●研究生用书●

SEMIMARTINGALE'S SEQUENCES: THEORY AND ITS APPLICATIONS

华中理工大学出版社

胡必锦

半鞅序列理论及应用

半鞅序列理论及应用

胡必锦

华中理工大学出版社

(鄂)新登字第 10 号

图书在版编目(CIP)数据
半鞅序列理论及应用 / 胡必锦 著
武汉:华中理工大学出版社，1997 年 3 月
ISBN 7-5609-1502-7
Ⅰ. 半…
Ⅱ. 胡…
Ⅲ. 概率论-半鞅序列-研究
Ⅳ. O211

·研究生用书·
半鞅序列理论及应用
胡必锦 著
责任编辑：李立鹏
*
华中理工大学出版社出版发行
(武昌喻家山 邮编:430074)
新华书店湖北发行所经销
华中理工大学出版社照排室排版
华中理工大学出版社沔阳印刷厂印刷
*
开本:850×1168 1/32 印张:12.25 插页:2 字数:302 000
1997 年 3 月第 1 版 1997 年 3 月第 1 次印刷
印数:1—2 000
ISBN 7-5609-1502-7/O·166
定价: 15.00 元

作者简介

胡必锦，生于 1940 年 5 月。1964 年毕业于武汉大学数学系。1967 年于武汉大学数学系研究生毕业。1985～1986 年在美国德州大学雅林顿分校当访问学者，1984 年晋升为副教授。1989 年晋升为教授。目前从事统计反演方面的研究工作。

内容简介

本书介绍半鞅序列的基本理论兼某些经典的应用课题，如最优停时、假设检验等. 全书共分七章，前三章为基础知识，第四章介绍半鞅序列的基本概念和基础理论. 第五、六两章介绍应用专题. 最后为方便读者附录 Markov 链.

本书的材料选择按照循序渐进、不避重就轻的原则，自成体系. 凡较重要的概念和结论均有较详尽的陈述. 对于那些具有大学本科三年数学基础的读者无须额外查询资料便可顺利地阅读. 该书既可作为数学专业的研究生相关内容的教学参考材料，也适宜于大学高年级学生自学.

Abstract of the text

In the course, the fundamental theory of semimartingale's sequences and its applications, such as optimal stopping time and testing hypothesis et., are introduced. The course is divided into seven chapters. The primary knowledge is described in first three chapters. Fundamental concepts and conclusions of semimartingales are set into fourth chapter of the course. Topics considered as applications of semimartingales are introduced in fiveth-sixth chapter. Finally, Markovian train is set in the appendix of the course in order to make reading the course convenient.

Materials of the course are chosen and edited in accordance with principle of order and advance step by step, and form a complete system. Important concepts and conclusions are detailed in the course. Readers with three-year mathematical foundation can read the course without any difficult. The course may be considered as a book of teaching reference and self-learned materials for the graduate students.

“研究生用书”总序

研究生教材建设是提高研究生教学质量的重要环节，是具有战略性的基本建设。各门课程必须有高质量的教材，才能使学生通过学习掌握各门学科的坚实的基础理论和系统的专门知识，为从事科学研究工作或独立担负专门技术工作打下良好的基础。

我校各专业自 1978 年招收研究生以来，组织了一批学术水平较高，教学经验丰富的教师，先后编写了公共课、学位课所需的多种教材和教学用书。有的教材和教学用书已正式出版发行，更多则采用讲义的形式逐年印发。这些讲义经过任课教师多年教学实践，不断修改、补充、完善，已达到出书的要求。因此，我校决定出版“研究生用书”，以满足本校各专业研究生教学需要，并与校外单位交流，征求有关专家学者和读者的意见，以促进我校研究生教材建设工作，提高教学质量。

“研究生用书”以公共课和若干门学位课教材为主，还有教学参考书和学术专著，涉及的面较广，数量较多，准备在今后数年内分批出版。编写“研究生用书”总的要求是从研究生的教学需要出发，根据各门课程在教学过程中的地位和作用，在内容上求新、求深、求精，每本教材均应包括本门课程的基本内容，使学生能掌握必需的基础理论和专门知识；学位课教材还应接触该学科的发展前沿，反映国内外的最新研究成果，以适应目前科学技术知识更新很快的形势；学术专著则应充分反映作者的科

研硕果和学术水平，阐述自己的学术见解。在结构和阐述方法上，应条理清楚，论证严谨，文字简炼，符合人们的认识规律。总之，要力求使“研究生用书”具有科学性、系统性和先进性。

我们的主观愿望虽然希望“研究生用书”的质量尽可能高一些，但由于研究生的培养工作为时尚短，水平和经验都不够，其中缺点、错误在所难免，尚望校内外专家学者及读者不吝指教，我们将非常感谢。

华中理工大学研究生院院长

陳 珽 黄樹槐

1989.11.

