近似计算

邓林源编著

上海教育出版社

近似計算

邓林源編著

上海教育出版社

一九五八年·上海

近 似 計 算

邓林源編著

*

上海教育出版社出版
（上海湖南路9号）
上海市書刊出版業營業許可証出090号
上海国光印刷厂印刷　新華書店上海發行所总經售

*

开本：787×1092 1/32　印張：1 5/8　字数：37,000
1958年7月第1版　1958年7月第1次印刷
印数：1—20,000本

統一書号：7150·23
定　价：(7) 0.16元

目　录

一 基 本 知 識

这里首先要談的是关于正确数和近似数的意义，近似数的准确度以及准确度的表示方法等．这一切是近似計算的理論基础．

§ 1. 正确数和近似数

(一)正确数 对某一个量（物件的多少、长度、重量、温度等）进行計数或测量，所得的結果总是用数来表示（若干尺、若干斤等）．在有些情况下，一个数能毫无差錯地表示某一个量，这个数就叫做該量的**正确数**．对事物計数的結果常能得到正确数．譬如，数出“桌上有 3 本書”或“厂房里有 12 台机床”，很明显的，这个計数的結果不会有差錯，所以，3 和 12 分别是書的本数及机床台数的正确数，通常用到的一些公式（如 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$）中的、科学上规定的（如一馬力等于75千克重·米/秒），以及工作中假設的（如“规定制造直径为 5 厘米的鋼軸”或“設三角形的面积为 30 平方厘米”）数据，这些数据（$\frac{4}{3}$，75，5，30）也都是正确数．

如果量A的正确数是x，就記作$A=x$．

(二)近似数 实际上，对大多数的量是不可能或不需要用正确数来表示，而是用一个与它的正确数相差不多的数来表示的，这个数就叫做該量的**近似数**．对繁杂事物的計数往往用到近似数，例如，統計国庆节在天安門前参加游行的人数，要做到

絕对正确（不遺漏或重复）是不必要的．事实上，就只要得到像40万或50万等近似的結果．在实用方面，通过測量和实驗得到的数据都是近似数，这是由于我們的操作技术和使用的工具都不可能达到尽善尽美的原故．举例来說，量出教科書的寬度是139毫米，但这个数不一定就是教科書眞实的寬度数．也就是說，眞实的寬度可能与139毫米相差（多或少）一些，而这个相差部分，往往由于我們的粗心或看不清楚而被忽略掉；当然，也可能由于所用的尺不够精密而量不出来．总之，139实际上只能說是一个近似数．

此外，用有限小数表示的无理数或循环小数（如$\sqrt{2} \doteq 1.414$，$\frac{2}{3} \doteq 0.67$）和用数字的取捨方法得到的数据等，这些数也都是近似的．

如果量A的近似数是a，就記作$A \doteq a$．

在近似計算中，分清正确数与近似数，这一点很重要，是值得我們注意的．

練　习

1．举出三个正确数和五个近似数的例子．

2．下列各題中的数据哪些是正确数，哪些是近似数：

(1) 要做每边长2.5尺的方桌面；

(2) 量出車輪的直径是1.7米；称了50斤木柴；

(3) 求自由落体所經路程的公式$S=\frac{1}{2}gt^2$；

求球面积的公式$S=4\pi R^2$；

(4) 一米等于100厘米；一昼夜为24小时．

3．由不同的人来量同一个长度，或由一个人用不同的尺来量同一个长度，所得結果几乎都有少許不同（讀者不妨試一試），为什么？

§ 2. 数字的三种取舍方法

有些数含有很多位数字，所含的位数往往超过了实际的需要．因此，必須去掉那些多余位数的数字．譬如，在一般的工程計算上只需要三位或四位数字的数，因而，对 $\pi \doteq 3.14159265$ 这样的多位数，就只要保留两位小数 $\pi \doteq 3.14$，或三位小数 $\pi \doteq 3.141$，而把多余的部分去掉．对去掉多余的数字一般采用三种方法，叫做**数字的取舍方法**．

