黄冈金书铁卷

黄冈名校名师
正本清源扛鼎力作

高中数学总复习

丛书主编　陈鼎常
本册主编　张卫兵
　　　　　蔡　欣

JINSHU TIEJUAN

中国出版集团　東方出版中心

《黄冈金书铁卷》编委会

前　　言

黄冈成功的秘诀，帮助你梦想成真

像湖北黄冈这样一个经济、文化并不发达，条件并不优越的革命老区，近十几年来却创造了闻名遐迩的“黄冈高考神话”。黄冈中学更是享誉全国，每年考入北大、清华、复旦等名校的学生数以百计。不仅如此，这里还有二十多名学生成为奥赛国家集训队队员，在国际奥赛中已为国家夺得了五金四银一铜十块奖牌的好成绩。黄冈学子不但上清华、进燕园，他们还留学普林斯顿，叩开了耶鲁的大门……现在，许多家长又演绎着现代版的“孟母三迁”的故事，不远千里，把孩子送到黄冈。黄冈成功靠的是什么秘诀呢？这套丛书将给你一个明确的答案，那就是黄冈名师独特的教育理念和严谨科学的教学方法。

超强的编写阵容，献给你正本清源之作

目前，打“黄冈”牌子的图书多少让读者有点眼花缭乱，真伪难辨。本丛书旨在以黄冈中学最强势的作者阵容，精心打造正本清源扛鼎之作，使之成为以不变应万变的“金科玉律”，众多教辅书中脱颖而出的“金书铁卷”。

本丛书编者均是来源于教学第一线、实战经验丰富的黄冈名师，其中有特级教师十余位，奥赛主教练七位，还有一批黄冈中学教研组组长和教坛新秀。他们培养的学生有全省高考状元、全市中考状元，可谓桃李满天下。本丛书强势的作者阵容，是目前市场上“黄冈”同类图书所难以企及的，这是本丛书高质量的重要保证。

本丛书以新课程标准为指导，以人民教育出版社最新教材为依据，以考试说明为准则，以教学改革、考试改革为方向，以培养能力、掌握知识、助学助考为目的，以出精品为宗旨（问题经典、分析精准、表达精练），以创新为特色（题目新颖、方法新颖、设计新颖），潜心发掘黄冈名师独特的教学经验和卓有成效的应考训练方法，真正体现黄冈名师求实、求精、求变、求深、求活、求新的教学理念和教学风格。

本丛书还首创了师生“互动”的编写模式。即由教师写出初稿后，经黄冈学生反复试做、试练，再经教师不断修订、调整，最后才定稿。因此，本丛书不仅反映了名师的真实水平，而且更符合学生口味，图书质量得到了充分检验和保证。

精心的整体设计，会使你茅塞顿开

本丛书分为“同步学练考”（26 册）和“总复习”（13 册）两大类，全套共 39 册，跨度从小学六年级到高中三年级，按每学年一册编写，体现了丛书的完整性。具体是：高中部分“同步学练考”14 册，“总复习”5 册；初中部分“同步学练考”12 册，“总复习”5 册；小学部分“总复习”3 册。

在丛书栏目设计上，根据黄冈中学多年的教学经验作了精心的安排，具体是：

同步学练考类由六部分组成：(1)**知识精华点击** 浓缩本单位知识精华，揭示其内在规律与联系。(2) **高频考点聚焦** 指出本单位相关考点(特别是高频考点)，以及涉及到的知识、方法、思路和技巧。(3)**经典名题研究** 选择一个知识覆盖面较广、技巧性较强、方法较典型的题目作为本栏目例题进行研究探讨，起到举一反三、以少胜多的效果。(4)**创意新题探索** 本栏目为黄冈名师自编或改编的例题。本栏目标新立异，分析解答上侧重启迪思想、引导探索，以激发学生学习的兴趣。(5)**典型错误透析** 本栏目抓住学生的"多发病"、"常见病"，选择学生容易出错的问题设计例题，对典型错误进行剖析，指出错误关键所在，防患于未然，最后给出正确解答。(6)**智能训练设计** 本栏目题型多样，既有精心挑选的选择题、填空题，又有活而不死、难而不繁的解答题或证明题，并对所选题目进行了由易到难、由模仿到创新、由简单到复杂的精心组合，使练习既是一个对所学知识巩固提高的过程，又是一个创造探索的过程。

另外，理科各章、文科各单元、期中、期末均含由黄冈名师设计的经典同期模拟测试题一套。练习和测试题均在书后给出答案。

总复习类由四部分组成：(1)**要点考点聚焦** 列出复习重点，提示相关考点以及涉及到的知识、方法、思路、技巧。(2)**综合问题导引** 一般选择 1～2 个知识覆盖面广、求解方法多样的例题，训练学生的综合思维能力。其中难题附有分析及解答。(3)**创新应用探索** 自编或改编若干例题，引导学生发现规律、学以致用。(4)**强化训练精编** 复习、强化所学内容，每单位巧妙设计了选择题、填空题、解答题等各种类型的系列题目。

