常用的是中心差分格式和向前或向后的一侧差分格式。

1. 向前差分格式

U_x 的向前差分格式是 $\frac{U_{j+1} - U_j}{h}$ 。

将泰勒级数(1-1)式两端除以 h 可得

$$\frac{U_{j+1} - U_j}{h} = U_x + \frac{h}{2} U_{xx} + O(h^2) \quad (1-5)$$

式中 U_x 和 U_{xx} 是 $(U_x)_j$ 和 $(U_{xx})_j$ 的简写。由此式看出，前差格式的截断误差 $R =$

$\frac{h}{2} U_{xx} + O(h^2) = O(h)$ ，是一阶精度的格式。 R 中的主项含有二阶导数 U_{xx} 项。

2. 向后差分格式

U_x 的向后差分格式是 $\frac{U_j - U_{j-1}}{h}$ 。

将泰勒级数(1-2)式两端除以 h 可得

$$\frac{U_j - U_{j-1}}{h} = U_x - \frac{h}{2} U_{xx} + O(h^2) \quad (1-6)$$

式中 U_x 仍是 $(U_x)_j$ 的简写。由此式看出，后差格式的截断误差 $R = -\frac{h}{2} U_{xx} + O(h^2) =$

$O(h)$, 也是一阶精度的格式。 R 中的主项也含有二阶导数 U_{xx} 项。

3. 中心差分格式

U_x 的中心差分格式是 $\frac{U_{j+1} - U_{j-1}}{2h}$

由泰勒级数 (1-1) 式减 (1-2) 式, 并通除以 $2h$, 可得

$$\frac{U_{j+1} - U_{j-1}}{2h} = U_x + \frac{h^2}{6} U_{xxx} + O(h^4) \quad (1-7)$$

由此式看出, 中心差分格式的截断误差 $R = \frac{h^2}{6} U_{xxx} + O(h^4) = O(h^2)$, 是二阶精度的格式。

R 中已没有 U_{xx} 项, 其主项中包含的是三阶导数 U_{xxx} 项。

设一侧差分的截断误差 $O(h)$ 为 0.01, 则同样步长 h 下中心差分的截断误差 $O(h^2)$ 将只有 0.01^2 。可见, 二阶精度比一阶精度精确得多。一般情况下二阶精度已经足够, 故常用中心差分格式。当不宜采用中心差分时可改用一侧差分。它的一阶精度有时不满足要求, 则需设计二阶精度的一侧差分格式。

4. 二阶精度的一侧差分格式

见图 1.4。中心差分精度较高, 是因为它用结点 j 的向后线段斜率 $\frac{U_j - U_{j-1}}{h}$ 与向前线段斜率

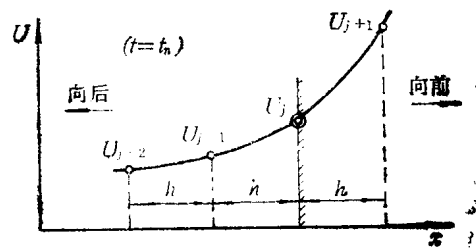


图 1.4

$\frac{U_{j+1} - U_j}{h}$ 的平均值来代替 j 点的偏导数 $(U_x)_j$ 。

一侧差分精度较低, 是因为它只用了一侧斜率而不知另一侧斜率的信息。例如, 向后差分只用了向后线段的斜率 $\frac{U_j - U_{j-1}}{h}$ 来代替 $(U_x)_j$ 。不过, 虽不直接知道向前的信息, 若

多知道更向后一段的斜率 $\frac{U_{j-1} - U_{j-2}}{h}$, 就可知道 $j-2$ 至 j 段的斜率变化趋势 $\frac{U_j - U_{j-1}}{h} - \frac{U_{j-1} - U_{j-2}}{h}$ 。由于曲线拐弯的趋势通常是连续的, 不妨认为 $j-1$ 至 $j+1$ 段斜率变化趋势也应大致如此, 即

$$\frac{U_{j+1} - U_j}{h} - \frac{U_j - U_{j-1}}{h} \approx \frac{U_j - U_{j-1}}{h} - \frac{U_{j-1} - U_{j-2}}{h}$$

从而可间接估计出向前线段的斜率值

$$\frac{U_{j+1} - U_j}{h} \approx 2 \frac{U_j - U_{j-1}}{h} - \frac{U_{j-1} - U_{j-2}}{h}$$

这时的中心差分乃可近似表示成向后参数的形式, 即

$$\frac{1}{2} \frac{U_{j+1} - U_j}{h} + \frac{1}{2} \frac{U_j - U_{j-1}}{h} \approx \frac{3(U_j - U_{j-1}) - (U_{j-1} - U_{j-2})}{2h}$$

$$= \frac{3U_j - 4U_{j-1} + U_{j-2}}{2h}$$

这便是 $(U_x)_j$ 的较高精度的向后差分格式。

这个格式也可从泰勒级数推来，并同时推得其精度。将泰勒级数 (1-4) 式乘 $\frac{1}{2h}$ ，减去

(1-2) 式乘 $\frac{2}{h}$ ，可得

$$\frac{3U_j - 4U_{j-1} + U_{j-2}}{2h} = U_x - \frac{h^2}{3} U_{xx} + O(h^3) \quad (1-8)$$

式中 U_x 是 $(U_x)_j$ 的简写。由此式看出，它的截断误差 $R = -\frac{h^2}{3} U_{xx} + O(h^3) = O(h^2)$ ，

