面向新世纪课程教材
Textbook Series for the New Century

最优化方法应用基础

卢险峰 编著

同济大学出版社

最优化方法应用基础

卢险峰　编著

同济大学出版社

内容提要

最优化方法是应用数学的一个分支，又是现代工程分析最佳设计四种主要方法之一。本书内容分三大部分。第一部分为理论基础，第二部分为工程应用，第三部分是附录，详尽介绍了各种计算方法的上机源程序。本书清晰地阐述了最优化方法的理论基础，并结合具体的工程实例，示范最优化方法的实际应用。

本书可供高等院校有关专业作教材使用，也可供有关科研及工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

最优化方法应用基础/卢险峰编著.—上海:同济大学出版社，2003.8

ISBN 7-5608-2591-5

Ⅰ.最… Ⅱ.卢… Ⅲ.①最优化②方法—应用 Ⅳ.0224

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 015369 号

最优化方法应用基础

卢险峰 编著

责任编辑 张智中 责任校对 徐 栩 封面设计 陈益平

出版发行 同济大学出版社

(上海四平路 1239 号 邮编 200092 电话 021-65985622)

经 销 全国各地新华书店

印 刷 江苏省句容排印厂印刷

开 本 787mm×1092mm 1/16

印 张 14

字 数 358000

印 数 1—4000

版 次 2003 年 8 月第 1 版 2003 年 8 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 7-5608-2591-5/T·2

定 价 20.00 元

前　言

最优化方法是应用数学的一个分支，又是现代工程分析最佳设计四种主要方法之一。应用最优化方法能获得明显的经济意义、技术价值和管理效益。因而，最优化方法受到了学术界和工程界越来越多的重视。从20世纪80年代开始，我国高等院校相继分别对研究生、本科生开设了最优化知识方面的课程。

现今，关于最优化方法的教材、著作已有众多的版本，它们都有自己的特点。本书综合了这些教材、专著的优点，并注重突出以下几个方面：

1. *传授最优化思想*　介绍最优化理论与方法的过程中多结合自己的学习体会和身边发生的事，使读者容易理解接受，特别是用最优化方法处理工程、管理、学习等方面问题获得的明显效果，来传授最优化的思想。

2. *介绍求解最优化问题的基本方法*　较全面而简要地介绍了各种解题方法，重点是以迭代法为基础的数值解法的原理、特点和方法。不谋求这些方法的原理及其推证在数学上的十分严密性，而是以使用为限度。

3. *引导最优化方法的应用*　本书的内容分为两大篇，每篇都有不少实例。第1篇是理论基础，也尽量结合了实际例子；第2篇是专门介绍工程应用实例（包括数学模型的建立，多目标问题及广义最优化的问题等）。

教学实践证明，上述特点会让读者通过学习，对最优化方法产生较大兴趣，乐于接受其思想，并初步具备应用之技能，从而，为自觉地用最优化方法处理所遇到的各种问题打下较好基础。

我的学生们为本书稿提供了帮助，如博士生张如华做了很多对本书内容有充实性的工作，工学硕士肖伟华编制了几种数值解法的C语言程序；我的一些朋友，特别是与我们建立了合作关系的工厂企业，如浙江利丰电器股份有限公司总经理孙永安先生等也给予了关心和支持。现借本书正式出版之际，向他们表示由衷的感谢。

尽管本书从编写试用，经修改补充到出版，有15年教学经验的积累，又参考了大量文献资料，且四易其稿，但限于作者的水平，错误和不妥之处在所难免，谨请指教。

作者

于南昌大学

2003年3月

目　　录

第1篇 理论基础

简述最优化方法的定义、形成,最优化问题的分类、数学模型的构成要素及最优化方法的解题步骤等知识;结合具体实例,表明具备最优化思想的重要性与采用最优化方法处理工程实际问题的显著效用性。

系统介绍数学规划法的内容,包括:经典最优化方法中微分学、变分学求极值的条件与方法;运筹学中线性规划、非线性规划方法;以迭代法为特征的直接搜索、基于梯度法的间接搜索和约束非线性最优化问题两类搜索方法中的一些主要的数值方法及其特点。