另外，理科各章、文科各单元、期中、期末均含由黄冈名师设计的经典同期模拟测试题一套。练习和测试题均在书后给出答案。

本丛书编写过程中有考虑不周之处，望广大读者批评指正，并请你们把有关本丛书的意见告之我们，以便以后不断修订、提高。

目　录

第一章 集合与简易逻辑

一、集 合

● 要点考点聚焦

1. 本节复习要点是集合中元素的性质、集合的表示法及元素与集合的关系.

2. 明确集合元素的确定性、互异性和无序性,要注意此性质在解题中的作用. 重视发挥图示法和特值法的作用. 对于用描述法给出的集合 $\{x \mid x \in M\}$, 则应抓住竖线前面的代表元素 x 以及它所具有的性质 M.

3. 本节相关考点是理解集合的概念,了解属于关系的意义,会正确表示一些简单集合.

● 综合问题导引

例 设 $M=\{a \mid a=x^2-y^2,\ x、y \in \mathbf{Z}\}$. (1)求证:一切奇数属于 M;(2)求证:偶数 $4k-2(k \in \mathbf{Z})$ 不属于 M;(3)求证:属于 M 的两个整数,其积仍属于 M;(4)若 x_1、$x_2 \in M$, 那么 x_1+x_2 是否一定属于 M?

分析 无论是判断元素与 M 的关系,还是证明元素与 M 的关系,都应先判断元素是否满足属性:能够写成两个整数的平方差.

解 (1)设 a 为任意奇数,记 $a=2k-1$, $k \in \mathbf{Z}$. 因 $2k-1=k^2-(k-1)^2$, k、$k-1 \in \mathbf{Z}$, 故 $a \in M$, 由 a 的任意性知,一切奇数属于 M;(2)假设 $4k-2 \in M$, 则存在 x、$y \in \mathbf{Z}$, 使得 $4k-2=x^2-y^2$, 即 $(x+y)(x-y)=2(2k-1)$ ①. ①式说明 $x+y$ 和 $x-y$ 必有一个偶数、一个奇数;但 $x+y$ 与 $x-y$ 的奇偶性相同,这就导致矛盾. 故①式不成立,即 $4k-2 \notin M$; (3)设 a、$b \in M$, 则 $a=x_1^2-y_1^2$, $b=x_2^2-y_2^2(x_1、x_2、y_1、y_2 \in \mathbf{Z})$, 因为 $a \cdot b=(x_1^2-y_1^2)(x_2^2-y_2^2)=x_1^2x_2^2+y_1^2y_2^2-x_1^2y_2^2-x_2^2y_1^2=(x_1x_2-y_1y_2)^2-(x_1y_2-x_2y_1)^2$, 而 $x_1x_2-y_1y_2 \in \mathbf{Z}$, $x_1y_2-x_2y_1 \in \mathbf{Z}$, 故 $a \cdot b \in M$; (4)显然 $0 \in M$, $1 \in M$, 则 $0+1=1 \in M$; $9 \in M$, 但 $1+9=10 \notin M$. 这说明,当 x_1、$x_2 \in M$ 时, x_1+x_2 不一定属于 M.

● 创新应用探索

例 如果对于一个集合中任意两个元素,它们相加和相乘后的结果仍在这个集合中,则称该集合对于加乘运算自封闭. 试举出加乘运算自封闭的 5 个集合.

分析与解 由于要对集合中两个元素作加乘运算,所以集合中至少应有两个元素,这样可得到以下一些答案:(1) $\{0, 1\}$; (2) $\{0, a\}$,其中 a 是非零实数; (3) $\{y \mid y=m+\sqrt{2}n,\ m、n \in \mathbf{N}_+\}$; (4) $\{y \mid y=m+\sqrt{3}n,\ m、n \in \mathbf{N}_+\}$; (5) 自然数集 $\mathbf{N}_+$ (整数集 $\mathbf{Z}$;有理数集 $\mathbf{Q}$ 等).

