目　錄

序

數學是人類文化很寶貴的一部份，近世科學技術的突飛猛進，如說主要是由於數學的貢獻，並不爲過。今天，高深的數學不但應用於自然科學與工程技術，也應用於社會科學與軍事各方面。在現代社會工作的人，無論他在那一崗位，都應對數學與計算的工具，如電子計算機等，有適當的了解。

但是，數學的內容非常廣泛，美國名數學家 Halmos 就說過，沒有一個人能知道今日數學的所有部門，因此有一個很迫切的需要，那就是希望能够有一本書，能盡量地把數學的各方面作深入淺出而有系統的介紹，使對某一門數學不需有很高水準的人，也能對它的發展與內容，和其他部門的關連，有一正確的認識。這就是編譯本集書的目的。

因爲沒有一個人能了解所有的數學，所以像這樣的一本書，如要有權威性，就不可能由一個人來寫，本集書的編成，就是這樣的。

本集書搜集了二十世紀權威學者對他們各自所專部份的概況描述性文章，主要取材於「科學美國」雜誌，這是筆者去歲無意得自美國麻省理工學院的書店。

本集的內容，雖然是由很多人的個別文章所構成，但在組織上，使閱讀的人，會覺得好像是一個人寫的，原編者確是費過一番功夫。筆者將原文讀過後，又補充了三篇文章，一篇是 Apostol 對微積分的發展的介紹，另一篇是陳藎民的「非歐派幾何學」（商務印書館出版）的一部份，這種補充與改編的工作，如果情形許可，還要隨時作的。

本集一共分二册，分別獨立出版；第一册是對所謂純數學各部門

的介紹，第二册是數學的應用。

本集的文章，除了對各部門的發展過程與內容，有系統化的講解外，有時還對各部門目前的研究勢態，以及爲甚麼要這樣作的原因，有相當的說明，另外對數學治學的方法，也有配合性的指導，這些都是一般教科書所缺少，而爲本書文章可貴之處。

像這類的文章，寫起來固然不容易，就是翻譯也有困難之處，幸好本集的各部門，都能找到專門從事數理工作的人，擔任譯校的工作，在編譯上，我們採取意譯的方法，對原文有時也有增删或重新組織之處。我想我們的工作算是盡力了，但錯誤恐仍難免，很希望專家學者及讀者先生們惠予指正，使本書如能再版時更正。

61年6月　李 應 庚

(一) 數學與物理的理論

我們時常聽人說到愛因斯坦的相對論，牛頓的力學理論，席樂汀的波動力學理論，歐氏的幾何原理，還有羣論，機率論等等：各種不同的學問，我們不禁要問"一個理論 或原理的結構是怎樣的？""它是怎樣形成的？""像那樣的結構有甚麼好處？"簡略言之，人類有時因觀察了一些現象；如行星有規則的運動等，很想用幾條簡單的規則來概括這一類的現象，這一套規則，就是所謂的定律或公設，它們就構成了某一理論，這樣作的好處之一是可由這一理論的規則去推測現象，譬如說，有了愛因斯坦的特別相對論的規則，就推出了 $E=mc^2$ 這個重要的公式，再經實驗得出相符的結果。我們想一想，如果沒有愛氏的理論，$E=mc^2$ 這個關係當然也可由實驗的方法發現，但可確定的是它不會在二十世紀初期出現，也許要經過很長的時間才會出現，甚至永遠也不會有人想到質量與能量有關連，而去做那方面的實驗，那 $E=mc^2$ 就會永遠埋沒了。

涉及數學方面的這些問題，本集書中很多文章都有討論，要看完後，才會有比較完整的了解，爲了使讀者事先對這些問題，有一概念的準備，編者很感謝商務印書舘當局允許本書引用陳藎民著"非歐派幾何學"的一部份。下面便是從陳著"非歐派幾何學"前幾章摘錄下來的。(編者)

幾何學命名的來歷，已不得其詳了，以現在所知道的，只是明徐光啓翻譯幾何原本的時候，譯 Geometry, 爲幾何；所以幾何兩字實由 Geo 音譯而來。我們中國所謂幾何學，在英國美國叫做Geometry, 在法國叫做Gèomètrie, 在德國叫做 Geometrie, 意大利叫做 Geometria………各國命名雖各不同，總之都是從希臘文Geometria 一字蛻