第 1 章　最优化方法的基本知识

1.1　最优化方法的定义与发展简史

定义

最优化方法即是解决最优化问题的方法。最优化问题是指在一定的约束条件下，决定某个或某些可控制的因素应有的合理取值，使所选定的目标达到最优的问题。

最优化方法主要研究数学规划和最优控制两类问题的求解方法。最优化方法发展很快，现已形成很多分支和领域，本书不讨论最优控制问题。

最优化方法的英文表示有 Optimal method，Optimization of methods，Optimization 或 Optimum 等。在现代科学技术中，最优化“Opt”这个概念已如同使用最大值“Max”和最小值“Min”一样普遍了，并且已愈来愈成为解决科学和工程技术问题的一个原则。简单地说，最优化就是要使问题的解决，在一定的条件下达到一种可以认为是无甚争议的完善程度。或者说，最优化方法的广义定义是使解决问题合理、科学、有效且最佳化。

地位

最优化方法在数学上是一种求极值的方法，为应用数学的一个分支，是新兴的数学理论之一。虽然最优化方法的最优值是一个相对概念，并不完全等于数学上的极值，但在大多数用最优化方法处理和解决的问题中，最优值都是用最大值或最小值来表示。在我国，20 多年前，成立了全国最优化数值方法学术委员会，最优化数值方法业已形成为一个学术领域，现又在产生新的分支与专门化方向。

现今，最优化方法在工程技术及管理领域的发展，已经形成了一门重要的技术科学，它是现代工程分析最佳设计的四种主要方法之一。这四种方法是有限元分析、最优化方法、动态设计和数值仿真，其主要内容特点可概括为如图 1-1 所示。

刚刚进入新的世纪，中国科学院、中国机械工程学会就十分强调制造业要与国际接轨，要使我国由世界上的制造大国变成制造强国；提出机械行业的现代机械设计方法有：创新设计、生命周期设计、有限元设计、虚拟设计、优化设计、稳健设计、并行设计、智能设计、机电一体化设计和计算机辅助设计；提出模具行业的现代设计包括计算机辅助设计、材料成形过程数值模拟、金属塑性成形过程优化设计、计算机辅助制造及快速成形与快速制模等；都把最优化方法放到现代设计方法的一个重要位置上。

发展

最优化方法的出现，可以追溯到牛顿（Newton）、拉格朗日（Lagrange）和柯西（Cauchy）时代。由于牛顿和莱布尼兹（Leibnitz）对微积分的贡献，才使具有最优化思想的微分学的发展成为可能；而伯努利（Bernoulli）、欧拉（Euler）和拉格朗日等人则奠定了变分学的基础；柯西最早应用最速下降法求解无约束极小化问题。

