高等学校试用教材

近世几何学

孙泽瀛编

高等教育出版社

高等学校試用教材

近世几何学

孙澤瀛編

高等教育出版社

本書是遵照教育部頒布的暫行教学計划、参照教育部編訂的試行教学大綱，并根据編者在1955年編写的一本高等师范学校交流講义"近世几何学"一書改編而成的。可作为师范学院数学系的試用教材，或各高等学校有关專业方面的参考書。

近 世 几 何 学

孙澤瀛編

高等教育出版社出版 北京宣武門內承恩寺7号
（北京市书刊出版业营业许可証出字第054号）

商务印书館上海厂印刷 新华书店发行

統一书号13010·578 开本850×1168 1/32 印张8 13/16
字数200,000 印数1—10,000 定价(4) ¥1.00
1959年4月第1版 1959年4月上海第1次印刷

序

本書是遵照教育部頒布的暫行教学計划，參照教育部編訂的試行教学大綱，根据編者在 1955 年編写的高等师范学校交流講义“近世几何学”一書改編而成的。可作为师范学院数学系近世几何一科的試用教材。本書的选材尽量想达到大綱里的指示：經过这門学科的学習，使学生一方面能从較高的观点来处理初等几何和解析几何的問題，以便更深入地理解中学几何教材；另一方面使学生掌握近世几何一些必要的知識与方法作为进一步研究几何学的准备。

本書的主要內容是射影几何学，从而牵涉到和它有关的仿射几何学、欧氏几何学与非欧几何学；采用的方法是兼用綜合法与解析法，这也是大綱所規定的。通过綜合法的处理以便近世几何的知識应用到初等几何里去，通过解析法的处理以便联系解析几何从而配合近代几何学的研究方向。

在第一章的导言里，概括地提出几何学內容的丰富性与范圍的广大性，使学生曉得以前所学的欧氏几何学在整个几何学內所处的地位，并使他們知道作为本書主要內容的射影几何学是如何發展起来的。这样一开始就刺激学生在深度与广度方面去探究几何学的全貌。

有了以上的刺激作用，第二章里就开始細致地介紹仿射几何学，作为由欧氏几何学过渡到射影几何学的桥梁。在介紹过程中，采取由直观到抽象的原則：由平行投影提到仿射变换的代数表示，从而列举出仿射变换的特例和初等几何学里的变换联系起来。

第三章是从与平行投影类似的直观概念：中心投影講起，进而自然地引入了理想元素，由此發生了拓广欧氏平面的要求。緊接着对于这拓广平面作了細致的介紹，以它作为建立射影几何学的基地。

第四章到第八章兼用了綜合法与解析法介紹射影几何学里的基本知識。在这里我們并不列举射影几何学的公理体系，以避免有了公理体系而不从公理法入手的疑慮。介紹过程中也牽涉到仿射与欧氏几何学，因此在第九章里总結性地把这三种几何学作出比較，这样才可使学生对这些几何学的关联和系統有概括而清晰的認識。

在这种認識之下，更突出地用二次曲綫为例来闡述它的射影性質、仿射性質与度量性質以配合上述的三种几何学，这是第十章到第十六章的內容。講到度量性質时，就引起了度量观念扩充的要求，因此就發生了射影測度的規定，从此很自然地引进了非欧几何学。在概括地介紹了非欧几何学之后，就有必要把射影、仿射、欧氏与非欧等几何学再来个总結性的比較，得出它們之間的关联与系統。最后为了对学生更深入地鑽研几何学提供方向起見，对于射影几何学的近代發展趋势作了一个概要的指示，这就組成第十七章的內容。

以上共十七章的內容已經够完整地充作这門学科的教材了，但为了給出一个范例說明从二維几何学如何可以平行地扩充到高維几何学，因此在第十八章里介紹一些三維射影几何学的知識。如果时間不許可的話，这一章可以全部省去不講。

每一章之首都附有說明，簡略地介紹本章內的主要內容以及和前一章的联系。每一节之末附有習題，有时还有例題；个别較难的習題連解法都写出来了，作为解題参考之用。在例題与習題里，随时可以發現如何利用近世几何学的观点去处理初等几何与解析

几何的問題。像这样以初等几何和解析几何为基础来闡述近世几何学，同时又把近世几何学的观点应用到前两者去，这正是編写本書时所采取的精神。

在主观願望上編者很想这本書能体現教学大綱的精神对讀者有所帮助，但限于編者的水平，在系統的編排方面，在內容的取捨方面，可能还存在不少的問題，希望讀者批評指正。

末了，要提到华东师范大学数学系的錢端壮教授，他对改編工作提供了宝貴的意見；王懿怡同志为編者整理了插圖并校正錯誤；对于他們，編者是深切感謝的。在繪制插圖方面，編者还要提到他的孩子孙永瑋也帮了忙。