强化训练精编

1. 设 $M=\{x \mid x \leqslant 2\sqrt{3}\}$，$a=\sqrt{11+\sin x}$，其中 $x \in \left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$，则下列关系中正确的是　　（　　）

A. $a \subset M$　　　B. $a \notin M$　　　C. $\{a\} \in M$　　　D. $\{a\} \subset M$

2. 集合 $\{(x,\ y) \mid y=-2x^2+x-1,\ x \in \mathbf{R},\ x \neq 0\}$ 表示的点集在　　（　　）

A. 第二象限内　　　B. 第四象限内　　　C. 第三、四象限内　　　D. 第一、四象限内

3. 以某些整数为元素的集合 P 具有性质：①P 中的元素有正数，有负数；②P 中的元素有奇数，有偶数；③ $-1 \notin P$；④若 x、$y \in P$，则 $x+y \in P$. 则正确的一个结论是　　（　　）

A. $0 \in P,\ 1 \in P$　　　B. $0 \notin P,\ 1 \in P$　　　C. $0 \in P,\ 1 \notin P$　　　D. $0 \notin P,\ 1 \notin P$

4. 集合 $\left\{y \,\middle|\, y=\sin \frac{\pi}{4}x,\ x \in \mathbf{N}\right\}$ 用列举法可表示为______

5. 设集合 $A=\{x \mid x=a+b\sqrt{2},\ a、b \in \mathbf{Z}\}$，对 $m \in A,\ n \in A$，有如下结论：① $m+n \in A$；② $m-n \in A$；③ $m \cdot n \in A$；④ $\frac{m}{n} \in A(n \neq 0)$，其中错误的序号是______

6. 用适当的方法表示下列集合：

(1) 方程组 $\begin{cases} 5x^2-y^2=1 \\ y=x \end{cases}$ 的解集；

(2) 坐标平面内，由二、四象限内的点或坐标轴上的点组成的点集；

(3) 设 x、y、z 都是非零实数，$M=\frac{x}{|x|}+\frac{y}{|y|}+\frac{z}{|z|}+\frac{xy}{|xy|}+\frac{xyz}{|xyz|}$ 可能取到的值所组成的集合；

(4) 被 3 除余 1 的正整数组成的集合.

7. 已知 $M=\{x \mid x^2+ax+b=x,\ x \in \mathbf{R}\}$，$N=\{x \mid (x-1)^2+a(x-1)+b=x+1\}$，当 $M=\{2\}$ 时，求集合 N.

8. 非空数集 A 满足：若 $a \in A,\ a \neq 1$，则 $\frac{1}{1-a} \in A$. (1)若 $2 \in A$，求满足题设条件的一个集合 A；(2)求证集合 A 不可能是单元素集；(3)求证集合 A 中至少有 3 个不同元素. 满足条件的集合 A 不唯一.（无穷多个）例：$A=\left\{2,\ -1,\ \frac{1}{2},\ 3,\ -\frac{1}{2},\ \frac{2}{3}\right\}$. 所以或者求唯一一个 A，或变为开放性题，求其中一个.

二、集合的运算(一)

要点考点聚集

1. 本节复习要点是集合的子、交、并、补集的意义及运算.

2. 正确理解集合的子、交、并、补集的意义，是熟练进行集合运算的基础. 在运算时，要注意首先化简给定的集合.

3. 由于集合的子、交、并、补关系直观形象的显示有利于运算，所以要十分重视数形结合思想的运用. 另外，离散集、抽象集的解决常辅以文氏图（韦恩图）；连续数集的解决常辅以数轴；点集的解决常辅以平面直角坐标系.

4. 注意集合性质的应用. 如 $A \cap B=A \Leftrightarrow A \subseteq B$，$A \cup B=B \Leftrightarrow A \subseteq B$，$A \cup (B \cup C)$

$=(A\cup B)\cup C$, $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$ 等.

5. 本节相关考点是集合的运算.

● 综合问题导引

例 设 $A=\{x\mid x^2+4x=0\}$, $B=\{x\mid x^2+2(a+1)x+a^2-1=0\}$. (1)若 $A\cap B=B$, 求 a 的值;(2)若 $A\cup B=B$, 求 a 的值.

分析 可根据条件对集合中待定字母的值加以讨论,同时要注意特殊与一般的关系.

解 $A=\{0,-4\}$, (1) $A\cap B=B\Rightarrow B\subseteq A$, 当 $0\in B$ 时, $a^2-1=0$, 得 $a=\pm1$. 若 $a=1$, 则 $B=\{x\mid x^2+4x=0\}=A$. 若 $a=-1$, 则 $B=\{0\}\subset A$; 当 $-4\in B$ 时, $a^2-8a+7=0$, 得 $a=7$ 或 $a=1$. 若 $a=7$, 则 $B=\{x\mid x^2+16x+48=0\}=\{-12,-4\}\not\subseteq A$; 又当 $B=\varnothing$ 时,则 $\Delta=4(a+1)^2-4(a^2-1)<0$, 解得 $a<-1$. 综上所述, $a\leqslant-1$ 或 $a=1$. (2) $A\cup B=B\Rightarrow A\subseteq B$, 因为 $A=\{0,-4\}$, 而 B 中最多有两个元素,所以只能 $A=B$, 此时 $a=1$.