写在 1995 年

在今天，国家之间的竞争是国家综合实力的竞争，国家综合实力的竞争关键是经济实力的竞争，而经济实力的竞争关键又在于科技（特别是高科技）的竞争，科技（特别是高科技）的竞争归根结底是人才（特别是高层次人才）的竞争，而人才（特别是高层次人才）的竞争基础又在于教育。“百年大计，教育为本；国家兴亡，人才为基。”十六个字、四句话，确是极其深刻的论断。

显然，作为高层次人才培养的研究生教育就在一个国家的方方面面的工作中，占有十分重要的战略地位。可以说，没有研究生教育，就没有伟威雄壮的科技局面，就没有国家的强大实力，就没有国家在国际上的位置，就会挨打，就会受压，就会被淘汰。

“工欲善其事，必先利其器。”教学用书是教学的重要基本工具与条件。这是所有从事教育的专家所熟知的事实。所以，正如许多专家所知，也正是原来的《“研究生用书”总序》中所指出，研究生教材建设是保证与提高研究生教学质量的重要环节，是一项具有战略性的基本建设。没有研究生的质量，就没有研究生教育的一切。

我校从 1978 年招收研究生以来，即着力从事于研究生教材与教学用书的建设。积十多年建设与实践的经验，我校从 1989 年起，正式分批出版“研究生用书”。第一任

研究生院院长陈珽教授就为之写了《"研究生用书"总序》，表达了我校编写这套用书的指导思想与具体要求，"要力求'研究生用书'具备科学性、系统性、先进性"。第二任研究生院长，也就是当时我校的校长黄树槐教授完全赞同这一指导思想与具体要求，从多方面对这套用书加以关心与支持。

我是十分支持出版"研究生用书"的。早在1988年我在为列入这套书中的第一本，即《机械工程测试·信息·信号分析》写"代序"时就提出：一个研究生应该博览群书，博采百家，思路开阔，有所创见。但这不等于他在一切方面均能如此，有所不为才能有所为。如果一个研究生的主要兴趣与工作不在"这一特定方面"，他也可以选择一本有关的书作为了解与学习这方面专业知识的参考；如果一个研究生的主要兴趣在"这一特定方面"，他更应选择一本有关的书作为主要学习用书，寻觅主要学习线索，并缘此展开，博览群书。这就是我赞成为研究生编写系列教学用书的原因。

目前，这套用书已出版了6批共30种，初步形成规模，逐渐为更多读者所认可。在已出版的书中，有8种分获国家级、部省级图书奖，有13种一再重印，久销不衰，有的印刷总数已近万册。采用此套书的一些兄弟院校教师纷纷来信，赞誉此书为研究生培养与学科建设作出了贡献，解决了他们的"燃眉之急"。我们感谢这些赞誉与鼓励，并将这些作为对我们的鞭策与鼓励，"衷心藏之，何日忘之?!"

现在，正是江南初春，"最是一年春好处"。华工园内，

红梅怒放，迎春盛开，柳枝抽绿，梧叶含苞，松柏青翠，樟桂换新，如同我们的国家正在迅猛发展，欣欣向荣一样，一派盎然生机。尽管春天还有乍寒时候，我们国家在前进中还有种种困难与险阻，有的还很严峻，但是，潮流是不可阻挡的，春意会越来越浓，国家发展会越来越好。我们教师所编的、所著的、所编著的这套教学用书，也会在解决前进中的种种问题中继续发展。然而，我们十分明白，这套书尽管饱含了我们教师的辛勤的长期的教学与科研工作的劳动结晶，作为教学用书百花园中的一丛鲜花正在怒放，然而总会有这种或那种的不妥、错误与不足，我衷心希望在这美好的春日，广大的专家与读者，不吝拨冗相助，对这套教学用书提出批评建议，予以指教启迪，为这丛鲜花除害灭病，抗风防寒，以进一步提高质量，提高水平，更上一层楼，我们不胜感激。我们深知，“一个篱笆三个桩”，没有专家的指导与支持，没有读者的关心与帮助，也就没有这套教学用书的今天。