（一）收尾法　这个方法是：去掉多余部分的数字后，在保留部分的最后一位数字上加上 1．

例如，用收尾法去掉 $\pi \doteq 3.141593$ 的多余数字，只保留到百分位，$\pi \doteq 3.15$；保留到千分位，$\pi \doteq 3.142$；保留到万分位，$\pi \doteq 3.1416$．

（二）去尾法　这个方法是：去掉多余部分的数字后，保留部分不变．

例如，用去尾法解前面的例，π 的近似数分别为 3.14，3.141，3.1415．

（三）四捨五入法　这个方法是：去掉多余部分的数字后，

1．如果去掉部分的首位数字大于或等于 5，就按收尾法处理；

2．如果去掉部分的首位数字小于 5，就按去尾法处理．

例如，用四捨五入法解前面的例，π 的近似数分别为 3.14，3.142，3.1416．

練　习

1．如果只保留到个位、千分位和万分位，試用三种方法分别去掉 $\sqrt{3} \doteq 1.73205$ 的多余数字．

2. 如果只保留到十位、百位、千位，用三种方法分别去掉 $x=531584$ 的多余数字.

§ 3. 近似数的准确度

近似数的**准确度**，是近似計算理論的中心問題．它的含义很浅显．譬如，用精密的天平和普通的称分别称同一个物体的重量，我們就会說“用天平当然能够称得准确些”，这是因为我們能觉察到，用天平称得的数和它的正确数相差較小．一般說来，对于同一个量(或相等的量)，如果近似数的差錯越小，我們就习慣地認为該近似数越准确.

至于对几个不同的量的近似数进行比較，就有所不同．譬如：甲測量 1000 米长的距离，測量的結果是 1001米；乙測量10米长的距离，測量的結果是 9 米．虽然他們測量結果的差錯都是 1 米，但是我們却說甲比乙測得准确.

在近似計算的理論中，近似数的准确与否，决定于所謂准确度的高低．对較准确的近似数，就說它的准确度較高；反过来，就說它的准确度較低．在同一个問題里，准确度高的近似数比准确度低的近似数要准确些.

近似数准确度的高低可用下面三种方法表示出来：(一)近似数的絕对誤差；(二)近似数的相对誤差；(三)近似数的可靠数字或精确数字的个数.

下面分别来說明这三种方法.

§ 4. 近似数的絕对誤差

(一)近似数的差錯　如果某一个量的正确数是 x，近似数是 a，近似数的差錯是 A，那末 $A=|x-a|$.

这样，§3第一段里的論断就是：对于同一个量的近似数，A越小，准确度就越高.

上面論断的实际意义不大，因为实际上，量的正确数在大多数情况下是不知道的〔§1，(二)〕. 因而，A的大小就无法求得. 因此，在实用上，一般是采用下面的方法.

(二)**近似数的絕对誤差**　这里要說明的是，虽然不能求出A的大小，但是根据問題的条件，总能求出一个稍大于(或等于)A的正数Δa（Δ是希腊字母，念做"得而它"）来代替A. 例如，

1. 在§1(二)中曾举过量教科書寬度的例子，如果我們使用的是具有毫米刻度的尺，从測量的結果可以看出，書的正确寬度不会比139毫米多过(或少于)半毫米，即$A=|x-139|\leqslant 0.5$（毫米），所以$\Delta 139=0.5$毫米.

2. 如果把某一正确数四捨五入保留到百位，得7300. 显然，捨去或增加的数不会超过50，即$A=|x-7300|\leqslant 50$，所以$\Delta 7300=50$.

3. 如果把$\sqrt{5}=2.236\cdots\cdots$分別用去尾法和四捨五入法使保留到百分位. 那末：

应用去尾法得$\sqrt{5}\doteq 2.23$.

$|\sqrt{5}-2.23|=0.006\cdots\cdots<0.007$.　$\therefore \Delta 2.23=0.007$.

应用四捨五入法得$\sqrt{5}\doteq 2.24$.

