水工結构应力分析丛书之五

弹性地基上的梁和框架

潘家錚 編著

上海科学技术出版社

統一书号 15119·1582

定 价 1.30 元

水工結构应力分析丛书之五

彈性地基上的梁和框架

潘家錚 編著

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书分析彈性地基上的梁和框架，把目前各种較合实用的計算方法尽量地集編入：除概述外，分別叙述用級数法、用郭氏法、用链杆法、用蔡氏法等計算彈性地基上的梁，彈性地基上框架的計算及特殊的彈性地基梁的計算等。

本书可供土建、水利工程設計人員及有关专业院校师生参考之用。

水工結构应力分析丛书之五

彈性地基上的梁和框架

潘家錚 編著

*

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路450号)

上海市书刊出版业营业許可證出023号

新华书店上海发行所发行　各地新华书店經售

商务印书館上海厂印刷

*

开本850×1168 1/32　印張8 22/32　插頁1　字数218,000

1960年5月第1版　1960年5月第1次印刷

印数1—5,500

统一书号：15119·1582

定　　价：(十二)1.30元

目　录

第一章　概述

1-1　問題的性質

任何結构物必須建筑在地基上。地基的种类很多，大別言之有岩性地基和土壤地基之分，后者又可分为粘性土壤及沙性土壤等。結构物与地基的連接方式，可通过柱(或墻)的作用，将荷載傳达到地基中，但也有設一基础梁或板，荷載通过基础梁(板)后分布到地基中。前者适用于地基条件較好、荷載較輕的情况中，这时，亦常須将柱脚或墻脚适当扩大，以使压力尽量分布在較大的范圍中。后一方式适用于地基条件較差、荷載較大的情况中，基础梁的設置能使荷載分布在較寬闊的面积上，减小单位面积上的压力强度。在水工結构或大型工民用建筑物中，基础梁(板)的采用是常見的(見图 1 a 及 b)。此外，某些結构物就其构造特性来看，非采用基

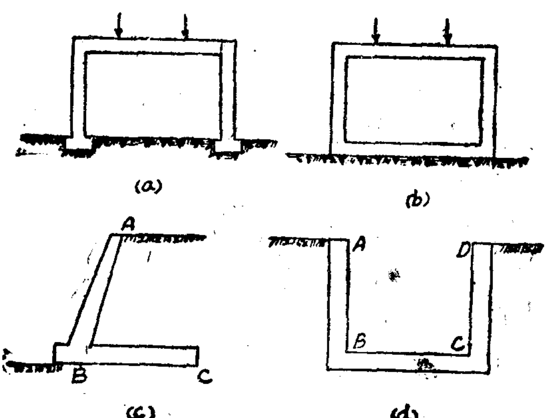

图 1

础梁(板)不可，例如图 1c 及 d 中的挡土墙及船坞，基础梁 BC 为結构物中不可缺少的組成部分。

基础梁的計算，是一个非常重要的問題，而在过去，我們却缺少精确合理的計算方法，因而常常只能作些近似的估算。这不仅使得在許多工程中造成浪費，而且还引起了某些建筑物的失事。經过最近二十余年来許多学者的研究后，合理的計算基础梁的方法和資料才逐漸完整，而取代了过去的不合理或不精确的計算法。

基础梁就是一个放置在地基上的梁，其計算的所以困难，在于梁下地基反力很难确定。考虑图 2a。这是一根基础梁，承受一簡单的集中荷載 P，我們欲計算梁上的剪力及弯矩，必須先求出梁下地基反力的分布。在过去，我們常采用一些近似的假定来解决这一問題，例如，我們假定反力呈直綫分布。这样，根据静平衡条件我們就极易确定反力的数值，如图 2b 所示。这种近似算法，以其简单方便，曾广泛地为人采用。直到现在，当我們在設計一些不重要的基础梁时，或仅作初步估計时，还常常采用它。

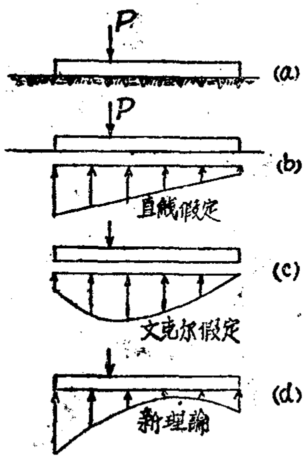

图 2

但是近似法中毫未顾及梁和地基的彈性，和两者受力变形后应該保持接触的原則，因而，計算結果完全不能反映出梁和地基的实际工作情况，对于重要的建筑物来講，这样的計算是不能令人滿意的。

