440

2003 年全国硕士研究生入学考试

数学考试参考书

（数学一和数学二适用）

教育部考试中心

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

2003年全国硕士研究生入学考试数学考试参考书:数学(一)和数学(二)适用/教育部考试中心. —北京:高等教育出版社,2002.8

ISBN 7-04-011299-X

Ⅰ.2… Ⅱ.数… Ⅲ.数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.01

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第050120号

责任编辑 胡乃网　**封面设计** 王凌波　**责任绘图** 尹　莉
版式设计 史新薇　**责任校对** 殷　然　**责任印制** 张小强

2003年全国硕士研究生入学考试数学考试参考书(数学一和数学二适用)
教育部考试中心

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市东城区沙滩后街55号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100009	网　　址	http://www.hep.edu.cn
传　　真	010-64014048		http://www.hep.com.cn

经　　销　新华书店北京发行所
印　　刷　北京市鑫鑫印刷厂

开　　本	787×1092　1/16	版　　次	2002　年8月第1版
印　　张	27	印　　次	2002　年9月第2次印刷
字　　数	650 000	定　　价	42.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

前　　言

全国硕士研究生入学考试是国家选拔硕士研究生的主要途径，在教育类大规模、社会化全国统一考试项目中（不含博士生录用考试），就考试水准和层次来说，目前是我国最高水平的。我国招收硕士研究生是从1951年开始的，1955年教育部和高教部颁布了全国高等师范学校研究生选拔和考试办法，首次对如何组织命题队伍，如何组织评卷作出了明确规定，这标志着我国已开始正式实施研究生入学考试。1966年文化大革命开始，研究生招生考试暂停，1977年恢复。1980年是我国研究生教育具有里程碑意义的一年，政治理论课和外国语开始实行全国统一考试，“中华人民共和国学位条例”正式颁布，这标志着我国研究生教育进入规范化和制度化的新阶段。自1989年始，研究生入学考试由原国家教委考试中心（现教育部考试中心）统一组织命题，现已十三年了。目前，全国统一考试的科目有政治理论、外语（英语、日语和俄语），作为工科类和经济类专业基础课的数学，以及医学类专业基础课的中医综合科目和西医综合科目。

硕士研究生入学考试从测量学角度来说，它应是“常模参照”考试，即选拔性考试；命题工作需坚持既有利于为国家选拔高层次的专门人才，又有利于高等学校教学的原则，强调在考查知识的基础上重点考查考生的分析问题和解决实际问题的能力，并且要采用科学的办法，保持考试水平的稳定。

为了进一步总结命题工作的经验，同时也是为了让社会和考生进一步了解考试大纲的内容和要求，增加考试的透明度，消除考生对命题的神秘感，缓解考生在考试中的焦虑心理，以有利于考生正常发挥水平，继2001年出版《政治理论考试参考书》以后，今年我们又组织部分多年参加大纲制订和修订的专家编写了这套《数学考试参考书》。

《数学考试参考书》分数学一和数学二适用数学三和数学四适用两册出版，对考试内容和要求做进一步的展开，并通过一定量的试题对考试中的难点和重点予以阐释，力求体现研究生数学考试试题的特点。期望能够帮助考生掌握学习中的重点和难点，提高数学水平，在考试中取得好的成绩。

由于时间和经验不足，难免有疏漏和不足之处，恳请读者指正。

应书增

2002年6月

目　录

第一部分　高 等 数 学

第二部分　线 性 代 数

第三部分　概率论与数理统计

第一部分　高等数学

一、函数　极限　连续

“函数，极限，连续”这一部分的概念及运算，是高等数学的基础.

函数是高等数学研究的主要对象.事实上，全部微积分主要就是讨论各类函数的各种性质.极限不仅是一个主要的基本概念，而且它的思想和方法贯彻于微积分的始终.连续是一大类函数的重要特性，连续函数是微积分研究的重点.因此，通过复习，读者在这一部分要达到：

理解函数的概念，会进行函数记号的运算，并会建立简单应用问题中的函数关系式；了解函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性；理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念；掌握基本初等函数的性质及其图形.

理解极限的概念，理解函数左极限与右极限的概念，以及极限存在与左、右极限之间的关系；掌握极限的性质及四则运算法则；掌握极限存在的两个准则，并会利用它们求极限，掌握利用两个重要极限求极限的方法；理解无穷小、无穷大的概念，掌握无穷小的比较方法，会用等价无穷小求极限.