$|\sqrt{5}-2.24|=0.003\cdots\cdots<0.004$.　$\therefore \Delta 2.24=0.004$.

从上面的例子可以看出，在实际上，求Δa的值是完全可能的.

我們把Δa叫做近似数a的**絕对誤差**，而$\Delta a\geqslant A$（或$\Delta a\geqslant |x-a|$）. 并規定在求Δa时应尽可能把它取得小一些. 于是，由(一)对近似数的差錯的討論可知(用Δa代替A)，对于同一个量

的近似数，絕对誤差越小，該近似数的准确度就越高．例如，在例 3 中，由于 $\Delta 2.24<\Delta 2.23$，可知用四捨五入法得出的結果 (2.24) 要准确些．

近似数 a 和它的絕对誤差 Δa，通常用記号 $a(\pm\Delta a)$来表示．例如，对例 1 及例 2 分别有 $139(\pm 0.5)$ 及 $7300(\pm 50)$．

(三)正确数的上下界　記号 $a(\pm\Delta a)$ 的含意是：正确数 x 必在 $a+\Delta a$ 与 $a-\Delta a$ 之間（可由 $|x-a|\leqslant\Delta a$ 看出）．因此，$a+\Delta a$ 叫做 x 的**上界**，記作 a'；$a-\Delta a$ 叫做 x 的**下界**，記作 a''．这里，很明显的，a 是 a' 和 a'' 的**中間值**：$a=\dfrac{a'+a''}{2}$．而絕对誤差 $\Delta a=a'-a=a-a''$．这种特殊情形在实用中是会遇到的．例如：

1．已知某物体的体积在 15.3 立方厘米与 15.7 立方厘米之間，为准确起見，取 $V=\dfrac{15.7+15.3}{2}=15.5$ 立方厘米作为該物体积的近似数．于是 $\Delta V=15.7-15.5=15.5-15.3=0.2$(立方厘米)．

在一般情形下，如果 a 不是 a' 和 a'' 的中間值，为了保証 $\Delta a\geqslant A$，就应当把 $a'-a$ 或 $a-a''$ 中較大的一个当作 Δa．

(四)几点說明：

(1) 在实用上，我們把 Δa 写成不超过两个数字的簡單形式，而把多余的数字用收尾法去掉（因为 $\Delta a\geqslant A$）．例如，如果 $\Delta a=0.315$，就应写成 $\Delta a=0.4$ 或 0.32．

(2) 从(二)中的例 3 及下面的練习 2 可知，如果用去尾法或收尾法去掉某一个正确数的多余数字，产生的絕对誤差不超过保留部分末位上的一个單位；如果用四捨五入法則不超过半个單位．因此，以后在实际計算中，对数字的取捨，要尽量采用

四捨五入法，这样就能得到比較准确的近似数.

(3) 近似数絕对誤差的来源可能不只是一个，而且由于它們的相互影响，在有利的情况下，絕对誤差可能减小．例如，把101米長的电綫近似地当做是100米 ($\Delta 100 = 1$米)，把从这条电綫上剪下的40.6米当做是40米 ($\Delta 40 = 0.6$米)．此时，如果把剩余部分当做是 $100-40=60$ 米(实际上是 $101-40.6=60.4$ 米)，那末 $\Delta 60 = 1-0.6 = 0.4$ (米)．反过来，在不利的情况下，近似数的絕对誤差可能增大．例如，在上面的例子中，如果剪去部分的正确長度是39米 ($\Delta 40 = 1$米，剩余部分的正确長度是 $101-39=62$ 米)，那末 $\Delta 60 = 1+1 = 2$ 米.

在实际上，由于很少可能掌握有利的情形，因此，以后我們总是按不利的情形进行計算.

(4) 当去掉近似数的多余数字时，由于該近似数捨去或增加了一部分，就产生了新的絕对誤差．按不利的情况来考虑，所得数的絕对誤差应等于新誤差与原誤差的和．例如，去掉 $3.87 (\pm 0.02)$ 的末位数字得 $3.9 (\pm 0.05)$.