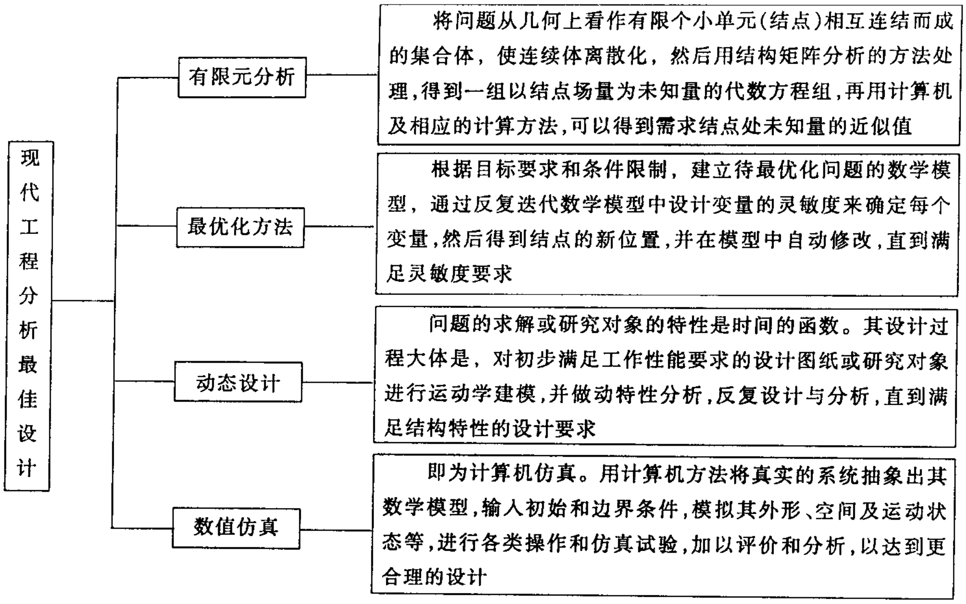

图 1-1

在第二次世界大战期间，出于满足军事上的需要产生了运筹学。战后运筹学开始转向民用工业的应用，并不断取得进展。在此基础上，到 20 世纪 60 年代，最优化方法发展并形成为一门新兴的基础学科。

尔后，随着近代科学技术发展的需要，特别是由于计算机技术的飞速发展，促进了最优化方法的迅速发展。很快，这门新兴的基础科学便渗透到各种技术领域，形成了最优化方法或最优化技术这门应用科学。并且，于 20 世纪 70 年代，最优化方法这门应用技术科学又开始产生出最优设计(Optimal design)，最优控制(Optimal control)与最优管理(Optimal management)等分支。到 20 世纪 80 年代，最优化技术又在这些分支中发展出了新的更细的分支，比如，在工程技术领域中就发展出了机械优化设计、建筑结构优化设计及化工石油工程优化设计等更为具体的工程技术学科。

现今，最优化方法有很多简称，如“最优化”以及“最优”、“优化”等，还经常使用结构优化、参数优化、最优化用料、最优化处理以及最优策略、最优决策等，这正是最优化方法在普及、推广和发展的一种反映。

1.2 最优化问题数学模型的构成

所谓数学模型可以定义为：是根据对所研究问题的分析、了解及实践经验，为了一个特定的目的，建立出的用以描述问题的变化规律、反映基数量关系并有具体算法的一组数学表达式。

结合最优化方法的定义，可以给出最优化问题数学模型有如式(1-1)所示的型式：

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{求 } \boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}\text{，使 } f(\boldsymbol{X})\text{ 极小或极大} & \\
\text{满足于约束} \quad g_i(\boldsymbol{X})\leqslant 0,\ i=1,2,\cdots,m & \\
\text{和} \quad g_j(\boldsymbol{X})=0, j=1,2,\cdots,p &
\end{array}\right\} \tag{1-1}$$

这里，$\boldsymbol{X}$ 是一个 n 维向量，称为设计向量或设计变量；$f(\boldsymbol{X})$ 称为目标函数；使目标函数极小或极大，就是使问题的性能指标为最优；$g_i(\boldsymbol{X})$ 和 $g_j(\boldsymbol{X})$ 为约束条件，前者表示不等式约束，后者表示等式约束；n 为变量个数，m 为约束个数（不等式约束），p 也为约束个数（等式约束），它们之间不需要有任何关系。

最优化方法或最优化设计的第一步是，要叙述所研究的问题和建立该问题的数学模型，其中包括列出目标函数和约束条件，确定设计变量，用函数、方程式和不等式描述说明所求的最优化问题。在这一步中，认识目标、确定目标函数的数学表达式尤为困难。

为此，先对最优化问题数学模型中的基本构成，包括项目、内容及其数学模型的典型型式作一简单介绍。

数学模型的构成，可以认为有 4 个基本要素，即性能指标、设计变量、目标函数和约束条件；也有认为是由设计变量、目标函数和约束条件 3 要素构成的观点。

性能指标

对于一个待最优化的实际问题，首先必须选择出它的性能指标并予以确定。

性能指标选定后，相应的最优化问题才会有明确的目标和确定的结果。指标不同，结果当然不同。因而，所得的最优化结论是否符合实际，是否可以采用，首先就由性能指标选择得是否合理来决定。例如，要研发出一种新产品，在特定条件下，可以选择其质量方面的性能指标最好，以便能迅速占领市场。如果在质量相同（与现有产品相比）条件下，可以选择开销最少、成本最低作为指标，以便取得最大的利润。但是，如果要经营一个工厂企业，只把开销支出最少作为指标，而不太考虑质量和产量，那么，优化的结果只能是把工厂关闭掉才能达到开销支出的极小值为零。