理解函数连续性的概念（含左连续与右连续）；会判断函数间断点的类型；了解连续函数性质和初等函数的连续性；了解闭区间上连续函数的性质（有界性、最大值和最小值定理、介值定理），并会应用这些性质.

·考试内容概要·

（一）函数

1. 定义　设 x 与 y 是两个变量，D 是实数集的某个子集，若对于 D 中的每个值 x，变量 y 按照一定的法则有一个确定的值 y 与之对应，称变量 y 为变量 x 的函数，记作

$$y=f(x)$$

数集 D 称为函数的定义域，由函数对应法则或实际问题的要求来确定.相应的函数值的全体称为函数的值域.对应法则与定义域是函数的两个要素.

2. 几种特性

1° 有界性　设函数 $y=f(x)$ 在数集 X 上有定义，若存在正数 M，使得对于每一个 $x\in X$，都有

$$|f(x)|\leqslant M$$

成立，称 $f(x)$ 在 X 上有界，否则，即这样的 M 不存在，称 $f(x)$ 在 X 上无界.

2° 单调性　设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义，若对于 I 上任意两点 x_1 与 x_2 且 $x_1<x_2$ 时，均有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2)（或\ f(x_1)\geqslant f(x_2)）$$

称函数 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加（或单调减少）.如果其中的“$\leqslant$”或“$\geqslant$”改为“$<$”（或“$>$”），称

函数 $f(x)$ 在 I 上严格单调增加(或严格单调减少).

3° 奇偶性　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $(-a,a)(a>0)$,若对于任一 $x\in(-a,a)$,都有 $f(-x)=f(x)$,称 $f(x)$ 为偶函数;若对于任一 $x\in(-a,a)$ 都有 $f(-x)=-f(x)$,称 $f(x)$ 为奇函数.

4° 周期性　对函数 $y=f(x)$,若存在常数 $T>0$,使得对于定义域的每一个 x,$x+T$ 仍在定义域内,且有

$$f(x+T)=f(x)$$

称函数 $y=f(x)$ 为周期函数,T 称为 $f(x)$ 的周期.

3. 复合函数、反函数、隐函数与分段函数

(1) 复合函数　设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f,函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 Z_φ,若集合 D_f 与 Z_φ 的交集非空,称函数 $y=f[\varphi(x)]$ 为函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数,u 为中间变量.对复合函数,重要的是会把它分解,即知道它是由哪些"简单"函数复合的.

(2) 反函数　设函数 $y=f(x)$ 的值域为 Z_f,定义域为 D_f,则对于每一个 $y\in Z_f$,必存在 $x\in D_f$ 使 $y=f(x)$. 若把 y 作为自变量,x 作为因变量,便得一个函数 $x=\varphi(y)$,且 $f[\varphi(y)]=y$,称 $x=\varphi(y)$ 为 $y=f(x)$ 的反函数.但习惯上把 $y=f(x)$ 反函数记作 $y=\varphi(x)$.

(3) 隐函数　设有方程 $F(x,y)=0$,若当 x 取某区间内的任一值时,总有满足该方程惟一的值 y 存在时,称方程 $F(x,y)=0$ 在上述区间内确定了一个隐函数 $y=y(x)$.

(4) 分段函数　若一个函数在其定义域的不同部分要用不同的式子表示对应规律,如 $f(x)=\begin{cases}\varphi(x), a<x<b\\ \psi(x), c<x<d\end{cases}$,称为分段函数.

(二) 极限

1. 概念

(1) 定义 1　设 $y=f(x)$ 在 x_0 的一个去心邻域 $(x_0-\delta_1,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta_1)$ 内有定义,若对于任意给定的 $\varepsilon>0$,总存在 $\delta>0$,使得当上述去心邻域内任意 x 满足 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,不等式 $|f(x)-a|<\varepsilon$ 恒成立,则称常数 a 为函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 的极限,记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$ 或 $f(x)\to a$(当 $x\to x_0$). 直观地说,即当 x 无限趋近 x_0 时,函数 $f(x)$ 无限趋近常数 a.

定义 2　设 $f(x)$ 在区域 $|x|>E>0$ 内有定义,若对于任意给定的 $\varepsilon>0$,存在 $M>0$,使得当 $|x|>M\geqslant E$ 时,不等式

$$|f(x)-a|<\varepsilon$$

恒成立,则称 a 为当 $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限,记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=a$$

直观地说,即当 $|x|$ 无限增大时,函数无限趋近常数 a.