化而來。現在把這個字意分析起來講：Geo的意義是"地"；Metria的意義是"量"；把它合起來講，Geometria就是測地術，所以幾何學在初起的時候，不過是測地術的意思，後來經過許多數學家的努力研討，一天一天的進化，到了現在，遂成爲輝煌燦爛的幾何學，遠非簡單的測地術可比了。

幾何學和其他科學一樣，是由許多簡單的和複雜的命題集合而成的；也和數學中其他各門一樣，是一部演繹的科學，一部幾何學，就是一串的命題，試將中學幾何學教科書翻開一看，開端的就是公理（Axiom），其次就是公法，（Postulate）再其（公理與公法現已不區別，現在通用譯名爲公設——編者）次爲定理（Theorem）和作圖題（Problem）：這四種我們統稱之爲命題（Proposition）。幾何學的命題是用論理學的方法排列起來的，換句話說：即後面的命題是根據前面的命題證明後而成立的；而前面的命題又是根據更前面的命題證明後而成立的，我們想：照這樣的方法，即以命題證明他命題的方法，到了最後，一部幾何學總有幾個開始的命題，因爲前面沒有命題再給它做證明的根據，所以不能證明，祇讓學者自己明白的，這種開始的，不能證明的命題，我們叫做公理，又幾何學上所用的名詞也是用論理學的方法來下定義，即以簡單的名詞來解釋繁複的名詞，以繁複的名詞解釋更繁複的名詞，我們想這樣以名詞的方法往下推去，一部幾何學總有幾個開始的名詞不能再解釋，不能再下定義的。這種不再解釋，再下定義的簡單名詞，我們叫做幾何學上的基本概念（Fundamental Conception），應用基本概念寫出一組十全的，不相矛盾的，各自獨立的公理，根據這組公理，用論理學的方法演出一串的命題，這一串的命題就是幾何學。

由上面看來，可知：只要有一組完善的公理，就有一部幾何學，所以若干百組不同的完善的公理，就可以有千百種不同的幾何學。但

是在一百年以前，我們只知道一種幾何學，即歐几里德幾何學，並且以爲除了歐几里得幾何學外，不能再有其他幾何學。到了1830年，俄國算術家羅波切夫斯基（Lobatchevsky）發表他的虛幾何學（現稱雙曲線幾何學），才知道有第二種幾何學。到了1854年德國數學家黎曼發現他的新幾何學才知道有第三種幾何學，至於幾何學種類可以多至無窮那是近二三十年來的事。（指作者寫書以前——編者）

依據現代幾何學家研究的結果，像歐派幾何學只用十個公理做推演的根據實在是不够的，德國幾何學家 D. Hilbert 所作的"幾何原理"（The foundations of geometry），和法國 A. Mac Leod 所著的"非歐派幾何學"（Introduction á la geometrie Non—Euclidienne），他們都把歐派幾何學所有的基本概念及公理分爲五類：

甲類：結合公理（Axioms of Connection）

基本概念我們設想：幾何學上有三種東西，第一種點，以 A,B,C,D 等記號表之，第二種叫做直線，是由點集合而成的，以 a,b,c等記號表示，第三種叫做平面，平面也是由點集合而成的，以 α,β,γ 等記號表之。

我們有了點線面三種東西，再設想它們有各種相互的關係，下面五類公理，就是規定它們的關係的。

公理 1. 若 A,B 爲不同的兩點，則通過 A,B 只可作一條直線，且只能作一條直線。

公理 2. A,B,C 三點，若是不同在一直線上，則通過 A,B,C 可作一個平面，且只能作一個。

公理 3. 每一條直線至少有兩點存在，每一個面至少有三點不在一直線上，空間至少有四點不在一直線上，也不在一平面上。

公理 4. 若直線 a 有兩點在 α 面上，則該線 a 所有的點都在 α 平面上。

公理 5　α, β 兩平面，若有一點是公共的，則 α, β 至少還有一點是公共的。

定理 1. 設有一直線 a 及一點 A，若 A 不在 a 上，則通過 a 及 A 可作一平面，且只能作一平面。

（證明）　設 B,C 爲直線 a 上不同的兩點（公理 3），則通過 A,B,C 可作一平面 α（公理 2），直線 a 既然有 B,C 兩點在平面 α 上，所以直線 a 完全在 α 上(公理 4)，所通過a和A的平面只有一個。

