工业专科学校試用教科書

高等数学

GAODENG SHUXUE

（无綫电类型部分）

湖北省三年制工业专科学校
高等数学教材选編組选編

湖 北 人 民 出 版 社

工业專科学校試用教科書

高 等 數 學

（无綫电类型部分）

湖北省三年制工業專科学校
高等數学教材选編組选編

湖 北 人 民 出 版 社

内容提要

本书是适应三年制工业专科学校无綫电类型专业的数学需要而选編的。可作为这类专业的学生学完高等数学基础部分之后进一步学习高等数学的教材。其內容包括場論、复变函数、数理方程、特殊函数与拉普拉斯变换。全书教学时数估計为60学时。

本书也可作为二年制工业专科学校无綫电类型专业高等数学教材。其他二、三年制工科专业，如果对高等数学的內容、分量的要求与无綫电类型专业相近，亦可采用。

工业專科学校試用教科书
高等数学
（无線電類型部分）
湖北省三年制工业專科学校
高等数学教材选編組选編
*
湖北人民出版社出版（武汉解放大道332号）
武汉市书刊出版业营业許可証新出字第1号
湖北省新华书店发行
武汉市国营武汉印刷厂印刷
*
787×1092毫米 $\frac{1}{32}$ · $3\frac{7}{8}$ 印張 · 89,000字
1961年7月第 1 版
1961年7月第1次印刷
印數：1—6,150
統一书号：13106·24
定　价：0.40元

序

为解决工业专科学校基础課和各类专业共同的基础技术課的教材問題。中央教育部責成我們：組織选編高等数学、普通物理、普通化学、俄語、工程力学、画法几何及制图、机械原理及机械零件、电工学、热机学及金屬工艺学等10門課程的19种教材；同时要求在四月全部脫稿，并在質量上比現有教材有所提高。

对于我們的力量来說，这个任务是艰巨的。但我們也認識到，这是貫彻"調整、巩固、充实、提高"的八字方針和提高教学質量的重要措施之一；从当前工业专科学校教材缺乏的严重情况来看，是一項政治任务。应該尽我們最大的努力去完成。为此，我們一面紧紧依靠中央教育部和中共湖北省委宣傳部的領导，一面从我省24所高等院校中抽出91位教师集中力量进行选編工作；并承广东省高等教育局的协助，选派了四位教师参加。这就使我們的工作既有明确的方向；又有比較可靠的力量，保証了任务的完成。

在选編过程中，我們特別注意了如下几个問題。首先是从工业专科学校的实际出发。由于时間紧迫，而又沒有現成的工业专科学校的教材作为选編基础，我們只好从本科教材中选擇一些适当的藍本进行加工。根据这种客观情况，我們一再强調选編教材的分量与質量要从工业专科学校的教学要求出发；要注意到专科和本科的培养目标、每門課程的具体任务和学时数都是不同的。

其次，由于目前专科学校的教学条件（比如教师和学生的水平、教学仪器設备等等）还比較差，学生負担也比較重，因此我

們特别强调貫彻"少而精"的原則，吸收几年来各校对課程內容精簡、加深、更新的經驗，反对不适当地"求多、求全、求深、求新"的思想。

第三，由于我們选編的是通用的基础課和基础技术課的教材，为了使学生获得比較广博和巩固的基础理論知識，对于基础課，我們特别注意了貫彻"在保持科学系統性和基本內容的前提下，密切联系实际和适当結合专业"的原則。对于基础技术課，虽然具体課程都經过具体分析，但基本上也都是根据上述原則进行选編的。

为达到上述目的，参加选編工作的教师同志們曾进行多次調查訪問，对原稿进行反复討論、修改和审查。但由于任务重，时間紧，特别是經驗不足，水平有限，我們这次选編的教材，只是解决了"有无"的問題。缺点和錯誤是在所难免的。恳切希望使用这些教材的全体师生同志們，多多給我們提供意見，以便今后进行修改，使这些教材的質量逐步得到提高。