在 1801 年，俄罗斯科学院院士富斯提出了一个比較进步的假設——每单位长度的基础梁与地基間的压力 p 和地基的沉陷成正比。1867 年，捷克学者文克尔将这假定推广，改为：地基每单位面积上所受的压力 p 与地基的沉陷 y 成正比，以式表之

$$p = ky \tag{1}$$

式中 p 为压力或反力（公吨/平方公尺），y 为沉陷（公尺），k 为地基的彈性抗力系数（或称沉陷系数、垫层系数，因次是：公吨/立方公尺）。以后，这一假定被称为文克尔假定，具有这种性质的地基，称为文克尔地基，或彈簧地基。因为按照假定，地基的作用好象是一系列独立的彈簧一样。

按照文克尔假定計算基础梁的方法，在过去数十年中已經被研究得很詳尽，特别是克雷洛夫院士的初参数法，实际上已能解决非常复杂的問題。这在本丛书的“調压井衬砌”和“漸变段衬砌”两书中，均已有詳細的叙述。

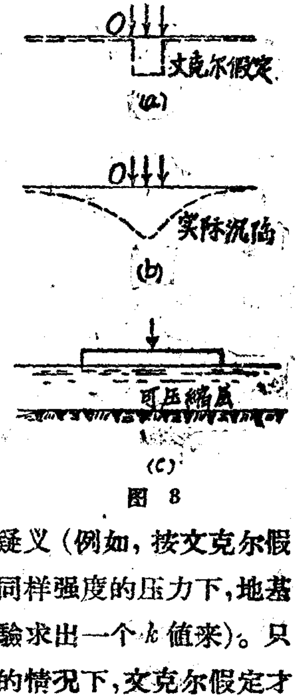

图 3

但是，实际的地基特性，不論是岩性地基或土壤地基，都与文克尔的假定有相当距离。按照文克尔假定，如果在地基表面上一点 O 处作用一荷載，則只在該处才发生沉陷，而实际上，地基是一連續的物体，O 点的荷載会引起連續的沉陷曲綫（图 3a 及 b）。由于这一本質上的区别，按文克尔假定算出的結果，往往仍和实际情况有出入，而且引起許多矛盾和疑义（例如，按文克尔假定，地基抗力系数 k 为一常数，实际上，在同样强度的压力下，地基的沉陷与受压面积有关，因而无法通过試驗求出一个 k 值来）。只有在地基很广大，而土壤的可压縮层很薄的情况下，文克尔假定才接近事实（图 3c）。

1919 年，普罗克托尔（Г. Э. Проктор）首先指出了文克尔假定的缺点，并建議用新的理論来計算基础梁。但由于数学上的困难，新的方法很久沒有得到进展。只有在 1930 年以后，許多苏联学者如蓋尔雪万諾夫（Н. М. Герсеванов）、日莫契金（Б. Н. Жемочкин）、

庫滋涅佐夫(В. Н. Кузнецов)、佛罗林(В. А. Флорин)、費罗宁柯-鮑罗其契(М. М. Филоненко-Бородич)、魯德涅夫(В. И. Руднев)、郭尔布諾夫-波薩多夫(Горбунов-Посадов)等进行了大量工作后,新的方法才得到长足的进展。

新的計算方法中,假設地基是半无限大的連續彈性体,而应用彈性理論来計算地基的沉陷,另外用材料力学的公式計算梁或板的变形,然后从接触条件及平衡条件来确定地基的反力,这样做显然比上述的近似解法及文克尔假定要合理得多。擱置在这种地基上的基础梁,常称为彈性地基上的梁。本书以后所謂基础梁均指这种梁。对于岩性地基,把地基視为連續彈性体来处理是无可置疑的,即使是土壤地基,尽管土壤并非連續彈性体,但根据实驗,新的理論是可以接受的。土壤与彈性体間的区别,在于:(1)土壤受压后,有一部分永久变形,而并非純粹的彈性体,此外,土壤几乎不能承受拉力;对于这两个問題,我們只須通过实地試驗,求出土壤的压縮模量以代替彈性体的彈性模量,而根据地基的工作条件,通常总是受压的,并且主要是加重而不是卸重,故上述区別并不重要;(2)土壤受压过甚,将产生流动而进入塑性状态;但在基础設計中,地基压力不允許过分,塑性状态必只限于极小部分,因此通常也可忽略。