乙類：次序公理 (Axioms of Order)　(略)

丙類：疊合公理 (Axioms of Congruence)　(略)

丁類：平行公理或歐几里德公理 (Axiom of Paralleles)　(略)

戊類：連續公理 (Axioms of Continuity)　(略) 或 Dedekind 公理。

上述五類公理不僅各自獨立，不相矛盾，並且也是十全的，至於根據這五類公理如何演出歐氏幾何學來可參考 Habsted 所編的 Rtaonal Geometry 就知道了。

我們知道，由上面五類完善公理演譯出來的幾何學，是歐氏幾何學，現在要問：若是這五類公理換了幾個新的，與原來不同的，或與原來矛盾的公理，他們還能成爲一組完善的公理嗎？根據前述，這自然是可能的，只是新演出來的幾何學不是歐氏幾何學，也不是非歐幾何學了，現舉二例如下，譬如五類公理中，

(A) 要是把丁類平行公理換爲："通過已知直線外一點可作兩條直線與已知直線平行" 其餘公理不變，這仍舊是一組完善的公理，根據這一組公理演出來的幾何學叫做雙曲線幾何學 (Hyperbolic Geometry)，是俄國數學家羅波切夫斯基和何牙利數學家龐禮愛約翰 (Bolyai Tános) 兩人於1830年左右不約而同發明的。

(B) 要是把丁類平行公理換爲："通過已知直線外一點不能作一

直線與已知直線平行”，即在同一平面上的兩直線，至少有一點是公共的”其他四類改爲：“直線的長是有限的，即“由直線上任一點A，向着一端延長，要是繼續的，永久的延長就仍舊回到出發的A來”，好像球面上的大圓一樣。經過這樣變更後，所得的一組公理仍舊是完善的，由此演譯出來的幾何學稱爲橢圓幾何學，或黎曼幾何學。（以上節錄自陳藎民著非歐派幾何學——商務印書舘）

讀了上面有關幾何學結構的敍述，也許有人會問，歐幾里得那有那樣大的本領，能够寫出一大套不矛盾的公設，其實在歐氏前幾百年就有很多經驗的累積，歐氏是集大成的人，關於這一點，本集有關數學的本質與數學的創造諸文，有相當詳細的討論。（本段編者）

（二）數學的本質概說

⑴所謂數學

數學分爲三部門　雖然已往這三部門互有所爭，但到了今天僅所有敵意消失，且其關係可謂密切。其親密的結果，產生了很多同時屬於二、三部門的新的數學論題和科目。

數學的三部門：代數，幾何，分析，有不同的邏輯地位　幾何和代數是獨立的科目，各有自己公設的（Axiomatic）基礎，分析爲代數的推廣　分析與代數不同之處則是分析用了極限的觀念。極限就是一個數，有一羣數逐漸地向它逼近；

如數：$\frac{1}{2}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{7}{8}$，$\frac{15}{16}$，…………以 1 爲極限

算術在上述的分劃中是屬於那一部門呢？算術是代數的一部份，也可以說代數是算術的一般化。如果有人要討論像6-4，7-3，12-8，0.2-0.1 的形式，他可寫爲 a-b，以 a 表示第一個數，b 表第二個數，然後討論 a-b　從數字轉移到字母，意謂從算術轉換爲代數　於是，算術、代數及分析主要在處理數，不管這些數是 3 ，$\sqrt{2}$ 等特定的數，或是以 a ，b 及其他字母所代表的一羣數。

上述數學的區分僅就大體而論，仔細的觀察，我們可以發現算術、代數、幾何和分析在他們本身之中還有許多類別。

怎麼會有許多類的算術？難道 2 ＋ 2 不是經常等於 4 ？幾何又怎會有許多種？三角形三內角的和不是恒等於 180 度？要回答這些問題，雖然很費時間，但是有助於了解數學的本質、內容，及其功能。初等數學是眞理的直接反應，例如整數可以表示一羣牛的數量，分數可以一個人從收入中捐給教會或納稅的比例；直線乃是地周界或張直的繩子的理想化的產物；月的形狀提供球的觀念，這些以熟悉的物體及