(2) 左极限与右极限　在定义 1 中,若把"$0<|x-x_0|<\delta$"改为"$x_0-\delta<x<x_0$",即自变量 x 从 x_0 的左侧趋近于 x_0,则称 a 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的左极限,记作

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=a \quad 或 \quad f(x_0-0)=a$$

相应把定义 1 中的"$0<|x-x_0|<\delta$"改为"$x_0<x<x_0+\delta$",a 便是函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时

的右极限,记作

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = a \quad 或 \quad f(x_0 + 0) = a$$

极限存在的充要条件:当 $x \to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限存在的必要且充分条件为左、右极限存在并相等,即 $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$.

在定义 2 中,把 $|x| > M$ 改为 $x > M$,便得到 $x \to +\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限的定义,即 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$,以及把“$|x| > M$”改为 $x < -M$,便得到 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = a$ 的定义.

注　把数列 $\{x_n\}$ 看作整标函数即 $x_n = f(n)(n = 1,2,\cdots)$,则数列极限的概念 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ 便是 $f(x)$ 在 $x \to +\infty$ 的极限的特殊情况:自变量 x 取正整数.即对于任意给定的 $\varepsilon > 0$,总存在正整数 N,使当 $n > N$ 时,不等式 $|x_n - a| < \varepsilon$ 恒成立,则称常数 a 为数列 $\{x_n\}$ 的极限,也称此数列收敛于 a.

2. 性质

1° 惟一性　在自变量的一个变化过程中($x \to x_0$ 或 $x \to \infty$),若函数的极限存在,则此极限惟一.

2° 有界性　若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ ($\lim\limits_{x \to \infty} x_n = a$),则存在 x_0 的某去心邻域($|x| > M > 0$),$f(x)$ 在此邻域(区域 $|x| > M > 0$)内有界.

3° 保序性　设 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = a$, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} g(x) = b$,若 $a < b$,则存在 x_0 的某去心邻域($|x| > M > 0$),在此邻域(区域 $|x| > M > 0$),恒有 $f(x) < g(x)$;若在 x_0 的某去心邻域(区域 $|x| > M$)内恒有 $f(x) \leqslant g(x)$,则 $a \leqslant b$.

3. 极限存在准则

夹逼准则:若在 x_0 的某去心邻域(或区域 $|x| > M$)内,恒有

$$f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$$

且 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} h(x) = a$,则 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = a$.

单调有界准则:单调有界数列必收敛.

4. 两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

(2) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$ 或 $\lim\limits_{x \to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$

5. 极限的四则运算

设在自变量的同一个变化过程中 ($x \to x_0$ 或 $x \to \infty$), $\lim f(x) = a$, $\lim g(x) = b$,则有

(1) 和差:$\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = a \pm b$

(2) 积: $\lim[f(x)g(x)] = [\lim f(x)] \cdot [\lim g(x)] = a \cdot b$, 特别地 $\lim cf(x) = c \lim f(x) = ca$ (其中 c 为常数),$\lim[f(x)]^k = [\lim f(x)]^k = a^k$

(3) 商:又若 $\lim g(x) = b \neq 0$,则 $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \dfrac{a}{b}$

6. 无穷小与无穷大

(1) 无穷小的概念　若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\alpha(x)=0$,称 $\alpha(x)$ 为 $x\to x_0(x\to\infty)$ 时的无穷小,即极限为 0 的变量为无穷小.常数 0 也是无穷小.

(2) 无穷小性质　$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=a$ 的充要条件为 $f(x)=a\pm\alpha(x)$,其中 $\alpha(x)$ 为 $x\to x_0$ $(x\to\infty)$ 的无穷小.

(3) 无穷小的运算

1° 加法:有限多个无穷小的和仍为无穷小

2° 乘法:有限多个无穷小的积仍为无穷小

3° 有界变量与无穷小的乘积亦为无穷小

(4) 无穷小的比较

设 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 都是在同一个自变量变化过程中的无穷小,且 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ 也是在此变化过程中的极限:

若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$,称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 高阶的无穷小,记作 $\alpha(x)=o(\beta(x))$;

若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$,称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 低阶的无穷小;

若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c\neq 0$,称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是同阶的无穷小;

特别,若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$,称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等价无穷小,记作 $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

利用等价无穷小有时可以化简计算,所以应掌握几个常见的等价无穷小:当 $x\to 0$ 时

$$\sin x\sim x\sim\tan x$$

$$\ln(1+x)\sim x$$

$$e^x-1\sim x$$

$$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x$$

$$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2\text{ 等等}$$

(5) 无穷大的概念　若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=\infty$ 称 $f(x)$ 为 $x\to x_0(x\to\infty)$ 时的无穷大,即绝对值无限增大的变量为无穷大.