(5) 正确数的絕对誤差是零.

練　　习

1. 讀者試作几次測量（長度、重量等），并把結果写成 $a(\pm\Delta a)$ 的形式．(参看(二)例1)

2. 分别用三种取捨方法使 $x=2.6358$ 只保留到十分位、百分位和千分位，并找出它們的絕对誤差；指出用哪种方法能得出比較准确的結果.

§5.　近似数的相对誤差

(一)問題的提出　由前面的討論知道，对同一个量的近似数，可以用絕对誤差来判别它們准确度的高低．但是，对于几个

量（这些量应是同类量，如都是重量或都是长度等）的近似数，就不能应用絕对誤差来判别它們之間准确度的高低．举例来說，在§3里的甲乙二人測量距离的例題中，所得結果的絕对誤差相等（都是一米），但甲卻測得准确些．同样的，用絕对誤差也不能解决下面的問題：

1．測得一个三角形的面积为200(±0.5)平方厘米，某田地的面积为200(±0.5)平方尺，問哪一个面积測得比較准确（注意單位不同）？

2．取$\sqrt{7}\doteq 2.65(\pm 0.005)$，$\frac{11}{9}\doteq 1.22(\pm 0.003)$，問哪一个的准确度高？

（二）近似数的相对誤差　絕对誤差Δa与近似数本身的比，叫近似数a的**相对誤差**．記作δa（δ是Δ的小写）．$\delta a=\frac{\Delta a}{a}$．

很明显的，实际上δa就是这样的一个数，它表示Δa相当于近似数a本身的多少（几分之几）．为了方便，δa常表示成百分数的形式．因此，它又叫做**百分誤差**（这样，δa就表示Δa相当于a的百分之几了）．例如，对于17.7(±0.1)，$a=17.7$，$\Delta a=0.1$，所以$\delta 17.7=\frac{0.1}{17.7}\doteq 0.006=0.6\%$．

不論是同一个量的近似数，还是几个量的近似数，相对誤差越小，准确度就越高．例如上一节最后的例2，

$$\delta 2.65=\frac{0.005}{2.65}\doteq 0.0019=0.19\%;$$

$$\delta 1.22=\frac{0.003}{1.22}\doteq 0.0025=0.25\%.$$

因为$\delta 2.65<\delta 1.22$，所以近似数2.65的准确度比較高．

618

024-15C3

至于例 1，应用同样方法可以知道两个面积的准确度相同.

近似数 a 和它的相对誤差 δa，可用記号 $a(1\pm\delta a)$ 来表示. 例如，对上一节最后的例 2 中的近似数，就有 $2.65(1\pm0.0019)$ 及 $1.22(1\pm0.0025)$.

(三) 几点說明:

(1) 在实用上，我們通常用收尾法将 δa 写成不超过两个数字的形式.

(2) 与絕对誤差不同，很明显的，相对誤差是不名数（就是不带有單位量的数）.

(3) 根据 $\delta a=\dfrac{\Delta a}{a}$，可得 $\Delta a=a\times\delta a$. 就是說，如果已知 a 及 δa，也可算出 Δa. 例如，測得苏联"图—104"式飞机的普通速度是每小时 830 公里，准确到 1 %，求絕对誤差. 因为 $a=830$ 公里/时，$\delta 830=1\%$，

$\Delta a=a\times\delta a$，所以 $\Delta 830=830\times\dfrac{1}{100}=8.3$（公里/小时）.

(4) 利用倒数表、倒数倍数表或計算尺等来計算 δa 显得更方便.

(5) 因为正确数的相对誤差为零，就是 $\delta x=\dfrac{\Delta x}{x}=\dfrac{0}{x}=0$.