實際的事實爲基礎所建立起來的數學，已廣泛而神奇地應用於自然的探討，工程上的計算及商業上的需要　在這種領域的數學，2 ＋ 2 恒等於 4 ，三角形三內角的和恒爲 180 度　在此階段，數學的觀念及運算認爲只是從自然界抽象化而得，同時數學家們，以明顯的物理事實爲基礎，用推理的方法，對自然作更多的了解，這些知識不是用簡單或明顯的物理方法（如測度及實驗）所能得到，無論怎樣，這些淺進的數學不會超出自然界的範圍

有幾件事情導致數學家突然的醒悟　例如印度人所引進的負數，產生一個小震動　雖然經過好幾百年時間的爭論，數學家們終於接受了負數的觀念，用負數來表示相反方向的距離　因爲自然界某種的負實性可以以負數來表示，所以負數能與數學家和平共存　無論怎樣，到了十九世紀中葉，數學家對負數仍不放心

數學家的一個共同癖好，就是一般化再一般化，使數學產生更驚人的成就　一個簡單而實際的例子，就是解 $x^2=z$ 或 $x^2-5x+6=0$ 這些方程式的根是正數和負數　然而數學家不以解決這些特定的問題爲滿足，因此他們考慮一般性的一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$；a,b,c, 表任意正、負數。我們暫時不去想像這一般性的方程式如何使數學家陷於麻煩之中，先去看 $x^2+2=0$（即 $x^2=-2$）的解是什麼？ 如同解 $x^2=2$ 一樣，數學家依樣畫葫蘆得 $x^2=-2$ 的解爲 $x=\sqrt{2}+$ 及 $x=-\sqrt{-2}$。他們造出一個怪物。$\sqrt{-2}$是什麼？按平方根的定義，$\sqrt{-2}$自乘該是一個－ 2 的數　但是數學家所知，正數或負類自乘皆爲E數。因此在他們那個時代的數學中，$\sqrt{-2}$不存在　求 $x^2-6x+11=0$ 解時，情況更糟，以解 $x^2-5x+6=0$ 的同樣步驟，我們得"數" $3+\sqrt{-2}$與 $3-\sqrt{-2}$。這些"數"對他們來講，更沒有意義。

當時的數學家對於這些奇怪的數，感到困惑，不知怎麼辦，唯一的解決方法是不予以理會。他們稱這些數爲虛數（現則稱爲複數）；

不予以理會並不是解決的方法，只是一種逃避，因此他們在良心上經常感到不安。但是他們認爲良心上的不安要比無理地去接受虛數要好得多。

這種逃避一直拖了很久，迫使數學家採取行動的是非歐幾何。非歐幾何發展的經過在本書 Kline 有關幾何的文章可以找得到。不過我們在此提一提其他有關非歐幾何的歷史——在 Kline 文章裏沒有談到，但對於整個數學的觀念，非常重要。歐幾里得幾何有一公設：在平面上，有一且僅有一直線通過已知點與已知線不相交。直到 1800 年沒人懷疑這公設在物理上眞實性，但是有少數人反對引進此一事實作爲公設，因爲此一公設本身並不很明顯爲人接受，尤其是依照，歐幾里得的字眼去敍述。爲了避免引進此一公設，有幾個人很巧妙地尋求一個補救的方法；較著名的有 Gitolamo Saccheti 。他先假設歐幾里得公設是錯的，那與這個公設相反的一定是對的，也卽；第一，過已知點不只有一直線與已知線不相交，第二，是過已知點無任何直線與已知線不相交。然後以第一個來代替歐幾里得的公設，再與剩下其他歐幾里得公設一起導出定理，看看這些定理有什麼矛盾之處。假如有矛盾，他就可以斷定第一個代替的公設是錯的。然後以同樣方法處理第二個假如得到同樣的結果。我們可以結論：與歐幾里得公設相反的兩個假設都錯，那麼歐幾里得公設一定是對的。