編者

目 录

第一章　导論

这一章是提供对几何学全貌的概观，以及在本学科中占主要地位的射影几何学的历史描述，其目的是为了啓發学生探究以后的內容。

§1. 几何学的对象

作为数学中三大部門之一的几何学所研究的对象是什么呢？不消說是圖形的性質。那些性質呢？我們先檢查一下所熟知的欧氏几何学，就可發現它所研究的性質是与圖形的特定位置无关的，例如說長度、角度、面积、体积等。所謂“与特定位置无关”这句話又是什么意义呢？这就是說一个圖形允許它在所处的空間內任意搬动。因搬动的地点不同，于是由一个圖形产生了許多其他地点的圖形，这些圖形因为是由同一圖形經搬动而产生的，我們把它們当做是不同地点的同一圖形。欧氏几何学就是研究这些不同地点的同一圖形的性質。換句話說，就是研究圖形在搬动之下不变的性質。

搬动是一种变換，是不是还有其他的变換呢？当然有的，例如圖形在太阳光綫之下，它的影像就在地面上，由原圖形到影像的变換是太阳光綫的平行投影，这种平行投影組成了以后要講的仿射变換。此外还有中心投影，例如把圖形放在灯光的前面，投影到牆壁上得到另一圖形，这另一圖形可說是經过中心投影由原圖形得到的，这种中心投影組成了以后要講的射影变換。在仿射变換与射影变換之下，研究圖形的不变性質，又是另外的两种几何学

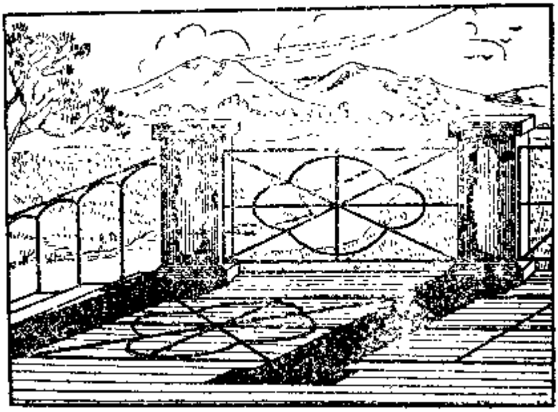

圖 1.

了，这两种几何学就是以后我們要討論的仿射几何学与射影几何学。

这样說来：是不是凡有一种变换，就有一种几何学呢？这又不然，以后我們将要詳細討論到：凡是与一种几何学相对应的变换，其全体必須組成一个"群"。相反地，凡是一种变换，其全体能組成"群"，就可以对这一变换"群"研究圖形的不变性質而得到相应的几何学。

因为变换群的不同，就有不同的几何学，目前我們熟知的有：

(1)运动(即搬动)变换群——欧氏几何学，

(2)仿射变换群——仿射几何学，

(3)射影变换群——射影几何学。

§2. 几何学所用的方法

几何学所用的最原始方法就是欧几里得"几何原本"里所用的古典公理法，或称为綜合法。这个方法不同于現代公理法，它完全不借助于数的概念及代数学知識而是專憑人們对圖形的直接观察，以一些定义及原始命題称着公理与公設的为依据，利用一定的

邏輯推理程序导出一連串的定理。这个方法也正是我們熟知的初等几何学里所用的方法，它的好处在于能利用圖形的直观形象帮助我們想像从而觉察出圖形間的关系。可是它受到一定的局限性，对于一般几何問題的处理，尤其是对于那些不便用圖形直观所表达的問題，就感到难于想像。此外，几何学里有許多問題是不能專憑圖形的直接观察而能严格說明的。因此，从近代几何学的發展来看，單純利用这种方法已失去近代几何学的广泛性或抽象性的要求。

另一种方法是解析法，那是通过坐标观念把圖形与数結合起来，利用代数学的知識与运算来研究几何圖形的性質。解析几何学就是利用这种方法的。不便于利用綜合法处理的几何問題，利用了它就可以得到解決，因为这种方法具有一定的普遍性，在近代几何学里越来越广泛地用到它。它还有促使几何、代数、分析結成有机联系的作用，微分几何学就是利用它通过数学分析的知識来研究圖形在微小区域内的性質。