应用新的理論时,需要用到地基的两个特征值,即压縮模量E_0及泊松比μ_0,以代替文克尔假定中的k值,E_0及μ_0均可通过現場試驗决定,詳見参考文献[1]及[4]等,这里从略。

一般講来,应用文克尔理論求出的結果比用直綫假定时較接近于新的理論,特别当抗力系数k系經考虑后选擇者結果更好。但在少数情况下,文克尔理論会給出完全相反的反力分布图形,如图2c系按文克尔假定求得的反力,而图$2d$是按新理論求出的反力,不过,这种情况并不多見。

1-2 平面問題及空間問題

基础梁(板)的問題,可分为平面問題及空間問題两大类,前者又可分为平面应力及平面变形两种,兹分别解释如下。

1 平面应力問題 例如在一片墙上的卧梁,这时“地基”及“梁”均为狭长的一片,属于平面应力問題范圍。这一类問題不很常見,以下,对于这类問題,我們均将以 b 代表梁及地基的寬度,J 代表梁截面的慣性矩,$J=\frac{1}{12}bh^3$,E 代表梁的彈性模量,E_0 代表地基的彈性模量或压縮模量,μ 及 μ_0 分别代表两者的泊松比。

2. 平面变形問題 例如擋土墙、船塢、地弄等結构,它們的长度很大,在中央部分基本上属于平面变形問題。这类問題最为常見,計算时,我們常截取寬度为 1 的一条結构及地基作为对象。因此,这类問題又可称为彈性地基上截条的計算(参考图 5)。

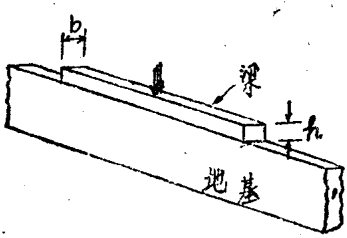

图 4

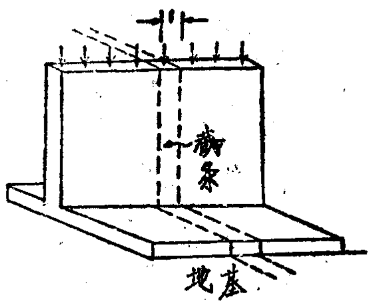

图 5

在平面应力問題的公式中,若令 $b=1$,而且将 E 换为 $\frac{E}{1-\mu^2}$,E_0 换为 $\frac{E_0}{1-\mu_0^2}$ 后,就得到平面变形条件下的相应公式。

例如,在計算基础梁时,我們常要先算出一个参变数(柔度参数)t,在平面应力問題中,

$$t=\frac{\pi E_0 b l^3}{4EJ} \tag{2}$$

则在平面变形中，t 就应該是

$$t=\frac{\pi\cdot\dfrac{E_0}{1-\mu_0^2}}{4\cdot\dfrac{E}{1-\mu^2}}\cdot\frac{1\cdot l^3}{\dfrac{1}{12}\cdot 1\cdot h^3}$$

$$=3\pi\frac{1-\mu^2}{1-\mu_0^2}\frac{l^3}{h^3}\frac{E_0}{E}\approx 10\frac{E_0 l^3}{Eh^3} \tag{3}$$

其余均仿此类推。对于平面变形問題，我們最后求出的反力、剪力和弯矩值，都是指作用在单位寬度的基础板（或地基）上的数值。

3. 空間問題 当一条梁臥置于无限大的地基平面上时，这就属于空間問題。如图6，如果梁的寬度 $2b$ 与其长度 $2a$ 相比大于 $\frac{1}{7}$ 时，問題应該作为彈性地基上的矩形板来計算，而板下的地基反力不仅沿 x 軸变化，而且沿 z 軸变化，必須应用接触面积上各点撓度相等的原理来进行計算，确定反力 $p(x, z)$ 的分布至为困难，詳細討論，已超出本书范圍，讀者可参閱文献[2]及[4]等。