(6) 无穷小与无穷大之间的关系

在自变量的同一变化过程中,若 $f(x)$ 为无穷大,则其倒数 $\dfrac{1}{f(x)}$ 必为无穷小;反之,若 $f(x)$ 为无穷小,且 $f(x)\neq 0$,则其倒数 $\dfrac{1}{f(x)}$ 必为无穷大.

(三) 连续

1. 函数的连续性

(1) 连续性的概念　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义,若当自变量增量 $\Delta x=$

$x - x_0 \to 0$ 时，对应的函数增量 $\Delta y = f(x_0 + x) - f(x_0) \to 0$，即 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ 或 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续. 若 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$，称函数 $f(x)$ 在 x_0 处左连续，$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$，称函数 $f(x)$ 在 x_0 处右连续.

显然，函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续的充要条件是 $f(x)$ 在 x_0 处既左连续又右连续.

若函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内每一处都连续，称 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续，也称 $f(x)$ 是 (a,b) 内的连续函数；若 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，又在 a 点右连续，b 点左连续，则称 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续.

(2) 运算

1° 加法　有限多个在同一点处连续的函数之和，仍在该点处连续.

2° 乘法　有限多个在同一点处连续的函数之积，仍为该点处连续.

3° 除法　若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均在点 x_0 处连续，且 $g(x_0) \neq 0$，则 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 在点 x_0 处连续.

(3) 复合函数与初等函数的连续性

设函数 $u = \varphi(x)$ 在点 $x = x_0$ 处连续，且 $\varphi(x_0) = u_0$，若函数 $y = f(u)$ 在点 $u = u_0$ 处连续，则复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 在点 $x = x_0$ 处连续.

一切初等函数在其定义区间上都是连续的.

2. 间断点的类型

(1) 间断点概念　若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续，称 x_0 为 $f(x)$ 的间断点. 因此，若函数 $f(x)$ 在 x_0 处无定义；或 $f(x)$ 在 x_0 处虽有定义，但 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 不存在；或虽然 $f(x)$ 在 x_0 处有定义，$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 也存在，但 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$，此时 x_0 便为函数 $y = f(x)$ 的一个间断点.

(2) 间断点类型　设 $x = x_0$ 为函数 $y = f(x)$ 的间断点，若 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ 都存在，称 x_0 为函数 $f(x)$ 的第一类间断点，其他均称为第二类间断点.

在第一类间断点中，左、右极限相等的称为可去间断点，不相等的称为跳跃间断点，无穷间断点与振荡间断点都是第二类间断点.

3. 闭区间上连续函数的性质

1° 最大值和最小值定理　闭区间上的连续函数一定有最大值与最小值.

2° 有界性定理　闭区间上的连续函数在该有闭区间上一定有界.

3° 介值定理　设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a) \neq f(b)$，则对于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任一数 C，必在开区间 (a,b) 内至少存在一点使得 $f(\xi) = C$.

推论　在闭区间上连续的函数必取得介于最大值 M 与最小值 m 之间的任何值.

4° 零点定理　设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号，则在开区间 (a,b) 内至少存在函数 $f(x)$ 的一个零点，即至少有一点 $\xi \in (a,b)$ 使 $f(\xi) = 0$.

·典型例题·

[填空题]

例 1.1　设 $f(x)=\sin x$，$f[\varphi(x)]=1-x^2$，且 $|\varphi(x)|\leqslant\frac{\pi}{2}$，则 $\varphi(x)$ 的定义域为____.

答　应填 $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$ 或 $-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$.

分析　求出 $\varphi(x)$ 的表达式后，其定义域就不难求了. 本题还涉及函数记号的运算，故也是一个小综合题.

解　因 $1-x^2=f[\varphi(x)]=\sin\varphi(x)$，故

$$\varphi(x)=\arcsin(1-x^2).$$

从而要求

$$-1\leqslant 1-x^2\leqslant 1$$

即

$$0\leqslant x^2\leqslant 2$$

解之得

$$-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}.$$

例 1.2　设

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ 0, & |x|=1,\\ -1, & |x|>1,\end{cases}\quad g(x)=e^x,$$

则 $g[f(x)]=$ ____________.