湖北省教育厅

1961年5月10日

选編說明

（高等数学无綫电类型专业部份）

本書是为三年制工业专科学校选編的高等数学教材，供无綫电类型专业的学生繼学完高等数学基础部份之后使用。全書共分五章。各章采用蓝本情形如下。第一章场論采自湖北省发行的十年制教材，未做甚大变动。第二章复变函数主要采自武汉水利电力学院数学教研室編高等数学下册有关部份，但为了切合专科使用，做了較大的删减，只保留了最基本的几部份；又为避免与中学教材不必要的重复，复数一节改用了天津大学等二十七校所編高等数学水土类型专业部份有关內容。第三章特殊函数，第四章数理方程及第五章拉普拉斯变換主要采自天津大学等二十七校所編高等数学无綫电类型专业部份。根据同一理由，都做了很大删减。同时第三、四两章还参考武汉邮电学院等校所編教材做了一些补充；如第三章仅保留了几个类型的貝賽尔函数，补进Γ函数的簡单介紹；第四章仅保留波动方程和拉普拉斯方程，且其中个别例題，估計学生专业知識衔接不上难以接受，我們也把它删减了。第五章所保留的內容，只集中一点，一切为解微分方程服务，其他內容，概予删去。

本教材有以下几个特点：

1. 保証了基本內容和各部份的科学系統性，

2. 密切联系实际，尽可能地結合专业，

3. 在內容处理上，对定理的繁难証明，尽量代以直观的說明，或只提出而不作詳細証明俾便于教学。

本教材是由舒以太、李小倩、何錫珍等同志选編的，复經李修睦、齐民友、罗汝梅等同志审訂修改。大家水平有限；且时間仓卒，变动原著的地方，又未能和原編写人协商。不当之处，在所难免、希望見到或使用本教材的同志尽量提供意見，以便修改提高。

目　录

第一章　場論初步

§ 1.1 数量場和矢量場

分布在空間某一区域上的某种物理量，在这个区域中构成一个场。有些物理量只有数量上的大小，而沒有方向，这种物理量的场叫做**数量場**，例如一个物体内各点的溫度所成的溫度场就是一个数量场。从数学上看来，数量场就是定义在某一区域中的函数（这个函数可能还依賴于时間 t）：

$$u(M,\ t)=u(x,\ y,\ z,\ t).$$

另一些物理量是矢量，这种物理量的场叫做**矢量場**，例如靜电场的电场强度 $\mathbf{E}$、引力场中的引力都是矢量，所以由它們所构成的场都是矢量场。从数学上看来，矢量场就是在某一区域的每一点上都确定一个矢量（可能隨时間 t 变化）：

$$\mathbf{A}(M,\ t)=A_x(M,\ t)\boldsymbol{i}+A_y(M,\ t)\boldsymbol{j}+A_z(M,\ t)\boldsymbol{k}.$$

§ 1.2 方向导数与梯度

1. 方向导数.　設已給一个数量场 $u(M)$，我們要討論函数 $u(M)$ 沿某一方向 l 在 M_0 点的变化率（图1.1）。在半射綫 l 上再取一点 M_1，当点自 M_0 变到 M_1 时函数 u 的改变量是 $u(M_1)-u(M_0)$，如令 $|M_0M_1|=\rho$，則

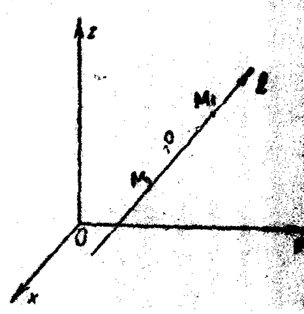

图　1.1

$$\frac{u(M_1)-u(M_0)}{|M_1M_0|}$$

是 u 在 M_0M_1 上的平均变化率，所以在 M_0 点的变化率是

$$\lim_{M_1\to M_0}\frac{u(M_1)-u(M_0)}{\rho},$$

这个变化率就称为 u 在 M_0 点沿 l 方向的方向导数，記作 $\frac{\partial u(M_0)}{\partial l}$：

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial l}=\lim_{M_1\to M_0}\frac{u(M_1)-u(M_0)}{\rho},\tag{1}$$