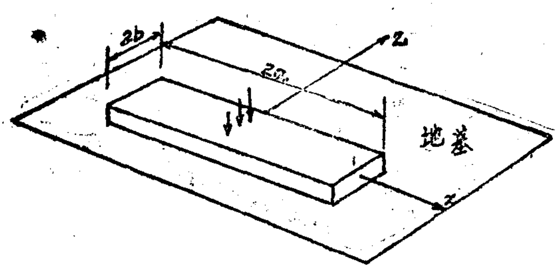

图 6

当 $\frac{b}{a}$ 小于 $\frac{1}{7}$，即結构物呈狭长形，則可作为彈性地基上的梁計算，而且属于空間問題性質，这种問題、在实际上是有所遇到的，例如起重机下的底梁或任何条形基础梁均是。

空間問題下的基础梁的計算，比平面問題者远为复杂。因为，

除非梁的寬度 $2b$ 是非常小，以致切取横向一片出来时，可視为无穷剛强看待，否則沿梁的中心綫及边綫上的撓曲都是不同的，換言之，梁在横向也有弯曲存在。实际計算空間問題的基础梁时，我們常常首先假定其横向剛度为无穷大，算出縱向弯曲情况，求出反力沿 x 向的分布曲綫，这样的反力，代表横向反力分布曲綫的平均值，我們可再切取横向的截条，将所求得的平均反力作为荷載，按照平面变形問題計算其横向分布。当然，这样的計算多少带有近似性。

1-3　基础梁的基本积分方程

本节中考虑采用新的理論計算基础梁的基本方程。設有一等截面梁，擱置于地基上，承受任意的荷載 $q(x)$。由于荷載作用，在梁与地基之間引起作用力 $p(x)$。則梁的撓曲方程可写为

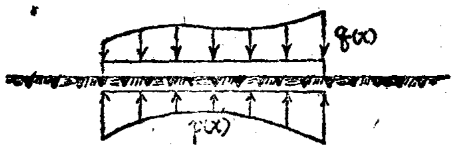

图　7

$$\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{1}{EJ}[q(x)-p(x)] \tag{4}$$

对于截条来說，E 应換以

$$\frac{E}{1-\mu^2};\quad J=\frac{1}{12}$$

$$\frac{EJ}{1-\mu^2}\frac{d^4y}{dx^4}=q(x)-p(x) \tag{4$'$}$$

然后考虑地基的变形，先考虑一基本情况，参考图 8，在地基表面某点，作用一单位力 $p=1$，則在另一点（与荷載点相距为 r）引起的沉陷 w 将为 r 的函数，設此函数 $w(r)$ 已經求得。

則考虑图 9，当地基上有分布压力 $p(x)$ 作用时，某一点 x 处的沉陷 w 可积分而得

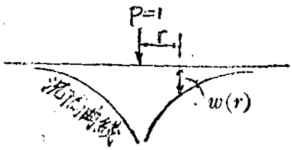

图 8

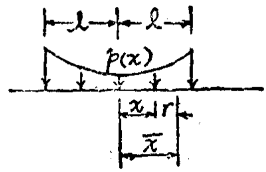

图 9

$$w(x)=\int_{-(l+x)}^{l-x} p(x+r)w(r)\,dr \tag{5}$$

根据接触条件，$y(x)$ 应該等于 $w(x)$，再由梁的平衡和边界条件可以写下

$$\left.\begin{aligned}
&y(x)=w(x)\\
&\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=\pm l}=0\\
&\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{x=\pm l}=0\\
&\int_{-l}^{l} p(x)\,dx=\int_{-l}^{l} q(x)\,dx\\
&\int_{-l}^{l} p(x)\cdot x\cdot dx=\int_{-l}^{l} q(x)\cdot x\cdot dx
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

将(4)或(4)'与(5)、(6)并立，就可以确定 $p(x)$。这些公式就是我們的基本方程，式中 $q(x)$ 及 $w(r)$ 是已知函数，而 $p(x)$ 是需要确定的函数。

对于平面应力問題，弗拉芒氏已求得，半无限体在边界上受集中力 $P=1$ 时，在相距为 r 的另一点的相对沉陷为

$$w(r)=\frac{2}{\pi E_0}\ln\frac{d}{r}=-\frac{2}{\pi E_0}\ln r+c \tag{7}$$

对于平面变形情况，E_0 应换以 $\frac{E_0}{1-\mu_0^2}$。上式中有一常数 d 或 c，是未定数，因为我們不能决定在这情况下各点的絕对沉陷值。所