还有一种方法叫公理法，也就是以希尔伯脫为代表引进的現代公理法。它不同于欧几里得所用的古典公理法，而是对后者进行了深入批判后整理出的一套純論理方法。它完全脫离直观性的約束，以一系列的公理形式，規定出一些抽象的原始对象間的相互关系，以此为基础从而导出整个几何学里的一切概念与定理，这样就發揮了数学里高度的抽象性因而奠定了現代数学的發展途徑。如果說綜合法是强调直观的邏輯推理，那么，公理法可說是强調客观的邏輯推理。

当然，上述三种方法的区分并不是絕对的。我們很难划分出綜合法与公理法的严格界綫，同样，解析法与公理法也不免有混淆的地方，这样的分类只不过是根据历史發展的程序而作出的一种粗糙分类罢了。

因为使用的主要方法不同，所以又有不同名称的几何学：

(1)綜合法——綜合几何学，例如初等几何学；

(2)解析法——坐标几何学，例如解析几何学；

(3)公理法——抽象几何学，例如几何基础論。

§3. 几何元素及其坐标

构成几何圖形的基本东西，称为几何元素。普通以点作为几何元素，一根曲綫或一个曲面都看做是由点組成的。如用术語来講，曲綫与曲面是点的軌迹。但在高等几何学的范圍內，除掉点以外，直綫、平面、圓、球等都可以作为几何元素。例如說一条曲綫吧，我們可以把它当做是一群直綫的包絡，这时曲綫可以說是由直綫組成的。因此，直綫就可以看做是几何元素。同样地，几何圖形有时也可以看做是由平面、圓或球所組合的，这时，平面、圓与球就是几何元素了。

几何学旣然是研究圖形的性質，而圖形的构成是根据几何元素，因此，由于所取几何元素之不同，我們有

(1)点几何学

(2)綫几何学

(3)面几何学

(4)圓几何学

(5)球几何学

等等。初等几何学是屬于点几何学范圍內的。

为了使代数方法可以应用到几何里去，于是代数里的基本对象——数，与几何学里的基本对象——几何元素之間就不得不先給以一种关联，这就是解析几何学里所采用的坐标办法。这种关联就是数学上的对应关系。数或数組之集合与几何元素之全体成为一一对应的，那么，这个数或这数組就称为这几何元素的坐标。

在普通的解析几何学里,我們已經曉得:直綫上的点坐标,平面內的点坐标,三維空間內的点坐标了。在第一个情况下,以一个数作为点的坐标;在第二个情况下,以一对数作为点的坐标;在第三个情况下,以三个数所成的組作为点的坐标。这些坐标的規定,是先择取一个坐标系(例如笛氏直角坐标系)作为表达形数对应的工具。这一切都是我們所熟知的事情,在此不必多講。

几何元素既不限于是点,如果取平面內的直綫或平面內的圓,取三維空間內的平面或三維空間內的球作为几何元素时,它們的坐标应如何規定呢?現在分別討論于下:

(1)以平面內的直綫为几何元素。平面直綫的方程式一般可写成

$$Ax+By+C=0,$$

对于不通过原点的直綫可化为

$$ux+vy+1=0,$$

这里的 $u=\frac{A}{C}$, $v=\frac{B}{C}$。根据解析几何学里的知識,我們曉得后一方程与平面內不通过原点的直綫有一一对应的联系。可是后一方程是由两个系数 u, v 所决定的,因此,平面里不通过原点的直綫与 u, v 有一一对应的联系,u 与 v 两数所成的数对 (u, v) 就可以当做不过原点的平面直綫的坐标了,它称为不过原点的平面直綫的坐标。直綫坐标的使用起源于卜利克尔(Plücker)。

从这里我們看出直綫坐标的規定是先有了点坐标的观念而得出来的,这是历史發展的过程,而不是邏輯上的必然,我們也可以独立地規定直綫坐标。

(2)以平面內的圓为几何元素。有了圓心与半徑就可以决定圓。可是圓心是平面內的一个点,它是以一对数 (x, y) 作为坐标的。因此,圓可以用三个数所成的組 (x, y, r) 来决定,这組数里前

面两个数表示圆心坐标，后一个数表示半徑。

(3)以空間内的平面为几何元素。不过原点的平面方程可以写成

$$ux+vy+wz+1=0,$$

因此，不过原点的平面的坐标是三个数所成的組(u, v, w)。

(4)以空間内的球为几何元素。球是由球心与半徑所决定的。可是球心是空間里的一个点，它是以三个数所成的組(x, y, z)作为坐标的。因此，球可以用四个数所成的組(x, y, z, r)来决定，这組数里前三个数表示球心坐标，后一个数表示半徑。