若取 l 平行于 ox 軸正方向，則

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x},$$

若取 l 平行于 ox 軸負方向，則

$$\frac{\partial u}{\partial l}=-\frac{\partial u}{\partial x}.$$

现在設 l 的方向余弦为 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$，怎样来計算 $\frac{\partial u}{\partial l}$ 呢？設 M_0 与 M_1 的坐标分别是 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ 与 $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y,\ z_0+\Delta z)$，則

$$\Delta x=\rho\cos\alpha,\qquad \Delta y=\rho\cos\beta,\qquad \Delta z=\rho\cos\gamma,\tag{2}$$

$$\begin{aligned}u(M_1)-u(M_0)&=u(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)-u(x_0,y_0,z_0)\\&=u(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)-u(x_0,y_0+\Delta y,\\&\quad z_0+\Delta z)+u(x_0,\ y_0+\Delta y,\ z_0+\Delta z)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-u(x_0,\ y_0,\ z_0+\Delta z)+u(x_0,\ y_0,\ z_0+\Delta z)\\
&-u(x_0,\ y_0,\ z_0)\\
=&\,u'_x(x_0+\theta_1\Delta x,\ y_0+\Delta y,\ z_0+\Delta z)\Delta x\\
&+u'_y(x_0, y_0+\theta_2\Delta y,\ z_0+\Delta z)\Delta y\\
&+u'_z(x_0,\ y_0,\ z_0+\theta_3\Delta z)\Delta z\\
&\quad(0<\theta_1,\ \theta_2,\ \theta_3<1).
\end{aligned}
\tag{3}
$$

在这里我們三次应用了中值公式。設 u'_x，u'_y，u'_z 都是連續的，則应用（3）与（2）有

$$
\frac{\partial u(M_0)}{\partial l}=\lim_{M_1\to M_0}\frac{u(M_1)-u(M_0)}{\rho}=\frac{\partial u(M_0)}{\partial x}\cos\alpha
+\frac{\partial u(M_0)}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u(M_0)}{\partial z}\cos\gamma.
\tag{4}
$$

在数量场中取一曲面 S，其方程为 $u(x,\ y,\ z)=c$（c 为一常量），称作一等値面，就是說在这曲面上各点的函数値相等（$u=c$），例如温度场中的等値面就是等温面。在 S 上任取一点 M，过 M 作曲面 S 的任一切綫 l（图1.2），設 l 的方向余弦为 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$，我們来計算 $\frac{\partial u}{\partial l}$.

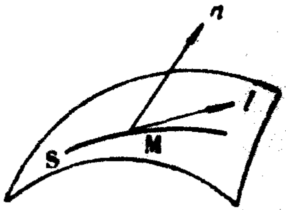

图 1.2

在 M 点处曲面 S 的法綫記作 n，由于 S 的方程是

$$u(x,\ y,\ z)-c=0,$$

所以 n 的方向数为

$$\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial z};$$

旣然 $n \perp l$，所以必定有，

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma=0$$

即 $\frac{\partial u}{\partial l}=0$ （图 1.2）。

因此，我們得到这样的結論：**等値面上任一点的任意切綫方向上的方向导数为 0。**

这个事实是很容易理解的，例如，对温度场来說，显然在等温面的切綫方向上温度不会发生改变，所以变化率为 0。

11. 數量場的梯度 我們已經看到，在一数量场中，同一点 M 处不同方向上的方向导数一般是不同的，即在各个方向上 $u(M)$ 的变化率是不一样的。我們現在提出这样一个問題：在哪一个方向上，$u(M)$ 增加得最快？就是說，在那一个方向上，u 的方向导数最大？

为了解决这个問題，我們再来看計算方向导数的公式（4），它的右面是一个数积的形式，如果沿 l 方向作单位矢量

$$\boldsymbol{l}_0=\cos\alpha\,\boldsymbol{i}+\cos\beta\,\boldsymbol{j}+\cos\gamma\,\boldsymbol{k} \qquad \text{（图1.3）}$$