練　　习

1. 制造外直径为 35 厘米的齿輪，要求絕对誤差不超过 0.1 厘米，求相对誤差.　　　（答：0.3%）

2. 称得两物体各重 15(±0.5) 克及 40 (±1)两，問哪一个称得准确些?　　　（答：40(±1)两重的物体称得准确些.）

3. 已知 $\delta 3.12=0.1\%$ 及 $\delta 2.184=0.01\%$，求 $\Delta 3.12$ 及 $\Delta 2.184$.
　　　（答：$\Delta 3.12=0.004$；$\Delta 2.184=0.0003$.）

§ 6. 近似数的可靠数字与精确数字

(一)有效数字 在一个数(不管它是不是近似数)里,从第一个不为零的数字算起,它和所有在它右边的数字(不管它是不是零),都叫做**有效数字**. 例如,2180 这个数有四个有效数字;2.0180 这个数有五个有效数字;0.0218 这个数有三个有效数字.

(二)可靠数字和存疑数字 如果近似数的絶对誤差不大于該数第 n 个有效数字所在的那一个数位上的一个單位,那末該近似数的前 n 个有效数字都叫做**可靠数字**;反过来,如果絶对誤差大于該数位上的一个單位,那末該数位上的有效数字連同它右边的全部有效数字都叫做**不可靠数字**或**存疑数字**. 例如:

1. 0.021789(±0.0008) 的絶对誤差 0.0008 大于万分位上的一个單位 0.0001,但小于千分位上的一个單位 0.001,因此,千分位上的有效数字 1 和它前面的有效数字 2 都是可靠的,而其余的有效数字 7、8、9 都是存疑数字.

2. 如果取 803400 的近似数为 803500(±100),这里絶对誤差就等于(不大于)百位上的一个單位. 因此,这个近似数有四个可靠数字 8、0、3、5.

从例 2 可以看到,近似数的可靠数字与正确数的数字有相同的(8、0、3),只是最后的一个可靠数字(5)与正确数中对应数位上的数字(4)的差不大于 1. 这就反映出"可靠"两个字的意义. 〔例外情形,如 7.999 去掉末位数字得 8.000(±0.001),与正确数沒有一个数字相同.〕

(三)精确数字 如果近似数的絶对誤差不大于該数第 n 个有效数字所在的那一个数位上的半个單位,那末該近似数的前

n 个有效数字都叫做**精确数字**. 例如，13.47(±0.02) 的絕对誤差 (0.02) 小于十分位上的半个單位 0.05；因此，它有三个精确数字 1、3、4.

在进行普通测量的时候，所得到的近似数一般是具有精确数字的〔§4(二)例1〕.应用四捨五入法去掉多余数字的时候，保留部分的数字也应該是精确的〔§4(四)(2)〕①.

(四)根据近似数的可靠数字与精确数字的个数判别近似数的准确度：

(1) 对同一个量的近似数(測量时，必須用同一度量單位)，可靠(或精确)数字个数多的，就有較高的准确度. 关于近似数精确数字的个数与相对誤差的关系，可以論証如下.

計算：$a=725(\pm1)$，$b=7.25(\pm0.01)$，$c=0.00725(\pm 0.00001)$的相对誤差.

解： $\delta a=\dfrac{1}{725}$，$\delta b=\dfrac{0.01}{7.25}=\dfrac{1}{725}$，$\delta c=\dfrac{0.00001}{0.00725}=\dfrac{1}{725}$.

很明显的，$\delta a=\delta b=\delta c$. 于是可推得一个重要性質：几个近似数，如果它們之間以及它們的絕对誤差之間的区别仅在于小数点的位置不同(也就是其它方面如可靠数字个数，有效数字等等都相同)，那末它們的相对誤差相等. 由此可导出下面几个法則：

法則1：具有 n 个可靠数字的近似数，它的相对誤差大于 $\dfrac{1}{10^{n+1}}$，但不超过$\dfrac{1}{10^{n-1}}$. 就是說，$\dfrac{1}{10^{n+1}}<\delta a\leqslant\dfrac{1}{10^{n-1}}$.