诗云：“嘤其鸣矣，求其友声。”这是我们的心声。

中国科学院院士
华中理工大学校长
兼研究生院院长

杨叔子
于华工园内
1995 年 3 月 7 日

前　　言

随机序列在概率论中是一类特别重要的特殊随机过程，比如：随机游动、Markov 链、半鞅序列等.本书将以半鞅序列及停时理论为主要讨论对象，作为一本普及性的参考书，考虑到在校生及自学者等不同层面的需要，我们在选材上侧重介绍系统的理论基础及某些实用性专题.如果读者具备本科大学三年级的基础知识，则不必依靠其它参考资料便可顺利地阅读.

本书分七章，前四章及最后的附录为本书的基础部分.第五章介绍最优停时理论（周金海、刘丁酉参与这章的编写工作）.第六章介绍假设检验的基本知识，侧重讨论鞅与停时理论在这个专题研究中的应用.每一章除它们之间的联系外还具有一定的独立性和完整性.最后列出了一些参考文献.

本书在编写过程中得到华中理工大学研究生院的资助以及华中理工大学出版社的支持，武大数学系胡迪鹤教授对本书提出了许多宝贵的修改意见.在此，一并表示感谢.本书内容涉及面较广，限于作者的水平，错漏难免，敬请专家、读者批评指正.

作者

1996.6.

目　　录

第一章 一般测度

§1.1 集 类

设 Ω 为某个基本事件空间. $\varnothing$表示空集.

定义 1.1.1(半环) 设 $\mathscr{A}$ 为 Ω 上的一个子集类. 若

(i) $\varnothing\in\mathscr{A}$; (ii) $A,B\in\mathscr{A}\Rightarrow A\cap B\in\mathscr{A}$;

(iii) $A,B\in\mathscr{A}$, 且 $B\subset A\Rightarrow\exists\ C_i\in\mathscr{A}$, $C_i\cap C_j=\varnothing(i\neq j)$及某整数 $n\geqslant1$, 使 $A\setminus B=\bigcup_{i=1}^{n}C_i$,

则称 $\mathscr{A}$ 为 Ω 上的半环.

引理 1.1.1 设 $\mathscr{A}$ 为 Ω 上的半环,$E_i\in\mathscr{A}(i\geqslant1)$,则$\bigcup_i E_i=\bigcup_k C_k$,其中 $C_k\in\mathscr{A}$, $C_i\cap C_k=\varnothing(i\neq k)$.

证 令 $\widetilde{E}_1=E_1$, $\widetilde{E}_m=E_m\setminus\bigcup_{i=1}^{m-1}\widetilde{E}_i(m\geqslant2)$,则

$$\bigcup_i E_i=\bigcup_i\widetilde{E}_i,\quad \widetilde{E}_i\cap\widetilde{E}_j=\varnothing(i\neq j).$$

因此,命题等价于:对$\forall\ E\in\mathscr{A}$, $m\geqslant1$,有

$$E\setminus\bigcup_{i=1}^{m}E_i=\bigcup_{l=1}^{m^*}C_l,\tag{1.1-1}$$

其中 $C_l\in\mathscr{A}$, $C_l\cap C_k=\varnothing(l\neq k)$,$m^*\geqslant1$.