而把 $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$，$\frac{\partial u}{\partial z}$ 看作另一矢量 $\mathbf{V}$ 在三个坐标軸上的投影，即

$$\mathbf{V}=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

则（4）式可以写作

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\mathbf{v}\cdot l_0=|\mathbf{v}|\cos\theta,$$

θ 表示 $\mathbf{v}$ 与 l_0的夹角。故当 $\theta=0$，即 l_0 与 $\mathbf{v}$ 方向相同时，$\frac{\partial u}{\partial l}$ 最大（$=|\mathbf{v}|$）。所以 $\mathbf{v}$ 的方向就是使 $\frac{\partial u}{\partial l}$ 取最大值的方向，而 $\mathbf{v}$ 的模 $|\mathbf{v}|$ 就是 $\frac{\partial u}{\partial l}$ 所取最大值的大小。因此我們

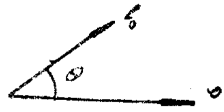

图 1.3

定义　数量場 $u(M)$ 中任一点 M 的梯度是一个矢量，其方向是 $\frac{\partial u}{\partial l}$ 最大的方向，其模就是这个變化率的最大值。梯度記作

$$\text{grad}u(M)$$

于是

$$\text{grad}u=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}. \tag{5}$$

又由（4）有

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\text{grad}_l u=\text{grad}u\cdot l_0 \tag{6}$$

由于过M点的等位面$u(x, y, y)=c$ 的法綫n的方向数为 $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$，$\frac{\partial u}{\partial z}$。故grad$u(M)$的方向即 n 的方向，而指着 u 增加的一侧，其大小为

$$\frac{\partial u}{\partial n}=|\text{grad}u|$$

$$=\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2} \qquad (7)$$

在数量场$u(M)$中各点处的梯度都是一个矢量——grad$u$——因此，各点处的梯度就构成一矢量场，称着$u(M)$的**梯度場**。

但是任意給出一矢量场$\mathbf{A}(M)=A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k}$，一般的幷不一定恰好是某一函数$u$的**梯度場**，如果对于$\mathbf{A}$有这样的函数$u(M)$存在，使得

$$\mathbf{A}=\mathrm{grad}\,u$$

則称矢量场$\mathbf{A}$为**位势場**，u叫做$\mathbf{A}$的**位函数**，而且

$$\frac{\partial u}{\partial x}=A_x;\quad \frac{\partial u}{\partial y}=A_y;\quad \frac{\partial u}{\partial z}=A_z$$

例1 求数量场

$$u=x^2+y^2+z^2+2xy+yz+3xz+4x+2y-z+6$$

在原点的梯度。

解 因

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x+2y+3z+4,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=2y+2x+z+2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=2z+y+3x-1,$$

在（0，0，0）处梯度为

$$(\mathrm{grad}\,u)_0=4\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}.$$

例2 位置在原点的点电荷q在它周围空間所产生的电位（数量场）为$u=\frac{q}{\varepsilon r}$．其中：$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，$\varepsilon=$常数为介

質的介电系数，求它的梯度。

解　因

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{q}{\varepsilon}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{q}{\varepsilon}\cdot\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{q}{\varepsilon}\cdot(r)^{-\frac{3}{2}}2x=-\frac{qx}{\varepsilon r^3},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{qy}{\varepsilon r^3},\qquad \frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{qz}{\varepsilon r^3}.$$

故由（5）式知

$$\mathrm{grad}u=-\frac{q}{\varepsilon r^3}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})=-\frac{q}{\varepsilon r^2}\mathbf{r}_0,$$