以，在平面問题分析中，所謂沉陷都是指相对沉陷，不是絕对沉陷，本书以后都是这样，而必须在这里予以明确指出。

将 $w(r)=-\frac{2(1-\mu_0^2)}{\pi E_0}\ln r+c$ 代入式(5)，而且引用以下新的符号，使基本方程組无因次化：

$$
\left.\begin{aligned}
&\xi=\frac{x}{l}\ (l\ \text{为梁半长，坐标原点在梁的中心})\\
&\rho=\frac{r}{l}\\
&\bar{\xi}=\frac{x+r}{l}
\end{aligned}\right\}\quad(8)
$$

我們可得到如下的基本方程組：

$$
\left.\begin{aligned}
&w(\xi)=\frac{-2l(1-\mu_0^2)}{\pi E_0}\int_{-(1+\xi)}^{(1-\xi)}p(\bar{\xi})\ln\rho d\rho+C\\
&\frac{EJ}{(1-\mu^2)l^4}\frac{d^4}{d\xi^4}w(\xi)=q(\xi)-p(\xi)\\
&\left(\frac{d^2y}{d\xi^2}\right)_{\xi=\pm1}=0\quad\left(\frac{d^3y}{d\xi^3}\right)_{\xi=\pm1}=0\\
&\int_{-1}^{1}p(\xi)d\xi=\int_{-1}^{1}q(\xi)d\xi,\quad\int_{-1}^{1}p(\xi)\xi d\xi=\int_{-1}^{1}q(\xi)\xi d\xi\\
&w(\xi)=y(\xi)
\end{aligned}\right\}\quad(9)
$$

在空間問题中，基本沉陷函数 $w(r)$ 改为

$$w(r)=\frac{(1-\mu_0^2)}{\pi E_0 r}$$

而且这是絕对沉陷值。

不論是平面問題或空間問題，要解決基本方程組是非常困难的。只有在极少数的簡单情况下，才找出了理論上的解答（例如盖尔雪万諾夫和馬切勒特得出了承受集中荷載的无限长基础梁的解答，在这个解答中，他們沒有应用基本方程組，而系直接从平面弹

性理論的基本方程出发，加以积分；又如剛性梁下的反力分布的理論解答，亦已求出）。因此对于大多数实际問題，我們不能不寻求一些近似的和数値的解答。

1-4　解决基本方程的一些途徑

下面我們介紹几种常用的、解决基本方程的近似方法：

1．佛罗林方法　佛罗林氏假定反力可用n次幂多項式表示之，如令 $p(x)=\sum_{i=0}^{i=n}a_ix^i$，其中有 a_0、a_1、$a_2\cdots a_n$ 等 $n+1$ 个系数待定。将假定的反力表达式，代入計算梁的变位和計算地基沉陷的公式中，求出变位 y 及沉陷 w（当然，含有各未定系数 a_i），然后利用平衡条件，并选擇 $n-1$ 点上 $y=w$ 的条件，即可成立 $n+1$ 个方程，确定 $n+1$ 个 a 值。

級数項数取得愈多，則愈精确，但計算工作量也愈大。在近似計算中，我們常只取級数中的两項或四項，而获得許多簡单的計算公式。

2．郭尔布諾夫-波薩多夫方法（以下簡称郭氏法）　郭氏同样采用幂級数来表示反力分布形式，且代入梁和地基的变形公式，加以积分，求出 y 及 w 的表达式，其中各含有 a_i 值，然后利用 $y=w$ 的条件，使两边同次幂系数相等，加上平衡条件，可以成立一組联立方程来确定各 a_i 值。

3．最小二乘法　此法亦将反力 p 以幂級数表示之，并应用它求出 y 及 w 的表达式。但确定各 a_i 值时，除应用平衡条件外，第二个条件是計算 y 与 w 的相差值并平方积分之，再調整 a_i 值，使該积分之值为最小，这样可以建立起一組方程来决定 a_i 之值。本法比以上所述的两法效果为好，常可用較少的未知元而求得較滿意的結果。