性能指标是多种多样的，不同条件下要求也是不尽相同的。选用社会效率方面指标时，可把排出污水、废气最少或振动、噪声最小作为性能指标；选用技术性能方面指标时，可把设计的机床重量最轻、塑性变形中工艺变形力最小、切削加工中工件表面粗糙度值最小、焊接梁的强度最大、压铸件的用料最省及泵与涡轮和热交换器效率最大作为性能指标；选用经济效益方面指标时，可把水利资源系统设计效益最大、产品成本最小或利润最大、商品调运费用最少、投资风险最小或盈利最大作为性能指标，等等。

说明：本书在介绍最优化方法各种数值解法中，主要针对解决一个性能指标的最优化；实际问题中，也会有多目标问题，对此类问题将在第 9 章中简介其处理方法。

设计变量

1）设计变量　设计中可以独立改变的基本参数，它泛指 $x_1, x_2, \cdots, x_n$。设计变量的每

一个确定的取值对应着一个设计方案。对应于最优设计方案的设计变量取值称之为最优点或最优解。与最优点相对应的目标函数值称之为最优值。

设计变量用 $\boldsymbol{X}$ 表示，

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}$$

其中 $\boldsymbol{X}$——n 维列向量；

x_i——n 维列向量的第 i 个变量。

可以把设计变量与设计空间的坐标表示联系起来，如图 1-2 所示。

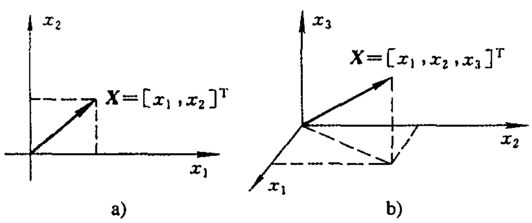

图 1-2

$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$ 见图 1-2a)

$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$ 见图 1-2b)

$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$ $n>3$，画不出图

2) **设计空间** 以设计变量为坐标轴的实欧几里德空间。n 维欧氏空间记为 E^n，可用 $\boldsymbol{X}\in E^n$ 来表示，$\boldsymbol{X}$ 为 n 维向量。

换言之，设计空间是所有设计方案的集合范围，是设计变量的取值空间。当

$n=2$ 时，设计空间为平面，见图 1-2a)；

$n=3$ 时，设计空间为立体，见图 1-2b)；

$n>3$ 时，设计空间为超越空间，不一定有明显的物理意义和量纲，画不出图。

约束条件

1) **约束条件** 求目标函数极值时的某些限制称为约束条件，简称约束。它也是对设计变量取值范围的限制(条件)。约束式常用 g 字母表示，也有用 h、C' 等其他字母表示的。

如果列出来的约束条件式越接近实际系统，则所求得的最优化问题的解，也是越接近于实际情况的最优解。

约束函数式可以是等于零、大于等于零或小于等于零的等式约束和不等式约束。即

$$g_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0 \qquad \text{为等式约束}$$

$$\left.\begin{aligned}g_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)\geqslant 0\\g_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)\leqslant 0\end{aligned}\right\} \qquad \text{为不等式约束}$$

并可统一写成：

$$g_i(\boldsymbol{X})\leqslant 0,\ \boldsymbol{X}\in E^n,\ i=1,2,\cdots,m。$$

当$g_i(\boldsymbol{X})=0$ 时，为一 n 维空间曲面；

$g_i(\boldsymbol{X})\leqslant 0$ 时，对设计空间的取值范围分成为两部分。

2）可行域和非可行域　在约束条件中，不等式约束更具有重要的概念，因为它将设计空间划分为两部分，一部分满足约束条件，另一部分不满足约束条件，即：

可行域——满足约束条件的区域；

非可行域——不满足约束条件的区域，也有叫不可行域的。进而有：

可行点——可行域内的点，它对应着一个可行方案；

非可行点——非可行域内的点，也叫不可行点，它对应着一个不可行方案。

可用一组约束条件及可行域的坐标位置予以直观描述。假如某一组约束条件为：

$$\begin{cases} g_1(\boldsymbol{X})=x_2-5\leqslant 0 \\ g_2(\boldsymbol{X})=x_1+x_2-4\geqslant 0 \\ g_3(\boldsymbol{X})=x_1-\dfrac{1}{2}x_2-8\leqslant 0 \end{cases}$$