$\mathbf{r}_0$ 表示自O点到 P 点直綫上的单位矢量。

由电学知道，这时电场强度

$$-\mathbf{E}=\frac{q}{\varepsilon r^2}\mathbf{r}_0$$

所以

$$\mathrm{grad}u=-\mathbf{E}$$

也就是說：电场强度场 $\mathbf{E}$ 是位势场，其位函数就是电位 u 的負值。

§ 1.3　曲面积分

考虑不可压縮的理想流体的稳定流动（即与时間无关）。为簡单計設其密度为 1，而各点速度 $\boldsymbol{v}$ 不同：

$$\boldsymbol{v}=v_x(x,y,z)\boldsymbol{i}+v_y(x,y,z)\boldsymbol{j}+v_z(x,y,z)\boldsymbol{k}.$$

在流体中取一曲面 S（图1.4），并取定一側 S^+ 作正側，我們要求出在单位时間內流体从另一側流入 S^+ 的总量 Q—称为流

量。

取S上M点处一小片ΔS，在单位时間內，通过ΔS流向S^+的流体近似地形成一个柱形，其底面积为ΔS，斜高为$|v|$，而高則是v在S^+一側的法綫n上的投影v_n，所以其体积是$v_n\Delta S$。于是这些流体的量ΔQ＝密度×体积＝$v_n\Delta S$.

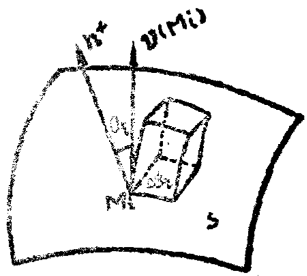

图 1.4

现在将S分成若干小片ΔS_1，ΔS_2，…，ΔS_m，于是通过S流向S^+的流体总量近似地是

$$Q\approx\sum_{i=1}^{m}v_n(M_i)\Delta S_i,$$

令每一个小块ΔS_i都縮为一点而取极限，則得

$$Q=\lim\sum_{i=1}^{m}v_n(M_i)\Delta S_i.\quad\left(\text{記作}\iint_S v_n\,dS\right)\tag{8}$$

在具体計算这个和的极限以前，我們再給他以另一个写法。因为

$$v_n=v_x\cos(n,x)+v_y\cos(n,y)+v_z\cos(n,z),$$

而$\Delta S\cdot\cos(n,z)$恰好是曲面面积在(x,y)平面上的投影，所以恰好是(x,y)平面上的小块面积，記作$dxdy$。不过要注意，若(n,z)是銳角，$\Delta S\cos(n,z)>0$，所以$dxdy$应取正値；反之，若(n,z)是鈍角則$dxdy$应取負値。同理$\Delta S\cos(n,y)=dzdx$，$\Delta S\cos(n,x)=dydz$，于是(8)式又可写为

$$Q=\iint_S v_n dS=\iint_S(v_x dydz+v_y dzdx+v_z dxdy). \tag{9}$$

这种类型的和的极限在許多其他地方都会遇到，所以我們专門从数学上加以定义：

定义　設有曲面S以及定义在S上的函数$P(M)$，$Q(M)$，$R(M)$，将S分为若干小片ΔS_i其面积也記为ΔS_i，$(i=1, 2, \cdots, m)$，在每一小片中任取一点M_i，再令n表示曲面S某一側S^+的法綫，作和

$$\sum_{i=1}^{m} A_n(M_i)\Delta S_i$$

$\mathbf{A}(M)$是以P，Q，R为投影的向量，令每一小片ΔS_i縮为一点而取上式的极限，則此极限称为$\mathbf{A}(M)$在S的一側S^+上的曲面积分，記作

$$\iint_S \mathbf{A}_n(M)\,dS=\iint_S P(M)dydz+Q(M)dzdx+R(M)dxdy). \tag{10}$$

(10)式的計算方法如下：为方便起見，先假定S与平行于坐标軸的直綫相交不多于一点，因为M点在S上，故若将S的方程写成$x=x(y,z)$，有

$$\iint_S P(M)dydz=\iint_{\sigma_{yz}} P[x(y.z),y,z]dydz$$

这样就把曲面积分的計算化成了一个二重积分的計算，这里σ_{yz}是S在yz平面上的投影。同理，若将曲面方程写作$y=y(x.z)$或$z=z(x.y)$后，分别又有