● 创新应用探索

例 图 1-1 是某保险公司提供的资料,在 1 万元以上的保险单中,有 $\frac{8}{21}$ 少于 2.5 万元,那么超过或等于 2.5 万元的保险单有______万元.

分析与解 不少于 1 万元的占 700 万元的 21%,则为 $700\times21\%=147$ (万元). 1 万元以上保单中, $\frac{8}{21}$ 少于 2.5 万元,则超过或等于 2.5 万元的保单为 $\frac{13}{21}\times147=91$ (万元).

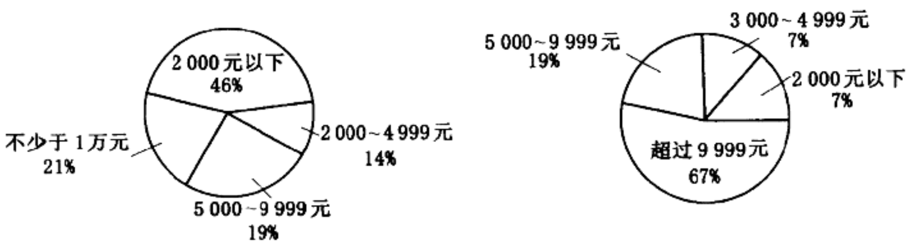

图 1-1

● 强化训练精编

1. 如图 1-2 所示,阴影部分的集合可表示为 ( )

A. $A\cap[(\complement_U B)\cap(\complement_U C)]$

B. $A\cup[(\complement_U B)\cap(\complement_U C)]$

C. $\complement_U A\cup(B\cap C)$

D. $\complement_U A\cap(B\cup C)$

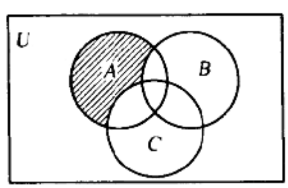

图 1-2

2. 集合 $I=\{1,2,3,4,5\}$ 为全集, $S\subsetneqq I$, $T\subset I$, 若 $S\cap T=\{2\}$, $(\complement_I S)\cap T=\{4\}$, $(\complement_I T)\cap(\complement_I S)=\{1,5\}$, 则有 ( )

A. $3\in S,\ 3\in T$　　　　B. $3\in \complement_I S,\ 3\in T$

C. $3\in S,\ 3\in \complement_I T$　　　　D. $3\in \complement_I S,\ 3\in \complement_I T$

3. 若集合 A_1、A_2 满足 $A_1\cup A_2=A$，则称$(A_1,\ A_2)$为集合 A 的一种分拆，并规定：当且仅当 $A_1=A_2$ 时，$(A_1,\ A_2)$与$(A_2,\ A_1)$为集合 A 的同一种分拆. 则集合 $A=\{a_1,\ a_2,\ a_3\}$ 的不同分拆种数是　　(　　)

A. 27　　B. 26　　C. 9　　D. 8

4. 设集合 $P=\{x\mid -2<x<0$ 或 $x>1\}$，$Q=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$，$P\cup Q=\{x\mid x>-2\}$，$P\cap Q=\{x\mid 1<x\leqslant 3\}$，则 $a=$ ______，$b=$ ______.

5. 若全集 $I=\left\{x\,\middle|\,x=\dfrac{1}{2^n},\ n\in \mathbf{N}_+\right\}$，集合 $A=\left\{x\,\middle|\,x=\dfrac{1}{4^n},\ n\in \mathbf{N}_+\right\}$，则 $\complement_I A=$ ______.

6. 已知 $A=\left\{x\,\middle|\,\dfrac{x+1}{2-x}<0\right\}$，$B=\{x\mid px+4<0\}$，若 $B\subseteq A$，求实数 p 的取值范围.

7. 已知全集 $I=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$，$A\subseteq I$，$B\subseteq I$，且 $\complement_I A\cap B=\{1,\ 9\}$，$A\cap B=\{2\}$，$\complement_I A\cap \complement_I B=\{4,\ 6,\ 8\}$，求 A 和 B.

8. 已知集合 $A=\{x\mid x^2+px+q=0\}$，$B=\{x\mid qx^2+px+1=0\}$ 同时满足① $A\cap B\neq\varnothing$；② $A\cap(\complement_U B)=\{-2\}(p、q\neq 0)$，求 p、q 的值.

三、集合的运算(二)

● 要点考点聚集

1. 本节复习要点是集合的子、交、并、补集的运算，集合语言和集合思想的运用.

2. 对含参数的集合问题，多根据集合的互异性来处理，有时需要分类讨论.

3. 集合问题常与函数、方程、不等式等有关，在解答有关集合的综合问题时，要注意等价转换思想的运用. 常将集合化简或转化为熟知的代数、三角、几何问题等.

4. 关注空集$\varnothing$，在考察两个集合的关系时，$\varnothing$是任何集合的子集容易被忽视，在解题时应引起注意.