解　应填

$$g[f(x)]=\begin{cases}e, & |x|<1,\\ 1, & |x|=1,\\ e^{-1}, & |x|>1.\end{cases}$$

事实上，

$$g[f(x)]=e^{f(x)}=\begin{cases}e^1, & |x|<1,\\ e^0, & |x|=1,\\ e^{-1}, & |x|>1.\end{cases}$$

例 1.3　$\lim\limits_{x\to0}x\cot2x=$ __________.

答　应填 $\frac{1}{2}$.

分析　利用重要极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ 的变形.

解　$\lim\limits_{x\to0}x\cot2x=\lim\limits_{x\to0}\frac{x\cos2x}{\sin2x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\cos2x}{2}\cdot\frac{2x}{\sin2x}=\frac{1}{2}.$$

例 1.4　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-2}\right)^{n-1}=$ __________.

答　应填 e^3.

分析　利用重要极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$ 及其变形.

解　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n-2}\right)^{n-1} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n-1}}{\left(1-\dfrac{2}{n}\right)^{n-1}}$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}\cdot\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-1}}{\left(1-\dfrac{2}{n}\right)^{-\frac{n}{2}\cdot(-2)}\left(1-\dfrac{2}{n}\right)^{-1}}$$

$$= \mathrm{e}/\mathrm{e}^{-2} = \mathrm{e}^3.$$

或　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n-2}\right)^{n-1} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{n-2}\right)^{\frac{n-2}{3}\cdot 3}\left(1+\dfrac{3}{n-2}\right) = \mathrm{e}^3$.

例 1.5　$\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\dfrac{1}{n^2+2n} =$ ________.

答　应填 0.

分析　利用等价无穷小代替: $\sin\dfrac{1}{n^2+2n} \sim \dfrac{1}{n^2+2n}$.

解　$\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\sin\dfrac{1}{n^2+2n} = \lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\dfrac{1}{n^2+2n} = 0$.

例 1.6　$\ln\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right) =$ ________.

答　应填 $\dfrac{1}{2}$.

分析　通分后用洛必达法则求解.

解　$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right) = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{\ln x + \dfrac{x-1}{x}} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}} = \dfrac{1}{2}$.

例 1.7　设函数 $f(x) = a^x (a > 0, a \neq 1)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\ln[f(1)f(2)\cdots f(n)] =$ ________.

答　应填 $\dfrac{1}{2}\ln a$.

解　因为　$\ln[f(1)f(2)\cdots f(n)]$

$$= \ln[a\cdot a^2\cdots a^n] = \frac{n(n+1)}{2}\ln a,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln[f(1)f(2)\cdots f(n)] = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}\ln a = \frac{1}{2}\ln a.$$

例 1.8　已知当 $x\to 0$ 时，$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1$ 与 $\cos x - 1$ 是等价无穷小，则常数 $a =$ ________.

答　应填 $-\dfrac{3}{2}$.

分析　由等价无穷小的概念来确定 a.

解　因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}=1$.

而由洛必达法则,

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}(1+ax^2)^{-\frac{2}{3}}\cdot 2ax}{-\sin x}=-\frac{2}{3}a.$$

故 $a=-\dfrac{3}{2}$.

例 1.9　已知 $f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$,在 $x=0$ 处连续,则 $a=$ ____________.

答　应填 $e^{-\frac{1}{2}}$.

分析　函数在一点处连续,必然在该点处的极限要存在.有的题要分别求左,右极限,而本题只需求 $f(x)$ 在 $x\to 0$ 时的极限,由于函数在 $x=0$ 处连续,因此 a 的值应等于此极限值.

解　
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}f(x)&=\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}\\&=\lim_{x\to 0}\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}\\&=\lim_{x\to 0}\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{-2\sin^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}}\\&=e^{-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

例 1.10　函数 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{|x|(x^2-1)}$ 的第二类间断点为 $x=$ ____________.

答　应填 -1.

分析　根据间断点分类的定义,若 $f(x)$ 在点 x_0 的左、右极限中至少有一个不存在,则 x_0 是 $f(x)$ 的第二类间断点.故只需逐个讨论各间断点处的左、右极限.

解　本题的函数 $f(x)$ 共有 3 个间断点:$x=-1,0,1$.对 $x=1$,因为

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}f(x)&=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{|x|(x^2-1)}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

故 $x=1$ 是 $f(x)$ 的可去间断点.