很不幸的，這兩種處理的方法（卽以第一及第二個公設來代替歐幾里得公設）都沒有得到矛盾，由這兩個代替公設所導出來的定理是一套新的幾何學。並且，以測量方法爲準繩，這一套新的幾何學也同樣地適用於自然界，其精確度並不比歐氏幾何差。這種新幾何發展到現在所謂非歐幾何學。高斯（Gauss）在這方面有很大貢獻。

於是數學家要面對一個問題：歐氏幾何和非歐氏幾何，在自然界裏，到底那一個爲眞？當然彼此在根本上不同的幾何學不能同時爲眞

。其實，很難找到一個眞正的標準來決定他們的眞僞。漸漸地數學家領會到：幾何學的眞僞並不重要，也卽沒有必要去相信那一種幾何是眞的。

倘如歐幾里得幾何學——數學的一個基本分支——不一定是眞的，那麼數學家就應重新考慮他們對數學本質的認識，也就是說，他們以前誤解數學的本質。他們以爲數學就是以自然界明顯的眞理作爲出發點，用推理的方法，在自然界裏導出更深一層眞理。但是自從非歐幾何顯示它的重要性以後，數學家可以意會到：他們過去只不過是膚淺地選擇自然界似乎爲眞的事實，幸運地導出有用的結果。但是從非歐幾何一包含與歐氏幾何相反的公設一也能導出有用的結果。

從上述我們知道，數學可以與眞理無關，也不必要符合眞理。數學是人造的、人爲的。基本的公設，以及由此導出來的定理都不是與宇宙俱來。數學家只好承認：兩千年來，他們的確誤解了數學的本質。

自從改變對數學觀念以後，數學家尋找補救的方法，不再以不理會或逃避方法去處理數學。普通的代數與幾何既然有用，而他們是人設想出來的，那麼其他人造物或許也會一樣有用。因此，接受了虛數，不必因爲它與眞理不合而不予理會。虛數起源於一個健全的數學主題，卽一元二次方程式的解。如果對虛數再作進一步的研究，虛數的重要性就顯示出來。現在，虛數（複數）在分析上已成爲一個重要科目。

數學體驗了一種新生的自由，不必再受從實質世界抽象所得的觀念所束縛，有自由去開拓人類的心智及創見。在十九世紀末，近代的一位大數學家 Geoog Cantoo 說："數學的本質在於自由"。然而同時代的數學家 Felix klein警告人們，自由但必負責，對數學的目的要負責。

數學家是否充份負起責任，我們這裏不予討論。切題的是，上一世紀許多數學家創出許多新的形式的數，這些數的性質與我們熟悉的數系相比顯得奇異。在本書 Davis“數”的文章裏，談到好幾個新形式的數和它們的性質。當然我們所熟悉的整數的性質繼續爲數學家所感興趣；本書 Herwitz 關於“數論”的文章說明了一些理由。

正如普通代數是普通數的處理法之推廣，新的代數（即新數的處理法之推廣）也應運而生。許多代數的存在進而導至研究代數諸類（Classes of algebra）的結構及性質。某些最近發展出的代數以及代數的類的近代觀念，如羣、體，都在本書 Sawyer“代數”的文章中說明了。

幾何在上一世紀也擴張得相當厲害。除了引言裡已提過的非歐幾何，更創定許多新的和更一般化的非歐幾何——黎曼幾何（Riemanian geometry）和非黎曼幾何（Non—Riemanian geometry）。數學家毫不畏懼地投身到 n 一維空間，也研究更複雜的曲線，曲面，高維空間圖形。本世紀內（可以這麼說）又引進另一支稱拓樸（Topology）的幾何學。本書 Kline 關於“幾何學”的文章對於幾何歷史上的主要發展作一通覽。有幾篇其他的文章解釋許多特殊幾何學的性質。Kline 的第二篇文章討論射影幾何學的性質與其和歐氏幾何的關係。Le Corbeillier 的文章裡討論黎曼幾何，Tucker 和 Bailey提供拓樸的觀念。還有兩篇文章各討論一個拓樸專題：一篇是從十八世紀最偉大的數學家 Euler 的文章中選出，另一篇是由 Shinbort 執筆。