証明：在特殊情形下，設 a 的小数部分都是存疑数字，整数

---

① 根据§4(四)(4)，在去掉近似数的多余数字时，对这一点就不能保証. 例如，去掉近似数 315(±1) 的多余数只保留到十位，得 $32_0(\pm6)$. 这里，十位数就不精確，但这种情形極少，可以不加考慮.

部分都是可靠数字而可靠数字的个数为 n 个，那末

$0.1<\Delta a\leqslant 1$； $10^n>a\geqslant 10^{n-1}$，也就是說，$\frac{1}{10^n}<\frac{1}{a}\leqslant\frac{1}{10^{n-1}}$，

把这两个式子里的对应项相乘，得 $\frac{1}{10^{n+1}}<\delta a\leqslant\frac{1}{10^{n-1}}$.

在一般情形下，根据上面的性質，可把它化成已証明的特殊情形．所以这个法則成立．

法則 1*：具有 n 个精确数字的近似数，它的相对誤差大于 $\frac{5}{10^{n+2}}$，但不超过 $\frac{5}{10^n}$．就是說，$\frac{5}{10^{n+2}}<\delta a\leqslant\frac{5}{10^n}$．証法同上．

用同样的方法讀者不难証明，如果 a 的首位有效数字为 k，那末法則 1 应为 $\frac{1}{(k+1)\cdot 10^n}<\delta a\leqslant\frac{1}{k\cdot 10^{n-1}}$；法則 1* 应为

$\frac{5}{(k+1)\cdot 10^{n+1}}<\delta a\leqslant\frac{5}{k\cdot 10^n}$，这显然要来得精密些．

法則 2：相对誤差不超过 $\frac{1}{10^n}$ 的近似数，至少具有 n 个可靠数字（与法則 1 相逆）．

証明：首先可靠数字个数不能少于 n 个．因为，如果只有 $n-1$ 个可靠数字，根据法則 1，它的相对誤差应大于 $\frac{1}{10^n}$．这就与假設矛盾．

法則 2*：相对誤差不超过 $\frac{5}{10^n}$ 的近似数，至少具有 $n-1$ 个精确数字．（証法同前）

法則 3：相对誤差大于 $\frac{1}{10^n}$ 的近似数，至多具有 n 个可靠数字．（証法同前）

法则 3*：相对誤差大于 $\frac{5}{10^n}$ 的近似数，至多具有 $n-1$ 个精确数字.

(2) 如果 a 比 b 多一个可靠(或精确)数字，且 a 与 b 的第一位可靠数字的大小以及它們絕对誤差的有效数字的大小都相差不多，那末 a 的准确度就較高．例如，測得甲物体重量是乙物体重量的 218(±1)倍，又丙物体重量是丁物体重量的 0.43(±0.01)倍．由(2)可知 218 的准确度較高(可用相对誤差来驗証).

(3) 如果 a 比 b 多两个可靠(或精确)数字，那末 a 一定有較高的准确度(由上面的法則 1 可証得).

总結以上各点可知，由可靠(或精确)数字的个数也能判别近似数的准确度．因此，我們規定：近似数只写出可靠数字或精确数字，存疑数字都应当按四捨五入法去掉〔例外情形见§15.1〕.

(五)几点說明：

(1) 存疑的数字 0 习惯上都写成小的字体．例如，

15000(±50) 应写成 150_{00}(±50)；32157(±30) 应写成 322_{00}(±80)〔§4.(四)(4)〕.

(2) 如果近似数的首位存疑数字在某一数位上，就說这个近似数的存疑数字达到了該数位．例如，$a=452_0(\pm5)$ 的存疑数字达到了个位．在一般情况下，就說近似数的存疑数字达到了 10^n 位.

(3) 根据(二)及(三)，如果已知一个近似数在某一数位上的数字是可靠(或精确)的〔因在(四)中規定了近似数只写出可靠数字或精确数字〕，那末就可以知道这个近似数的絕对誤差．例如，已知 $a=32_{00}$，它的数字是可靠的，那末 $\Delta 32_{00}=100$〔由(二)〕；已知 $a=0.43$，它的数字是精确的，那末 $\Delta 0.43=0.005$