当 $m=1$ 时,$E\setminus E_1=E\setminus E\cap E_1$. 按半环条件(ii)和(iii),(1.1-1)式成立. 现假定(1.1-1)式对 $m\geqslant1$ 真,则

$$E\setminus\bigcup_{i=1}^{m+1}E_i=E\setminus E_{m+1}\setminus\bigcup_{i=1}^{m}E_i=(\bigcup_{k=1}^{n}\widetilde{C}_k)\setminus\bigcup_{i=1}^{m}E_i=\bigcup_{k=1}^{n}(\widetilde{C}_k\setminus\bigcup_{i=1}^{m}E_i).$$

按假定,对给定的 $m\geqslant1$,有

$$\widetilde{C}_k\setminus\bigcup_{i=1}^{m}E_i=\bigcup_{l=1}^{m_k}C_l^{(k)}=\bigcup_{l=1}^{m^*}C_l^{(k)}.$$

其中 $$m^*=\max_{1\leqslant k\leqslant n}\{m_k\},\ C_l^{(k)}=\varnothing(l>m_k).$$
令 $C_l=C_r^{(k)}$，其中 $l=(k-1)m^*+r(1\leqslant k\leqslant n,\ 1\leqslant r<m^*)$，则
$$E\setminus\bigcup_{i=1}^{m+1}E_i=\bigcup_{l=1}^{(m+1)^*}C_l,\quad \text{其中}(m+1)^*=n\cdot m^*.$$
定义 1.1.2（环和代数） 设 $\mathscr{A}$ 为 Ω 上的一个子集类. 若

(i) $\mathscr{A}$ 非空，

(ii) $A,B\in\mathscr{A}\Rightarrow A\cup B\in\mathscr{A},\ A\setminus B\in\mathscr{A}$.

则称 $\mathscr{A}$ 为 Ω 上的**环**.

若 $\mathscr{A}$ 为 Ω 上的环，且 $\Omega\in\mathscr{A}$，则称 $\mathscr{A}$ 为 Ω 上的**代数**.

注 1 有时称含 Ω 的半环为**半代数**.

注 2 环 $\mathscr{A}$ 中的条件(ii)等价于如下条件：

(ii)′ $A,B\in\mathscr{A}\Rightarrow A\cap B\in\mathscr{A},\ A\triangle B\in\mathscr{A}$（“$\triangle$”表示对称差）.

定义 1.1.3（单调类） 设 $\mathscr{A}$ 为 Ω 上的非空子集类. 若 $(A_k,k\geqslant1)$ 为 $\mathscr{A}$ 中的单调子列，且 $A=\lim\limits_{n\to\infty}A_n\in\mathscr{A}$，则称 $\mathscr{A}$ 为 Ω 上的**单调类**.

定义 1.1.4（π-类，λ-类） 设 $\mathscr{A}$ 为 Ω 上的非空子集类. 若 $A,B\in\mathscr{A}\Rightarrow A\cap B\in\mathscr{A}$，则称 $\mathscr{A}$ 为 Ω 上的 **π-类**. 若(i) $\Omega\in\mathscr{A}$；(ii) $A\in\mathscr{A}\Rightarrow A^c\in\mathscr{A}$；(iii) $(A_n,n\geqslant1)\in\mathscr{A}$，且 $A_n\cap A_m=\varnothing(n\neq m)\Rightarrow\bigcup\limits_n A_n\in\mathscr{A}$. 则称 $\mathscr{A}$ 为 Ω 上的 **λ-类**.

定义 1.1.5 设 $\mathscr{A}_0$ 为 Ω 上的非空子集类. β 表示某种特性. 记
$$\beta(\mathscr{A}_0)=\inf\{\mathscr{A}:\mathscr{A}_0\subset\mathscr{A},\ \mathscr{A}\ \text{具有性质}\ \beta\},$$
则称 $\beta(\mathscr{A}_0)$ 为 Ω 上含 $\mathscr{A}_0$，且具有性质 β 的**最小集类**.

例如，$\pi(\mathscr{A}_0)$，$\lambda(\mathscr{A}_0)$，$m(\mathscr{A}_0)$，$r(\mathscr{A}_0)$，$\alpha(\mathscr{A}_0)$，$\sigma(\mathscr{A}_0)$ 分别表示含 $\mathscr{A}_0$ 的最小 π-类，λ-类，单调类，环，代数，σ-代数.

引理 1.1.2 设 $\mathscr{A}$ 为 Ω 上的子集类.

(i) 若 $\mathscr{A}$ 为代数，则 $\mathscr{A}$ 为 σ-代数的充要条件是
$$\mathscr{A}=m(\mathscr{A}).$$

(ii) 若 $\mathscr{A}=\pi(\mathscr{A})$，则 $\lambda(\mathscr{A})=\sigma(\mathscr{A})$.