在以前處於配角地位的統計學和機率論，本世紀不僅有高度的發展，且比其他支數學更被廣泛地應用於各部門。Kac 和 Weaver 解釋了這兩種的數學，並談到許多的用途。

不是所有數學內容在這第一册都可找得到。例如，第二册 Ulam

的關於電子計算機的文章含有數的理論及組合分析 (Combinational analysis) 的工作成果。關於分析這一部門所指出的，是代數的推廣。微積分是分析的主要論題，建立在許多新的技巧和如極限等新觀念上，本集選用了 Tom M. Apostol 有關微積分發展史的一篇文章。除微積分之外，還有許多不同的論題，如常微分方程、偏微分方程、微分幾何、變分學和複變函數等。這些都利用到微積分，但他們的內容是各自不相關的。分析是數學三大部門之一，它的觀念，技巧對自然界的探討最爲重要。

(2)數學發展的中心問題

在前面，我們用歐氏幾何學的結構來作爲數學理論的例子，我們看到歐氏幾何學是應用基本概念寫出一組不相矛盾的，各自獨立的公設，根據這組公設，用論理學的方法，演出一串命題的學問。

"歐氏幾何原本"是留下來的第一本數學書籍，它激起了後人對數學的探討！它是智識上的成功，但在教學方面却是一種不幸。的確，我們從這本書得到了數字證明的概念，數學知識的邏輯結構，與其他極有價值的資料。但很多知識界的人士，誤解了它眞正的含意，因而造成了一種狹窄的數學觀念。他們以爲數學純粹是一種邏輯的推演，先敍述一些公設及定義，然後再循演繹的法則，證明出其他由定義所描出的觀念。

可是，歐幾里得沒有把在他之前的三百年裏，數學家所做的事情，包含在他的著作裡（其時大約在紀元前三百年）。在他能給幾何定出一個演譯法則之前，其他的數學家，一定已經費了幾十年，甚至幾百年的時間，來建造所需之材料，此乃法則之所產生，但創造這些所需的材料，却並不依邏輯的法則，由一些公設或已得到的結果推演出來，事實上，建造的過程，只是一連串的摸索，錯誤，臆度及假設；利用想像，預測、試驗來抵住一些主要觀念，使臆度成形，當然這是

需要毅力與耐心，還要靠機會及運氣的事。

不可否認的，某種合理的想法，的確是可以用來摒棄某一推測或處理的路線，或將思路引導至一有希望的方向；但就整體而言，數學的創造，就如著名的物理學家 P. W. Bridgman 所說，乃是人類心智不受拘束，盡其所能的活動，並設有一定合理的指針告訴心理應如何去想。從許多數學家解決問題失敗了，而有人却成功了的事實，顯示出是心力的功夫，而非最後系統化的推論，促進了創造。創造活動才是數學的核心，數學家是在創造工作中，作出非常的貢獻，使數學向前邁進。如果沒有新觀念，新研究方向，新目標的建立，數學將變成只時對老的證明的重新排列及嚴格化，而失去其活性。使已得到的材料邏輯化，通常是需要智慧的，但就整體而言，它就像一本書的內容作一重新安排而已，而眞正的創造活動，則有如寫作一本新書。甚至於數學所給予的各種滿足，如探索的興奮，現時的激動，成功的感覺，都是在創造時比最後整理成演繹形式時要多些，強些。

我們再看數的發展，其情形也一樣，從紀元前3000年到紀元1900年，經過了那麼多年，數學家們逐漸的得出了各種數及其運算方法，他們對各種數的性質，可說已有充分的了解。但直到十九世紀的末期，爲了某些理由，數學家們才決定給複數系統做個邏輯分析。因此，他們便尋求一些公設，從這些公設以推出已經知道的各類數的性質。可是在得到數系的新知識，或確保數系之具有某種性質方面，此一邏輯結構是多餘的。