对 $x=0$,有
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-}f(x)&=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2-x}{|x|(x^2-1)}\\&=\lim_{x\to 0^-}\frac{x(x-1)}{-x(x-1)(x+1)}=-1,\end{aligned}$$

和
$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x(x-1)}{x(x-1)(x+1)}=1.$$

即 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的左、右极限都存在但不相等，故 $x=0$ 也是 $f(x)$ 的第一类间断点.

对 $x=-1$，因为 $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x(x-1)}{-x(x-1)(x+1)}=\infty$，

故 $x=-1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.

[选择题]

例 1.11　设 $f_1(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，$f_2(x)=f_1[f_1(x)]$，$f_{k+1}=f_1[f_k(x)]$，$k=1,2,\cdots$，则当 $n>1$ 时，$f_n(x)=$

(A) $\dfrac{nx}{\sqrt{1+x^2}}$　　(B) $\dfrac{nx}{\sqrt{1+nx^2}}$

(C) $\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$　　(D) $\dfrac{x}{\sqrt{n+x^2}}$

答　应选(C).

分析　先直接计算 $f_2(x)$，再用数学归纳法得到一般表示式.

解　因 $f_2(x)=f_1[f_1(x)]=\dfrac{f_1(x)}{\sqrt{1+[f_1(x)]^2}}$

$$=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+x^2}}}=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}};$$

设　$f_k(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+kx^2}}(k\geqslant1)$，则

$$f_{k+1}(x)=f_1[f_k(x)]=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+kx^2}}}$$

$$=\frac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}},$$

因此对任意 $n\geqslant1$，$f_n(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$，故选(C).

例 1.12　设 $f(x)=x\sin x\cdot e^{\cos x}$，则在 $(-\infty,+\infty)$ 上，$f(x)$ 为

(A) 有界函数　　(B) 单调函数

(C) 周期函数　　(D) 偶函数

答　应选(D).

解　因为 $f(-x)=(-x)\cdot\sin(-x)\cdot e^{\cos(-x)}$

$$=x\sin x\cdot e^{\cos x}=f(x).$$

所以 $f(x)$ 是偶函数，故选(D).

同时，我们指出，由于 x 是无界的非周期函数，所以(A)、(C) 均错；而 $\sin x$，$\cos x$ 都是周期函数，所以(B) 错.

例 1.13　设 $f(x)=\int_0^{\sin x}\sin(t^2)\mathrm{d}t, g(x)=x^3+x^4$,则当 $x\to 0$ 时,$f(x)$ 是 $g(x)$ 的

(A) 等价无穷小　　　　(B) 同阶但非等价无穷小

(C) 高阶无穷小　　　　(D) 低阶无穷小

答　应选(B).

分析　由无穷小比较的概念,只需计算$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$,便可得到结论.

解　因为
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sin x}\sin(t^2)\mathrm{d}t}{x^3+x^4}$$
$$\underline{\underline{\text{洛必达法则}}}\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin^2 x)\cos x}{3x^2+4x^3}$$
$$\underline{\underline{\text{等价无穷小代替}}}\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{3x^2+4x^3}$$
$$\underline{\underline{\text{重要极限}}}\ \frac{1}{3}.$$

因此 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同阶但非等价无穷小.故选(B).

例 1.14　设当 $x\to 0$ 时,$(1-\cos x)\ln(1+x^3)$ 是比 $x\sin(x^n)$ 高阶的无穷小,而 $x\sin(x^n)$ 是比$(\mathrm{e}^{x\tan^2 x}-1)$ 高阶的无穷小,则正整数 n 为

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

答　应选(C).

分析　利用无穷小的比较解此题.在比较的过程中,把每个无穷小都用其等价的无穷小代替便可得到正确的结论.

解　因为当 $x\to 0$ 时,$(1-\cos x)\ln(1+x^3)\sim\dfrac{x^2}{2}\cdot x^3=\dfrac{x^5}{2}$,
$$x\sin(x^n)\sim x^{n+1},$$
$$\mathrm{e}^{x\tan^2 x}-1\sim x\tan^2 x\sim x^3$$

因而正整数 $n+1=4$,即 $n=3$.故选(C).

例 1.15　设数列 x_n 与 y_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n y_n=0$,则下列断言正确的是

(A) 若 x_n 发散,则 y_n 必发散

(B) 若 x_n 无界,则 y_n 必有界

(C) 若 x_n 有界,则 y_n 必为无穷小

(D) 若$\dfrac{1}{x_n}$为无穷小,则 y_n 必为无穷小

答　应选(D).