则该约束条件中的可行域、可行点、非可行域及非可行点的坐标及范围，如图 1-3 所示。图中，灰色阴影部分为可行域，其余范围属非可行域。非可行域内▲点表示非可行点，可行域内•点表示可行点。

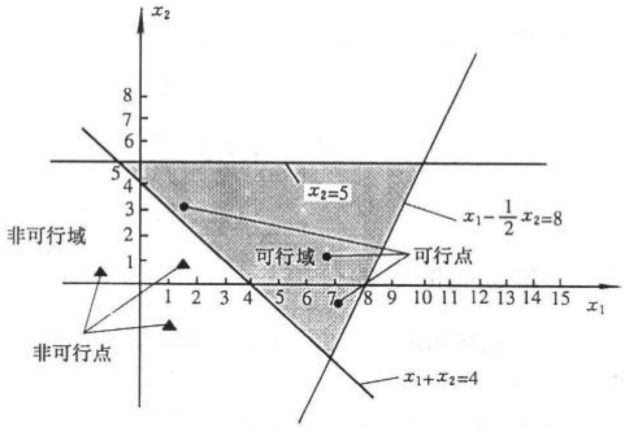

图 1-3

目标函数

目标函数是评价设计方案优劣的数学表达式，它是设计变量的函数，亦称评价函数。

目标函数的数学描述为：

$$f(\boldsymbol{X})=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

简记为：

$$f(\boldsymbol{X}),\boldsymbol{X}\in E^n$$

用效果、效率、利润等作为目标函数时，最优化设计是要求极大值 $\max f(\boldsymbol{X})$；而若用费用、消耗、成本等作为目标函数时，最优化设计则是要求极小值 $\min f(\boldsymbol{X})$。

其实，求极大值或极小值在数学计算上并没有原则性的区别。因为求 $f(\boldsymbol{X})$的极小值相当于求$-f(\boldsymbol{X})$的极大值，如图1-4所示，即有

$$\min f(\boldsymbol{X})=-\max[-f(\boldsymbol{X})]$$

显然，两者的最优值均在 $X=X^*$ 时得到。故为便于讨论，一般多记为求目标函数的最

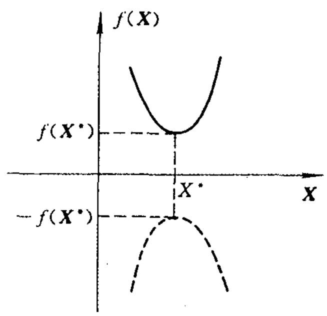

图 1-4

小值 $\min f(\boldsymbol{X})$。

综上所述，表明最优化问题的数学模型，就是要对具体的实际问题进行抽象，得出一个描述在设计变量 $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}\in E^n)$ 满足约束条件 $g_i(\boldsymbol{X})\leqslant 0$ 或 $g_i(\boldsymbol{X})\geqslant 0$ 且其 $i=1,2,\cdots,m$ 的条件下，求目标函数 $f(\boldsymbol{X})$ 极值的数学表达式。这样的数学模型可将式(1-1)表示为如下：

$$\begin{cases}\min f(\boldsymbol{X}),\boldsymbol{X}\in E^n \\ \text{S. t. } g_i(\boldsymbol{X})\leqslant 0 \\ \qquad\qquad \text{或}\geqslant 0, \qquad i=1,2,\cdots,m\end{cases} \tag{1-2}$$

式(1-2)即为最优化问题数学模型的典型形式。

从式(1-2)中可以清楚地看出，式中的

$$4\text{ 个数学符号}\begin{cases}\boldsymbol{X} \\ \min \\ f(\boldsymbol{X}) \\ \text{S. t. } g(\boldsymbol{X})\end{cases}\quad \text{分别代表}\begin{cases}\text{设计变量} \\ \text{性能指标} \\ \text{目标函数} \\ \text{约束条件}\end{cases}$$

1.3　最优化问题的分类

最优化问题形形色色，具体数学模型多种多样。从不同的角度出发，可以对最优化问题进行分类。

通常，从数学模型角度出发，按其中的约束条件、目标函数及约束函数的线性性质、设计变量的确定性与否、设计变量与时间有无关系及目标函数的个数等来进行分类的。兹将常有的分类情况简介如下：