4．混合法　以上三法都是将反力以級数形式表之，然后分别

利用各种条件来决定未定系数。有时，我們可采用不同的混备条件来决定各系数。例如，設級数中有六个未知元，除由平衡条件可建立两个方程外，我們令某指定的两点上的变位相重合，令两条变形綫与水平綫所包成的面积相等，再令两条变形綫值平方的积分值相等，得到六个方程来决定六个未知元。这种混合条件的选取方式无穷，选取方式合理，可用最少的工作量，得到很满意的結果。

5．克魯宾法　克魯宾院士将反力 p 展为无穷級数，但不以 x $\left(\text{或 } \xi=\frac{x}{l}\right)$ 的冪級数表示之，而是以柴比霍夫多項式表示之，或

$$p=p(\xi)=\frac{2P_0}{\pi\sqrt{1-\xi_0}}+\sum a_i\frac{T_i(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} \tag{10}$$

式中　$T_0(\xi)=1, T_1(\xi)=\xi, T_2(\xi)=2\xi^2-1, T_3(\xi)=4\xi^3-3\xi, \cdots$

然后也代入梁及地基的变位方程中，求出 y 及 w 的表达式，利用同次冪系数相同的办法，求出各未知系数。由于柴比霍夫多項式的一些特性，利用克魯宾法的計算工作可以簡化很多，对于計算剛性較大的梁尤为合适。此法是値得注意的一个新穎途徑。

6．日莫契金方法（鏈杆法）　日莫契金氏的鏈杆法是很有名和通用的方法，他将梁分为若干等分（其数量視計算精确度而定），假定地基反力在每一分段內是均匀的，每分段中心在梁和地基之間，設置一剛性鏈杆，以鏈杆中的力代表該段地基反力。利用平衡条件及梁的变位与地基沉陷相等的条件，成立若干方程，解出鏈杆中的內力，从而求出地基反力的分布。

日莫契金法的特点是应用范圍較广泛，如基础梁的剛度有变化时，前述各法均难适用，而本法仍可应用；但計算工作量較为繁重。此外，国內外一些学者曾对此法提出若干修改意見，但是基本原理則相同，故仍可归入鏈杆法类型中。

7．蔡氏法　我国蔡四維同志在1959年发展了一种計算彈性地基上梁的新方法（見参考文献[10]）。这个方法在計算途徑方面

与以前各法有很大的区别。以前各法都是分别研究基础梁和地基的沉陷曲綫或变形曲綫，然后根据两条曲綫应該貼合的条件来确定地基反力 $p(x)$ 的分布，其步驟可以表示如下：

(1) 假定反力 $p(x)$ 的分布（其中含有 n 个未知值 a_n）

{ (2) 由 $p(x)$ 計算地基沉陷 w（用彈性理論公式）
(3) 由 $p(x)$ 計算基础梁变形 y（用結构力学公式） }

(4) 根据 $w=y$ 的条件，建立 n 个方程。求 a_n

上述步驟中，由 $p(x)$ 計算 w 尙較方便，因为我們可以根据彈性理論的基本公式，預先算好一些系数表，以供檢用，而由 $p(x)$ 計算梁的变形 y 就較复杂。

蔡氏建議的途徑，在根据 $p(x)$ 計算地基的沉陷 w 后，徑利用 $w=y$ 的条件，直接計算梁各截面上的弯矩。这是很巧妙的一步，其步驟可表示如下：

(1) 假定反力 $p(x)$ 的分布（其中含有 n 个未知值 a_n）

{ (2) 由 $p(x)$ 計算地基沉陷 $w(=y)$ → (3) 由 y 計算梁的弯矩 $M\left(M=-EJ\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)$
(4) 由 $p(x)$ 及外荷載計算基础梁的弯矩 M（靜平衡計算） }

(5) 由(3)、(4)算出的 M 应相同，成立方程組，求 a_n

可見在蔡氏法中，以“由 y 計算 M”来代替“由 $p(x)$ 計算 y”，而前者的計算系利用結构力学中的基本公式 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=-\dfrac{M}{EJ}$ 来完成，并利用有限差公式化为

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{y_3-2y_2+y_1}{\Delta x^2}=\frac{-M}{EJ},$$

以使 M 可直接用 y 来表示。这一工作不但显然比“由 $p(x)$ 計算 y”方便很多，而且大部分工作可事先算好編制成表，以供实际檢用，从而使計算工作大为簡化，蔡氏法确为解算彈性地基梁基本方程的一种新額有效的方法。