分析　这种类型的题,比较适宜于用举反例的方法排除不正确的结论.会举反例则是考生应该掌握的方法,是加深对概念和理论理解的手段.

解　若取 $x_n=n, y_n\equiv 0$,便否定了(A);

若取 $x_n=n+(-1)^{n-1}n, y_n=n+(-1)^n n$,便否定了(B);

若取 $x_n \equiv 0$,则 y_n 可以为任何数列而不必是无穷小,这也否定了(C).

于是剩下(D)是正确的.事实上,当 $\frac{1}{x_n}(n \to \infty)$ 为无穷小时,$y_n = (x_n y_n) \cdot \frac{1}{x_n}$ 为无穷小 $(x_n y_n)$ 与无穷小 $\frac{1}{x_n}$ 的乘积,从而必为无穷小,故选(D).

例 1.16　设函数 $y = f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有界且可导,则

(A) 当 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ 时,必有 $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$

(B) 当 $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x)$ 存在时,必有 $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$

(C) 当 $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$ 时,必有 $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = 0$

(D) 当 $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x)$ 存在时,必有 $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = 0$

答　应选(B).

分析　仍用举反例来排除错误的结论.

解　(C),(D)容易排除:设 $y = \sin x$,则它满足题设条件,且 $\lim\limits_{x \to 0^+} \sin x = 0$ 但 $\lim\limits_{x \to 0^+} \cos x = 1$,故(C),(D)均错.

又设　$y = \frac{1}{x}\sin(x^2)$,它在 $(0, +\infty)$ 内有界可导,且 $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x}\sin(x^2) = 0$;当 $x > 0$ 时,$y' = -\frac{\sin(x^2)}{x^2} + 2\cos(x^2)$,由于当 $x \to +\infty$ 时 y' 不存在,所以(A)错.故只有(B)正确.事实上,若 $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x)$ 存在但不等于0,则 $f(x)$ 必无界(请读者思考).

例 1.17　设 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a\tan x + b(1 - \cos x)}{c\ln(1 - 2x) + d(1 - e^{-x^2})} = 2$,其中 $a^2 + c^2 \neq 0$,则必有

(A) $b = 4d$　　　　(B) $b = -4d$

(C) $a = 4c$　　　　(D) $a = -4c$

答　应选(D).

分析　这是求极限的反问题.用洛必达法则计算左端的极限以确定系数之间的关系.

解

$$\lim_{x \to 0} \frac{a\tan x + b(1 - \cos x)}{c\ln(1 - 2x) + d(1 - e^{-x^2})}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{a}{1 + x^2} + b\sin x}{-\frac{2c}{1 - 2x} + 2dx e^{-x^2}} = -\frac{a}{2c} = 2,$$

故得 $a = -4c$,故选(D).

注　题中虽有4个参数 a,b,c,d,但从结果看 b,d 可以为任意常数.换言之,在此极限中,分子的 $b(1 - \cos x)$ 与分母的 $d(1 - e^{-x^2})$ 项都是可忽略的.事实上,从无穷小的比较来看,$1 - \cos x$ 和 $1 - e^{-x^2}$ 分别是比 $\tan x$ 和 $\ln(1 - 2x)$ 高阶的无穷小($x \to 0$ 时),因而在求极限时均可忽略.

例 1.18　若$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin6x+xf(x)}{x^3}=0$,则$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}=$ ________.

(A) 0　　　(B) 6　　　(C) 36　　　(D) ∞

答　应选(C)

分析　一个解法是在已知的极限中凑出欲求极限的形式:$\dfrac{\sin6x+xf(x)}{x^3}=\dfrac{6+f(x)}{x^2}+\dfrac{\sin6x-6x}{x^3}$问题就化为第2项的极限了.另一个解法是将$\sin6x$展成带皮亚诺余项的3阶泰勒公式

$$\sin6x=6x-\frac{1}{3!}(6x)^3+o(x^3)$$

代入运算.显然第二种解法要方便一些.利用展成泰勒多项式求极限是一种重要的求极限的方法.