证 结论(i)之证留给读者. 下证结论(ii).

假如 $\lambda(\mathscr{A})$ 为 σ-代数，则 $\sigma(\mathscr{A})\subset\lambda(\mathscr{A})$，但 $\sigma(\mathscr{A})$ 为含 $\mathscr{A}$ 的 λ-类. 因此，$\lambda(\mathscr{A})\subset\sigma(\mathscr{A})$，故 $\lambda(\mathscr{A})\subset\sigma(\mathscr{A})$. 剩下的问题是证明：$\lambda(\mathscr{A})$ 为 σ-代数. 令

$$\mathscr{G}_A=\{B:A\cap B\in\lambda(\mathscr{A})\},$$

则对 $\forall A\in\lambda(\mathscr{A})$，$\mathscr{G}_A$ 为 λ-类. 事实上，由 $A\cap\Omega=A$ 可知：$\Omega\in\mathscr{G}_A$. 若 $B\in\mathscr{G}_A$，则 $A\cap B^c=(A^c\cup A\cap B)^c\in\lambda(\mathscr{A})$. 从而，$B^c\in\mathscr{G}_A$. 假如，$(B_n,\ n\geqslant1)\subset\mathscr{G}_A$，且 $B_n\uparrow B$，则

$$(A\cap B_n,\ n\geqslant1)\subset\lambda(\mathscr{A}),\ \text{且}\ A\cap B_n\uparrow A\cap B.$$

于是，$A\cap B\in\lambda(\mathscr{A})\Rightarrow B=\lim\limits_{n\to\infty}B_n\in\mathscr{G}_A$. 按定义 1.1.5，$\mathscr{G}_A$ 为 λ-类.

显然，$\mathscr{A}\subset\mathscr{G}_A(\forall A\in\mathscr{A})$，$\lambda(\mathscr{A})\subset\mathscr{G}_A(\forall A\in\lambda(\mathscr{A}))$. 从而，$\mathscr{A}\subset\mathscr{G}_A$，$\lambda(\mathscr{A})\subset\mathscr{G}_A(\forall A\in\lambda(\mathscr{A}))$. 于是，若 $A,B\in\lambda(\mathscr{A})$，则 $A\in\mathscr{G}_B\Rightarrow A\cap B\in\lambda(\mathscr{A})$，即 $\lambda(\mathscr{A})$ 为 π-类. 易证：既为 λ-类又为 π-类的集类必为 σ-代数，故 $\lambda(\mathscr{A})$ 为 σ-代数.

定理 1.1.1(Dykinπ-λ 定理) 设 $\mathscr{P}$ 为 π-类，$\mathscr{L}$ 为 λ-类，且 $\mathscr{P}\subset\mathscr{L}$，则 $\sigma(\mathscr{P})\subset\mathscr{L}$.

证 按引理 1.1.2(ii)，$\sigma(\mathscr{P})=\lambda(\mathscr{P})\subset\mathscr{L}$.

在定义 1.1.5 中，$\sigma(\mathscr{A})$ 表示含 $\mathscr{A}$ 的最小 σ-代数. 假如 $\mathscr{A}$ 是由有限个元素构成的集类，则易证：$\sigma(\mathscr{A})$ 可以通过有限次集论运算(补、可数并(交)等)构造出来. 然而，对一般的子集类 $\mathscr{A}$，则不一定能通过有限次集论运算构作出 $\sigma(\mathscr{A})$. 下面讨论一个反例.

设 $\mathscr{H}$ 为 Ω 上的某个集类. 记

$$\mathscr{H}^*=\{A:A\ \text{由}\ \mathscr{H}\ \text{中的元素通过有限次集论运算产生的结果}\}.$$

令 $\mathscr{A}_1=\mathscr{H}$，$\mathscr{A}_k=\mathscr{A}_{k-1}^*(k\geqslant2)$，则 $\mathscr{A}_n\subset\sigma(\mathscr{H})(\forall n\geqslant1)$. 但一般没有 $\bigcup\limits_n\mathscr{A}_n=\sigma(\mathscr{H})$. 下列命题将证明这一点.

命题 1.1.1 设 $\Omega=(0,1]$，