1) 按约束条件有无及其约束式的性质来分，有

$$\left.\begin{cases}\text{无约束} \\ \text{有约束}\begin{cases}\text{等式约束} \\ \text{不等式约束}\end{cases}\end{cases}\right\}\text{最优化问题}$$

对于无约束的最优化问题，其数学模型只有目标函数、没有约束条件，即为：

$$\min f(\boldsymbol{X}) \qquad \boldsymbol{X}\in E^n \tag{1-3}$$

对于有约束的等式约束最优化问题的数学模型为：

$$\begin{cases}\min f(\boldsymbol{X})=\min f(x_1,x_2,\cdots,x_n) \\ \text{S. t. } g_i(\boldsymbol{X})=0 \qquad i=1,2,\cdots,m,m\leqslant n\end{cases} \tag{1-4}$$

[例 1-1]　某一最优化问题的数学模型为：

$$\begin{cases}\min f(\boldsymbol{X})=2x_1+4x_2+6\\ \text{S. t.}\quad g_1(\boldsymbol{X})=x_1+x_2=0\\ \qquad g_2\boldsymbol{X})=x_2-2=0\\ \qquad g_3(\boldsymbol{X})=x_1-1=0\end{cases}$$

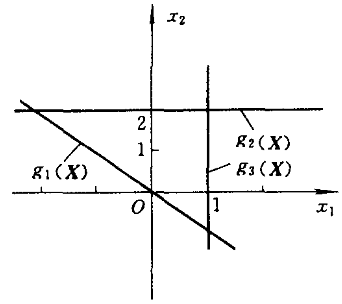

图 1-5

它所带有的三个等式约束如图 1-5 所示。

对于有约束的不等式约束最优化问题的数学模型为：

$$\begin{cases}\min f(\boldsymbol{X})=\min f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\ \text{S. t.}\ g_i(\boldsymbol{X})\leqslant 0 \qquad i=1,2,\cdots,m \\ \qquad\qquad m\text{ 没有限制}\end{cases} \tag{1-5}$$

[例 1-2] 若有目标函数为 $\min f(\boldsymbol{X})=(x-a)^2+b$ 的最优化问题，在不同的约束下会有不同的最优解(参见图 1-6)：

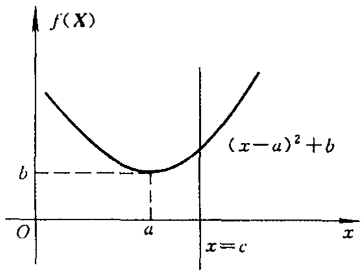

图 1-6

当无约束时，其最优解 $x^*=a$

最优值 $f(\boldsymbol{X}^*)=b$

当有等式约束 $g(\boldsymbol{X})=x=c$ 时，

其最优解 $x^*=c$

最优值 $f(x^*)=(c-a)^2+b$

当有不等式约束时，若 $g(\boldsymbol{X})=x\geqslant c$

其解同等式约束；

若 $g(\boldsymbol{X})=x\leqslant c$

其解则同无约束情况。

2. 按所包含方程式的特性来分，有

线性规划——目标函数和约束条件均为线性函数关系的最优化问题，即 $f(\boldsymbol{X})$ 与 $g(\boldsymbol{X})$ 都是一次函数，如[例 1-3]；

非线性规划——目标函数和约束条件中有一个或一个以上非线性关系函数式的最优化问题，如[例 1-4]。

[例 1-3] 有一最优化问题的数学模型如下所示。显然，3 个关系式都是一次函数。

$$\begin{cases}\min f(\boldsymbol{X})=5x_1+6x_2+3x_3+2x_4+8x_5\\ \text{S. t.}\ g_1(\boldsymbol{X})=4x_1+8x_2+2x_3+5x_4+3x_5\leqslant 2000\\ \qquad g_2(\boldsymbol{X})=9x_1+7x_2+4x_3+3x_4+8x_5\leqslant 2500\\ \qquad\qquad x_i\geqslant 0\text{ 且应为整数},i=1\sim 5\end{cases}$$