解法 1　由上述分析得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\sin6x+xf(x)}{x^3}&=\lim_{x\to0}\left[\frac{6+f(x)}{x^2}+\frac{\sin6x-6x}{x^3}\right]\\&=\lim_{x\to0}\frac{6+f(x)}{x^2}+\lim_{x\to0}\frac{6\cos6x-6}{3x^2}\\&=\lim_{x\to0}\frac{6+f(x)}{x^2}+\lim_{x\to0}\frac{-36\sin6x}{6x}\\&=\lim_{x\to0}\left[\frac{6+f(x)}{x^2}-36\right]=0.\end{aligned}$$

故选(C).

解法 2

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to0}\frac{\sin6x+xf(x)}{x^3}\\&=\lim_{x\to0}\frac{6x-\frac{1}{3!}(6x)^3+o(x^3)+xf(x)}{x^3}\\&=\lim_{x\to0}\left[\frac{6+f(x)}{x^2}-36\right]=0\end{aligned}$$

亦为(C)正确.

注　本题选(A)的大有人在:

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{x\left[\frac{\sin6x}{x}+f(x)\right]}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin6x}{x}+f(x)}{x^2}=0.$$

再把$\dfrac{\sin6x}{x}$用6代替,便得此极限为0.错就错在用6代替$\dfrac{\sin6x}{x}$!

此外不看 $f(x)$ 是否满足条件就用洛比达法则去求也是错误的!

例 1.19　“对任意给定的 $\varepsilon\in(0,1)$,总存在正整数 N,当 $n\geqslant N$ 时,恒有 $|x_n-a|\leqslant2\varepsilon$”是数列$\{x_n\}$收敛于$a$ 的

(A) 充分条件但非必要条件
(B) 必要条件但非充分条件
(C) 充分必要条件
(D) 既非必要条件又非充分条件
答　应填(C).

分析　将题目中所述与数列极限的定义加以对照,不难看出它首先是必要条件,即由数列极限的定义:"对于任意给定的 $\varepsilon_1 > 0$,存在 $N_1 > 0$,使得当 $n > N_1$ 时恒有 $|x_n - a| < \varepsilon_1$"可以推出题中所述的.但其逆也是正确的.这就要求考生对数列 x_n 收敛于 a 的定义有深入的理解.

解　下面来推导它也是充分条件.

对于任意给定的 $\varepsilon_1 > 0$,取 $\varepsilon = \min\left\{\frac{\varepsilon_1}{3}, \frac{1}{3}\right\}$,这时 $\varepsilon \in (0,1)$,由已知,对于此 ε 存在 $N > 0$,使得当 $n \geqslant N$ 时,恒有 $|x_n^0 - a| \leqslant 2\varepsilon$,现取 $N_1 = N - 1$,于是有当 $n \geqslant N > N_1$ 时,恒有 $|x_n - a| \leqslant \frac{2}{3}\varepsilon_1 < \varepsilon_1$.这证明了数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a.总之(D)是正确的.

例 1.20　$x = \frac{1}{n}(n = 2,3,\cdots)$ 是函数 $f(x) = x \cdot \left[\frac{1}{x}\right]$ 的($[\cdot]$ 为取整函数)

(A) 无穷间断点　　(B) 跳跃间断点
(C) 可去间断点　　(D) 连续点

答　应选(B).

分析　分别考查函数 $f(x)$ 在 $x = \frac{1}{n}$ 的左、右极限.

解　当 $x \to \left(\frac{1}{n}\right)^-$ 时,$n + 1 > \frac{1}{x} > n$,故 $\left[\frac{1}{x}\right] = n$,

即

$$\lim_{x \to \left(\frac{1}{n}\right)^-} f(x) = \lim_{x \to \left(\frac{1}{n}\right)^-} x \cdot \left[\frac{1}{x}\right] = 1;$$

当 $x \to \left(\frac{1}{n}\right)^+$ 时,$n - 1 < \frac{1}{x} < n$,故 $\left[\frac{1}{x}\right] = n - 1$,

即

$$\lim_{x \to \left(\frac{1}{n}\right)^+} f(x) = \lim_{x \to \left(\frac{1}{n}\right)^+} x \cdot \left[\frac{1}{x}\right] = \frac{n-1}{n} < 1,$$

由此可知 $x = \frac{1}{n}(n = 2,3,\cdots)$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点,故选(B).

例 1.21　设函数 $f(x) = \frac{x}{a + e^{bx}}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续,且 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$,则常数 a, b 满足

(A) $a < 0, b < 0$　　(B) $a > 0, b > 0$
(C) $a \leqslant 0, b > 0$　　(D) $a \geqslant 0, b < 0$

答　应选(D).