習 題

1. 試求两直綫(u_1, v_1)及(u_2, v_2)

(i) 垂直 (ii) 平行但不重合 (iii) 重合

的充要条件。

2. 試求四平面(u_i, v_i, w_i) $(i=1,2,3,4)$共点的充要条件。

§4. 几何学的維

上面我們曾提到，由于几何元素取法之不同，于是有点几何学、綫几何学等等。可是同样的点几何学，因为作为原始对象的几何元素可以是直綫上的点、平面内的点、空間内的点，于是就有直綫上的点几何学、平面内的点几何学与空間内的点几何学。后面两种就是一般所称的平面几何学与空間（或立体）几何学。同样地，我們有平面内的綫几何学与空間内的綫几何学。为了处理的方便与統一起見，我們訂下几何学的“維”。根据“維”的观念又可把几何学分为

(1)一維几何学

(2)二維几何学

(3)三維几何学

等等。

什么是几何学的"維"呢？这就是作为原始对象的几何元素活动的自由度。明确地講，就是它的坐标数目。例如直綫上的点几何学是一維几何学；平面内的点几何学是二維几何学，平面内的綫几何学也是二維几何学；空間内的点几何学是三維几何学，平面内的圓几何学也是三維几何学；空間内的球几何学是四維几何学。

普通我們說一維空間、二維空間、三維空間，也就是空間有維的观点，現在几何学也有維的观念，这两者究竟如何区别呢？关系如何？

为了說明这一点，我們要先曉得什么是空間。空間是点所組成的，也可以說空間是点自由活动的范圍。范圍有大小，于是就有不同范圍的空間。一維空間包含在二維空間里，二維空間包含在三維空間里。因此我們可以說空間的"維"是那构成空間的基本元素，点的活动的自由度，更明确地講，是点的坐标数目。例如說，点活动的自由度是一的話，就得到一維空間，也就是直綫；点活动的自由度是二的話，就得到二維空間，也就是平面。

再看几何学的維吧，那是几何元素活动的自由度。几何元素不限于点，所以几何学的維可以与所处空間的維不同。例如平面是二維空間，可是平面内的圓几何学是三維几何学。同样普通簡称的空間是三維空間，可是它里面的球几何学是四維几何学。

关于"維"的精确意义，已屬于拓扑学范圍内的事，不在这里討論。

習　題

1. 以三維空間内的直綫为几何元素的几何学是几維的？
2. 以平面内的圓錐曲綫为几何元素的几何学是几維的？

§5. 射影几何学的任务和沿革

本書的主要內容是介紹一維与二維射影的点几何学与射影的綫几何学，但为了比較起見，我們也引进了仿射几何学与欧氏几何学。我們对于射影几何学特别着重的原因，是因为它的范圍特别广大，可以包含許多其他的几何学，例如欧氏几何学、非欧几何学、仿射几何学等，克勒 (Cayley) 曾說过"射影几何学是一切的几何学"。有了它，我們才可以居高临下地遍察其他几何学間的关联，扩大讀者对几何学的認識，从而提供一种对几何問題統一处理的方法。

射影几何学的起源是由于繪圖和建筑上的需要。当一个画家要把一个实像描繪在一塊布幕上时，他用他的眼睛当做是投影中心，把实像投影到布幕上去。他的眼睛好比是灯光，把实像的影子映射到布幕上去，然后再描繪出来。在建筑上我們需要把設計的实物画在一个平面上，平面上的圖样就是实物的平面投影。这种投影技术在純理論方面的發展，就成为射影几何学；在实用方面的發展就成为現在工业学校必修科目之一的画法几何学。

射影几何学从片斷的知識进展成为理論体系严整的学問，是經过十九世紀世界上許多学者努力的結果。內中我們提出芒吉 (Monge, 1746—1818)、卡洛 (Carnot, 1753—1823)、龐司勒 (Poncelet, 1788—1867)、莫比斯 (Moebius, 1790—1868)、斯坦勒 (Steiner, 1796—1863)、卜利克尔 (Plücker, 1801—1868)、沙尔 (Chasles, 1793—1870)、馮斯滔 (Von Staudt, 1798—1867)、克勒 (Cayley, 1821—1895)、克利蒙納 (Cremona, 1830—1903)、派歇 (Pasch, 1882)、恩利格 (Enriques, 1902)、萊耶 (Reye, 1909)、魏布倫 (Veblen, 1910) 等人，芒吉是画法几何学的創始人，龐司勒是射影几何学的开山祖师。卡洛、斯坦勒、沙尔、馮斯滔、萊耶等人