故它是 $(U_x)_j$ 的二阶精度的后差格式。R 中已没有 U_{xx} 项，其主项中包含的是三阶导数 U_{xxx} 项。

同理， $(U_x)_j$ 的二阶精度的前差格式是 $\frac{-U_{j+2} + 4U_{j+1} - 3U_j}{2h}$ 。

刚才的格式是从物理意义构思出来的。若要构思出更多更精确的一侧和中心差分格式，不一定很容易。最好能有简便通用的推导方法。

上面以 U_x 为例讨论了一阶偏导数的常用差分格式。 U_x 等也有完全类似的差分格式和相应的精度。例如， $(U_x)_j^*$ 的向前差分是 $\frac{U_{j+1}^* - U_j^*}{\tau}$ ，为一阶精度；中心差分是

$\frac{U_{j+1}^* - U_{j-1}^*}{2\tau}$ ，为二阶精度等。

二、二阶普通偏导数

二阶普通偏导数可举 $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ 即 U_{xx} 为例。它是斜率的变化率 $\frac{\partial(\frac{\partial U}{\partial x})}{\partial x}$ ，故其差商

至少要用到三个结点的参数。

1. 中心差分格式

对三个结点说，最自然的格式是中心差分。见

图 1-5，将结点 j 上的 $\frac{\partial(\frac{\partial U}{\partial x})}{\partial x}$ 写成差商

$(\frac{U_{j+1} - U_j}{h} - \frac{U_j - U_{j-1}}{h}) / h$ ，便得到

$\frac{U_{j+1} - 2U_j + U_{j-1}}{h^2}$ 。这便是 U_{xx} 的中心差分格式。

这个格式也可从泰勒级数推来，并同时推得其精度。将泰勒级数 (1-1) 式加 (1-2) 式，并通除

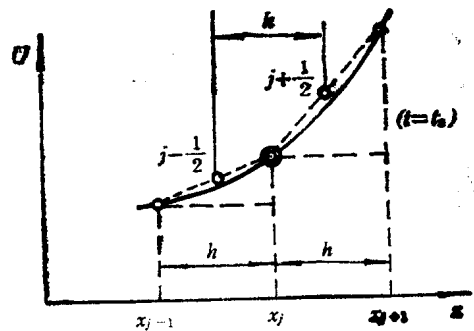


图 1-5

以 h^2 , 可得

$$\frac{U_{j+1} - 2U_j + U_{j-1}}{h^2} = U_{xx} + \frac{h^2}{12} U_{4x} + O(h^4) \quad (1-9)$$

看出, 中心差分格式的截断误差 $R = \frac{h^2}{12} U_{4x} + O(h^4) = O(h^2)$, 是二阶精度的格式。一般它已有足够的精度, 故最常采用。

2. 一侧差分格式

不宜使用中心差分时可采用一侧差分。将泰勒级数 (1-4) 式乘 $\frac{1}{h^2}$, 减去 (1-2) 式乘 $\frac{2}{h^2}$, 可得

$$\frac{U_j - 2U_{j-1} + U_{j-2}}{h^2} = U_{xx} - hU_{3x} + O(h^2) \quad (1-10)$$

式中 U_{xx} 是 $(U_{xx})_j$ 的简写。由此式看出, 它的截断误差 $R = -hU_{3x} + O(h^2) = O(h)$, 故它是 $(U_{xx})_j$ 的一阶精度的向后差分格式。

需要时还可设计更高精度的格式。

三、二阶混合偏导数

二阶混合偏导数的形式是 $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t}$ 即 U_{xt} 。它可写成 $a\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) / \partial t$, 故其差商至少要用到四个结点的参数。 x 和 t 方向都要用到至少各两层结点, 故反映 t 坐标的注肩已不能省略。

1. 中心差分格式

将 (j, n) 结点上的 $a\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) / \partial t$ 按中心差分写成差商 $\left(\frac{U_{j+1}^{n+1} - U_{j-1}^{n+1}}{2h} - \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2h}\right) / 2\tau$

便得到 U_{xt} 的中心差分格式 $\frac{U_{j+1}^{n+1} - U_{j-1}^{n+1} - U_{j+1}^n + U_{j-1}^n}{4h\tau}$ 。

这个格式也可从泰勒级数推来, 并同时推得其精度。为此, 写出二元泰勒级数

$$U_{j+1}^{n+1} = U_j^n + \frac{1}{1!} [+hU_x + \tau U_t] + \frac{1}{2!} [h^2 U_{xx} + 2h\tau U_{xt} + \tau^2 U_{tt}] + O(h^3, h^2\tau, h\tau^2, \tau^3) \quad (1-11A)$$

$$U_{j-1}^{n+1} = U_j^n + \frac{1}{1!} [-hU_x + \tau U_t] + \frac{1}{2!} [h^2 U_{xx} - 2h\tau U_{xt} + \tau^2 U_{tt}] + O(h^3, h^2\tau, h\tau^2, \tau^3) \quad (1-11B)$$

$$U_{j+1}^n = U_j^n + \frac{1}{1!} [+hU_x - \tau U_t] + \frac{1}{2!} [h^2 U_{xx} - 2h\tau U_{xt} + \tau^2 U_{tt}] + O(h^3, h^2\tau, h\tau^2, \tau^3) \quad (1-11C)$$