5. 设全集为 I，A、B 是 I 的子集，用 $\mathrm{card}(A)$、$\mathrm{card}(B)$表示有限集 A、B 中元素的个数，则有以下结论：$\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)-\mathrm{card}(A\cap B)$；$\mathrm{card}(I)=\mathrm{card}(A\cup B)+\mathrm{card}(\complement_I(A\cup B))$.

6. 本节相关考点是集合的运算，集合语言和集合思想的运用.

● 综合问题导引

例　已知集合 $A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x\mid x^2-ax+(a-1)=0\}$，$C=\{x\mid x^2-mx+2=0\}$，且 $A\cup B=A$，$A\cap C=C$，求 a、m.

分析　可先从 $A\cup B=A$，$A\cap C=C$ 中去确定 B 与 A，或 C 与 A 的关系，从而再通过判断 B、C 中元素的可能性，求出 a、m 的值.

解　由 $A\cup B=A$，可知 $B\subseteq A$，易求 $A=\{1,\ 2\}$. 方程 $x^2-ax+(a-1)=0$ 的二根为 1，$a-1$. 所以 B 中的元素 $a-1$ 可能为 1 或 2. 若 $a-1=1$，则 $B=\{1\}$；若 $a-1=2$，则 $B=\{1,\ 2\}$，$\therefore a=2$ 或 3. 又由 $A\cap C=C$ 可知 $C\subseteq A$，则 C 中的元素有三种可能：

①若方程 $x^2-mx+2=0$ 有两个不同的根 1 或 2 时，$m=3$；②若方程 $x^2-mx+2=0$ 有两个等根时，由 $\Delta=0$，得 $m=\pm2\sqrt{2}$，但此时方程的根为$\sqrt{2}$，$C\not\subset A$，故 $m\neq\pm2\sqrt{2}$；③若方程 x^2-mx+2 无实根，由 $\Delta<0$，得 $-2\sqrt{2}<m<2\sqrt{2}$，$C=\varnothing$，满足 $A\cap C=C$. 综上可知，$m=3$ 或 $-2\sqrt{2}<m<2\sqrt{2}$.

● 创新应用探索

例 集合 A 满足条件：若 $a\in A(a\in\mathbf{N})$，则 $f(a)=\dfrac{a}{2a+1}\in A$，且 $f(f(a))\in A$，… 如此下去.(1)若集合 A 为单元素集，求 a 和集合 A；(2)请你用描述法写出一个满足条件的非单元素集合(不含字母 a)，并考虑说明这样的集合有规律吗?

分析 为写出一个不含字母 a，且满足条件的非单元素集，可考虑对 a 取特值. 为寻找这样的集合的规律，则可把集合中的元素看成是某个数列中的项，利用数列的有关知识进行处理.

解 (1) $a=0$，集合 $A=\{0\}$；(2)若 $a=1\in A$，则 $\dfrac{a}{2a+1}=\dfrac{1}{3}\in A$，又有 $f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{5}\in A$，$f\left(\dfrac{1}{5}\right)=\dfrac{1}{7}\in A$ …，故满足条件的一个集合 $A=\left\{x\,\middle|\,x=\dfrac{1}{2n-1},\ n\in\mathbf{N}_+\right\}$. 因 $a\in\mathbf{N}_+$，可将集合 A 中的元素看作是某个数列中的项，且 $a_1=a$，即 $a_n=\dfrac{a_{n-1}}{2a_{n-1}+1}(n\geqslant2$，$n\in\mathbf{N})$，所以 $\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_{n-1}}=2$，$a_n=\dfrac{1}{\dfrac{1}{a}+2n-2}$. 因此，当 a 取不同的自然数时，就可得到不同集合 A. 如取 $a=2$，可得到一个满足题设条件的集合 $A=\left\{x\,\middle|\,x=\dfrac{2}{4n-3},\ n\in\mathbf{N}_+\right\}$.

● 强化训练精编

1. 设集合 $M=\{x\mid\sqrt{x^2}>2\}$，$N=\{x\mid\log_x7>\log_37\}$，那么 $M\cap(\complement_RN)$ 为 ( )

   A. $\{x\mid x<-2\}$　　B. $\{x\mid x<-2$ 或 $x\geqslant3\}$

   C. $\{x\mid x\geqslant3\}$　　D. $\{x\mid-2\leqslant x<3\}$

2. 已知 $S=\{(x,y)\mid|x-\lg y|=x+\lg y\}$，则 S 等于 ( )