注：该问题还属于线性规划中的整数线性规划问题。

[例 1-4] 某个最优化问题数学模型如下，可知是一非线性规划问题。

$$\begin{cases}\min f(\boldsymbol{X})=x_1^2+x_2^2\\ \text{S. t.}\ g_1(\boldsymbol{X})=x_1^2-x_2\geqslant 0\\ \qquad g_2(\boldsymbol{X})=2-x_1-x_2^2=0\\ \dfrac{5}{2}\geqslant x_1\geqslant\dfrac{1}{2},\ 3\geqslant x_2\geqslant 0\end{cases}$$

3）按设计变量容许取值来分，有

整数规划——设计变量只能限于取整数（或离散值）的最优化问题，如[例 1-3]。

非整数规划——所有设计变量可以取任何实数的最优化问题，如[例 1-4]。

4）按设计变量的性质来分，有

静态最优化——设计变量不是时间 t 的函数，即与时间 t 无关的最优化问题，又叫静态规划，如上两例均为静态最优化。

动态最优化——设计变量是时间 t 的函数，即是与时间 t 有关的最优化问题，又叫动态规划。本书对此不作详细讨论。

5）按设计变量确定性性质来分，有

确定性最优化问题——每个设计变量都是确定性的最优化问题，如上述两例均是。

随机性最优化问题——某些设计变量的取值带有随机性的最优化问题。

6）按目标函数的个数来分，有

单目标最优化问题——只有一个目标函数的最优化问题。本节中所有的例子都是单目标最优化问题。一般对单目标最优化问题就省略“单目标”三个字，只有在几个目标时才强调多目标最优化。

多目标最优化问题——含有多个目标函数的最优化问题。如[例 1-5]即是。

[例 1-5] 如下所列数学模型的最优化问题中，即有两个目标函数。

$$\begin{cases} \min f_1(\boldsymbol{X})=\rho l x_1 x_2 \\ \min f_2(\boldsymbol{X})=-\left[\dfrac{E x_1 x_2^3}{4l^3\left(M+\dfrac{33}{140}\rho l x_1 x_2\right)}\right]^{1/2} \\ \text{S. t. } g_1(\boldsymbol{X})=\dfrac{Mg}{x_1 x_2}-\sigma_{\max}\leqslant 0 \\ \qquad g_2(\boldsymbol{X})=\dfrac{Mg}{x_1 x_2}-\dfrac{\pi^2 E x_2}{48l^2}\leqslant 0 \\ \qquad g_3(\boldsymbol{X})=-x_1\leqslant 0 \\ \qquad g_4(\boldsymbol{X})=-x_2\leqslant 0 \end{cases}$$

1.4 数学符号的简要说明

最优化方法是一种数学方法，因而，学习和应用最优化理论要求有一定的数学准备。下面，兹就本书所用到的一些主要数学符号及数学模型的书写格式，作一简单介绍与说明：

1）向量或矩阵用黑斜体大写字母表示，其中的元素用小写字母表示。如 $\boldsymbol{X}(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 表示有 n 个元素 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的列向量；$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$ 表示行向量；T 为转置符号。

由于用小写字母表示的元素（即向量中的分量）均标注角标号，故也有向量和其中的元素都用小写字母表示的。

2）多变量函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 简写为 $f(\boldsymbol{X})$ 或 $F(\boldsymbol{X})$。因此，$f(\boldsymbol{X},\boldsymbol{u})=f(x_1,x_2,\cdots,x_n,u_1,u_2,\cdots,u_m)$ 表示 $n+m$ 元函数。其中 $f(\boldsymbol{X})=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$f(\boldsymbol{u})=f(u_1,u_2,\cdots,u_m)$。

3）一般是向量的上标用以表示第几次迭代。如 $\boldsymbol{X}^0=[x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0]^{\mathrm{T}}$ 表示 $\boldsymbol{X}$ 的初始值；$\boldsymbol{u}^k=[u_1^k,u_2^k,\cdots,u_m^k]^{\mathrm{T}}$ 表示第 k 次迭代后的向量 $\boldsymbol{u}$。因此，不要将 $(\boldsymbol{X})^2$ 误解为 $\boldsymbol{X}$ 的平方，