很久以前，數學家就已了解到直覺的信念起於邏輯，大數學家總有辦法體認到這一點，迪卡兒（Descartes）堅信，邏輯只是用來傳遞我們已經知道的東西而已。數學家 Henri Lebesque 則說，邏輯能使我們拒絕某種論斷，但不能使我們相信某種論斷，Jacques Hadamard 也說，邏輯只是用來使直觀的收獲合理化。在一個定理的

邏輯證明尚未建立之前，大數學家早已知道這定理是眞實的，數學的推動，主要是靠一些具備很強直觀的人，而不是那些只會做嚴格證明者。

近來我們已逐漸能了解到邏輯用途的有限，我們將在本書後面當今數學最深奧結果之一的Godel定理，得知數學不應爲邏輯所束縛。

然而，所有已經建立出來的數學，畢竟都需要寫成像歐幾何學那樣的推演形式。這個道理，應從數學發展的歷史去了解。

原來在數學史之每一時期，數學家幾乎都要碰到很多的危機，這些危機，乃是由數學建造的方法所引起的。

今日的數學構造，可大概比喻爲一座摩天大樓。當數學家們開始建造大樓時，他們並沒有往下挖掘而奠下穩固的地基，他們是直接從地面開始建造的，當時因爲沒有人想到它會造得這麼高，而且地球本身似乎已夠堅固的基礎，所以大家都認爲是合理的，同時他們用來建造的素材，即數和幾何圖形的事實，在當時的經驗，似乎是很堅固的基石，這種數學的歷史起源，仍表現在我們繼續使用的"幾何"一辭，它的意思是指土地測量（見前章）。

可是當這大樓剛從地面升起，顯然地就已經搖搖幌幌，任意加高一點，就可能危及其安全。紀元前六百年至紀元前三百年之間，希臘人不僅已發現了這危險，並給了必要的強化。他們首先選出堅定的地帶以供築牆，此即自然界之自明眞理，其次、放些鋼筋到架子裡，這就是在此大樓內每加入一物之演繹證明。

迄此，數學在希臘時代的發展，其主要結構的歐氏幾何，被證明爲平穩的。

但有，缺點被揭發了，此即某些線段，像股長爲一單位長之等腰直角三角形，其弦長爲$\sqrt{2}$單位，由於當時希臘人所知之數只有正有理數，他們不能接受像$\sqrt{2}$這樣的東西爲數，因此他們便排斥了這些

無理數，同時放棄了任一線段有一長度的想法。

然而、歷史的演進，強迫對此一決定給予重新考慮。

首先，大約在公元600年時，印度人介紹了負數，然後是阿伯人，他們不像希臘人之挑三揀四，接受了無理數，而且發展出無理數的運算法則。

到了文藝復興時期，科學繁榮滋長，新科學且被用到工藝學上，而這種應用必須提供有數量的答案。當時的歐州人，繼承了希臘、印度，及阿拉伯人的數學遺產，沒有邏輯顧忌的隨意加以運用，並獲得了成就。雖然他們將算術和代數的擴展加到數學的大樓時，是以直觀和自然現象爲支柱，但這擴大的結構，却堅固地容納着這些觀念，於是對負數的敵意也就消解了。

因成功而有點飄飄然的，數學家們進入了微積分，微分方程，微分幾何，變分學和別支的分析。在這時期，一直是以直觀和物理的論證來支持這些新加入的東西。

可是，直觀到底支持不住置於其上的重擔，牆壁開始出現了裂縫。這些缺點的特性，記載於本書 Hahn 的一篇文章中。幸好，經過 Bernard Bolzano, Augustin Louis Gauchy, 和 Karl weierstrass 諸人的工作，上層建築被重建了，這在數學史上稱爲分析之嚴密化。

與此上層建築被加強之同時，下面的地基，即希臘人所選擇的公設，似乎也應加以檢討，結果創出了非歐幾何學。數學家們發現將歐氏幾何中之平行公設代以其否定形式，便得出一種新的幾何，於是平行公設與其否定形式均可成爲不同數學結構的公設，那麽公設應是自然界之自明眞理的想法，就需要修改了。

更增加麻煩的，是 William R. Hamilton 在尋找一表示空間向量的代數時，敍述了一種所謂的四元素。在此之前，每一數學家都誓守、法則；即對於任何種數之a及b，a∘b=b∘a爲眞。可是四元素却