   A. $\{(x,y)\mid y=1$ 且 $x\geqslant0\}$

   B. $\{(x,y)\mid x=0$ 且 $y\geqslant1\}$

   C. $\{(x,y)\mid x(y-1)=0$ 且 $y>0\}$

   D. $\{(x,y)\mid y=1$ 且 $x\geqslant0\}\cup\{(x,y)\mid x=0$ 且 $y>1\}$

3. 已知 $A=\{x\mid|x+2|\geqslant1\}$，$B=\{x\mid x^2-x-6<0\}$，则 $(\complement_RA)\cup(\complement_RB)$为 ( )

   A. $\{x\mid x\leqslant1$或 $x\geqslant3\}$　　B. $\{x\mid x\leqslant-3$或 $x>-2\}$

   C. $\{x\mid x<-1$或 $x\geqslant3\}$　　D. $\{x\mid x<1$或 $x>3\}$

4. 已知集合 M 满足$\{2,5\}\subseteq M\subsetneqq\{1,2,3,4,5\}$，则不同的 M 的个数是______

5. 已知 $A=\{x\mid x^2+(p+2)x+1=0,\ x\in\mathbf{R}\}$，若 $A\cap\mathbf{R}^+=\varnothing$，则实数 p 的取值范围是______

6. 调查 100 名携带药品出国的旅游者，其中 75 人带有感冒药，80 人带有胃药. 那么既带感冒药又带胃药的人数的最大和最小值分别是多少?

7. 若 $M=\left\{x\,\middle|\,\dfrac{\lg 2ax}{\lg(a+x)}<1\right\}$, $N=\{x\,|\,1<x\leqslant 2\}$, 且 $N\subseteq M$, 求 a 的取值范围.

8. 已知集合 $A=\{x\,|\,x^2-5x+4\leqslant 0\}$, $B=\{x\,|\,x^2-2ax+a+2<0,\ a\in\mathbf{R}\}$, 满足 $B\subseteq A$, 求 a 的取值范围.

四、含绝对值的不等式的解法

● 要点考点聚焦

1. 本节复习要点是实数的绝对值意义, $|x|<a$ 与 $|x|>a(a>0)$ 型及 $|ax+b|<c$ 与 $|ax+b|>c(c>0)$ 型不等式的解法.

2. 解含有绝对值的不等式的基本思路是设法去掉绝对值符号.常用方法有:

(1) $|f(x)|>a(a>0)\Leftrightarrow f(x)>a$ 或 $f(x)<-a$; $|f(x)|<a(a>0)\Leftrightarrow -a<f(x)<a$;

(2) $|f(x)|>a(a>0)\Leftrightarrow[f(x)]^2>a^2$; $|f(x)|<a(a>0)\Leftrightarrow[f(x)]^2<a^2$;

(3) 含有两个或两个以上绝对值符号的不等式,一般是对未知数的取值区间进行讨论,但在求解过程中,要注意对区间端点的讨论,以免漏解.

3. 注重数形结合法在解含绝对值的不等式时的作用.注意掌握函数 $|f(x)|$ 和 $f(|x|)$ 的图象的画法与应用.

4. 本节相关考点是会解含绝对值的不等式.

● 综合问题导引

例 解不等式 $1\leqslant|3-x|<6$.

分析 $1\leqslant|3-x|<6$ 等价于 $\begin{cases}1\leqslant|3-x|,\\|3-x|<6.\end{cases}$ 本题实际上是要解不等式组,也可根据绝对值的定义,结合数轴进行转化.

解法一 $1\leqslant|3-x|<6$ 等价于 $\begin{cases}1\leqslant|x-3| & ①,\\|x-3|<6 & ②.\end{cases}$ 由① $x\leqslant 2$ 或 $x\geqslant 4$, 由② $-3<x<9$, 故原不等式的解集为 $\{x|x\leqslant 2$ 或 $x\geqslant 4\}\cap\{x|-3<x<9\}=\{x|-3<x\leqslant 2$ 或 $4\leqslant x<9\}$.

解法二 原不等式 $\Leftrightarrow 1\leqslant|x-3|<6\Leftrightarrow 1\leqslant x-3<6$ 或 $-6<x-3\leqslant -1$, 解得 $4\leqslant x<9$ 或 $-3<x\leqslant 2$, 故原不等式解集为 $(-3,2]\cup[4,9)$.

● 创新应用探索

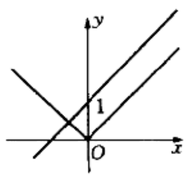

图 1-3

例 已知关于 x 的不等式 $|x|>ax+1$ 的解集是 $\{x|x\leqslant 0\}$ 的子集,求 a 的范围.

分析 本题若对 x 进行讨论,则会较繁琐.可利用数形结合,令 $y_1=|x|$, $y_2=ax+1$, 通过讨论直线 $y_2=ax+1$ 的位置得出正确

结论.

解 设 $y_1=|x|$, $y_2=ax+1$, 显然直线 $y_2=ax+1$ 过定点(0, 1), 让此直线绕点(0, 1)旋转, 通过旋转即知, 当 $a\geqslant 1$ 时, 不等式 $|x|>ax+1$ 的解集为 $\{x|x\leqslant 0\}$ 的子集.

● 强化训练精编

1. 若实数 a、b、c 满足 $|a-c|<|b|$, 则下列不等式中成立的是 ( )

   A. $|a|>|b|-|c|$　　B. $|a|<|b|+|c|$

   C. $a>c-b$　　D. $a<b+c$

2. 不等式组 $\begin{cases}x>0\\ \dfrac{3-x}{3+x}>\left|\dfrac{2-x}{2+x}\right|\end{cases}$ 的解集是 ( )

   A. $\{x|0<x<3\}$　　B. $\{x|0<x<2.5\}$

   C. $\{x|0<x<\sqrt{6}\}$　　D. $\{x|\sqrt{6}<x<3\}$

3. 对任意实数 x, 若不等式 $|x+1|-|x-2|>k$ 恒成立, 则 k 的取值范围是 ( )

   A. $k<3$　　B. $k<-3$　　C. $k\leqslant 3$　　D. $k\leqslant -3$

4. 若 $A=\{x||2-x|>3\}$, $B=\{x||x+3|<5\}$, 则 $A\cap B=$ ______

5. 不等式 $1\leqslant\left|\dfrac{1}{x-2}\right|\leqslant 2$ 的解集为______

6. 设集合 $A=\{x||x-a|<2\}$, $B=\left\{x\left|\dfrac{2x-1}{x+2}<1\right.\right\}$, 若 $A\subseteq B$, 求实数 a 的取值范围.

7. 解不等式 $\dfrac{1+|x|}{|x|-1}\geqslant 3$.

8. 设有关于 x 的不等式 $\lg(|x+3|+|x-7|)>a$. (1)当 $a=1$ 时, 解这个不等式; (2)当 a 为何值时, 这个不等式的解集为 **R**.

五、一元二次不等式的解法

● 要点考点聚焦

1. 本节复习要点是二次函数、一元二次方程、一元二次不等式之间的区别和联系, 以及利用二次函数的图象和根的分布解一元二次不等式.

2. 解一元二次不等式时, 应先考察相应的二次方程, 根据二次项系数的符号确定不等式解的形式, 同时考虑相应的二次方程根的大小.

3. 二次不等式的解集有两种特殊情况, 即空集 $\varnothing$ 和全体实数集 **R**, 可结合二次函数的图象帮助分析和记忆.

4. 若不等式中含有参变数, 则要对参变数在取值范围内进行完整全面的分类讨论.

5. 本节相关考点是会解一元二次不等式.

● 综合问题导引

例 试求所有实数 a 的值, 使得适合不等式 $ax^2+(1-a^2)x-a>0$ 的 x 满足 $|x|\leqslant 2$.

解 若 $a=0$，则不等式化为 $x>0$，显然不满足 $|x|\leqslant 2$；若 $a\neq 0$，求得方程 $ax^2+(1-a^2)x-a=0$ 有两实根 $x_1=a$，$x_2=-\frac{1}{a}$，当 $a>0$ 时，不等式的解为 $x>a$ 或 $x<-\frac{1}{a}$，显然不满足 $|x|\leqslant 2$；当 $a<0$ 时，不等式的解为 $a<x<-\frac{1}{a}$，要满足 $|x|\leqslant 2$，必须 $-2\leqslant a<-\frac{1}{a}\leqslant 2$，且 $a<0$，解得 $-2\leqslant a\leqslant -\frac{1}{2}$. ∴适合条件的所有实数 $a\in\left[-2,-\frac{1}{2}\right]$.

● 创新应用探索

例 某种消费品每件 60 元，不收附加税时，每年大约销售 80 万件，若政府征收附加费时，每销售 100 元，要征收 p 元(叫做税率 $p\%$)，则每年销售量将减少$\frac{20p}{3}$万件. 要使每年在此项经营中所收税金不少于 128 万元，问税率应在什么范围？当税率为多少时税金最多？最多税金为多少？

分析 税金＝销售量×销售收入×税率，关键是征收附加税后，销售量的确定.

解 征收附加税后，每年的销售量为 $\left(80-\frac{20p}{3}\right)$ 万件，于是销售收入为 $60\left(80-\frac{20p}{3}\right)$ 万元，税金 $f(p)=60\left(80-\frac{20p}{3}\right)\cdot p\%$. 令 $f(p)\geqslant 128$，得 $p^2-12p+32\leqslant 0$，解得 $4\leqslant p\leqslant 8$，故税率的取值范围是$[4\%,8\%]$. 因为 $f(p)=-4(p-6)^2+144$，当且仅当 $p=6$ 时，$f(p)$取最大值 144. 所以当税率是 6%时，税金达到最大值 144 万元.

● 强化训练精编

1. 不等式 $x^2-(a^2+a)x+a^3>0$ 的解集为 $\{x\mid x<a^2$ 或 $x>a\}$，则 a 的取值范围是 ( )

A. $0<a<1$　　B. $a<0$ 或 $a>1$　　C. $0\leqslant a\leqslant 1$　　D. $a\leqslant 0$ 或 $a\geqslant 1$

2. 集合 $P=\{m\mid -4<m<0\}$，$Q=\{m\mid$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 不等式 $mx^2-mx-1<0$ 恒成立$\}$，则 ( )

A. $P\cap Q=\varnothing$　　B. $P=Q$　　C. $P\subsetneqq Q$　　D. $Q\subsetneqq P$

3. 不等式 $ax^2+bx+2>0$ 的解集为 $\left\{x\middle|-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{3}\right\}$，则 $a+b$ 的值为 ( )

A. 10　　B. -10　　C. 14　　D. -14

4. 不等式 $|x^2-x-2|>6$ 的解集为______

5. 关于 x 的不等式 $\frac{2x^2+2kx+k}{4x^2+6x+3}<1$ 的解集是 $\mathbf{R}$，则 k 的取值范围是______

6. 若不等式 $x^2-5x+6<0$ 的解集也满足关于 x 的不等式 $2x^2-9x+a<0$，求 a 的取值范围.

7. 若不等式组 $\begin{cases}x^2-x-2>0\\2x^2+(5+2k)x+5k<0\end{cases}\left(k<\frac{5}{2}\right)$ 的整数解只有-2，求 k 的取值范围.

8. 方程 $x^2+4ax-4a+3=0$，$x^2+(a-1)x+a^2=0$，$x^2+2ax-2a=0$ 中至少有一个方程有实根，求实数 a 的取值范围.

六、逻辑联结词

● 要点考点聚焦

1. 本节复习要点是命题的概念,“或”、“且”、“非”的含义,复合命题的构成形式以及真值表的运用.

2. “或”、“且”、“非”的含义在集合中分别相当于“并集”、“交集”、“补集”.

3. 判断一个命题的真假时,是真命题应验出证明,对假命题只要举出一个简单明确的反例即可.

4. 判断一个命题是简单命题还是复合命题,不能仅从命题的字面上看是否有“或”、“且”、“非”,而应当从命题的结构特征上进行分析后作出判断.

5. 判断一个复合命题的真假可分三步进行:

(1) 明确命题的形式是 p 或 q,p 且 q,还是非 p;

(2) 判断构成此复合命题的简单命题的真假;

(3) 用真值表作出复合命题真假的判断.

6. 本节相关考点是复合命题真假的判断.

● 综合问题导引

例 判断下列复合命题的真假:(1)等腰三角形顶角的平分线平分底边并且垂直于底边;(2) $x=\pm 1$ 是方程 $x^2+3x+2=0$ 的根;(3) $A \subsetneqq (A \cup B)$.

分析 先确定复合命题的构成形式及构成它的简单命题,其次讨论各简单命题的真假,再用真值表确定结论.

解 (1)此命题是“p 且 q”的形式,其中 p:等腰三角形顶角的平分线平分底边,q:等腰三角形顶角的平分线垂直于底边,因 p 真 q 真,则“p 且 q”真,故此命题真.(2)此命题是“p 或 q”的形式,其中 p:1 是方程 $x^2+3x+2=0$ 的根,q:-1 是方程 $x^2+3x+2=0$ 的根,因 p 假 q 真,则“p 或 q”真,故该命题真.(3)此命题是“非 p”的形式,其中 p: $A \subseteq (A \cup B)$,因 p 真,则“非 p”假,故该命题假.

● 创新应用探索

例 已知全集 $U=\mathbf{R}$, $A \subsetneqq U$, $B \subsetneqq U$, 如果命题 p 为:$\sqrt{3} \in A \cup B$, 则命题“非 p”是 ( )

A. $\sqrt{3} \notin A$　　B. $\sqrt{3} \in \complement_U B$

C. $\sqrt{3} \notin A \cap B$　　D. $\sqrt{3} \in (\complement_U A) \cap (\complement_U B)$

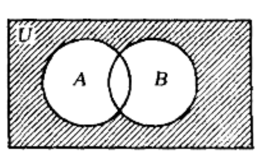

图 1-4

分析与解 如图 1-4,阴影部分可表示为 $(\complement_U A) \cap (\complement_U B)$,在 $\sqrt{3} \in U$ 的前提下,$\sqrt{3} \in A \cup B$ 的否定为 $\sqrt{3} \notin A \cup B$, 即 $\sqrt{3} \in (\complement_U A) \cap (\complement_U B)$, 选 D.