高等学校试用教材

数学分析

（上册）

陕西师范大学出版社

高等学校试用教材

数学分析

上册

朱永庚 申启阳 戴文惠 李志毅 曹怀信 合编

陕西师范大学出版社

数 学 分 析

上 册

朱永庚 申启阳
戴文惠 李志毅 曹怀信 合编

*

陕西师范大学出版社出版

（西安市陕西师大 120 信箱）

陕西省新华书店经销 西安电子科技大学印刷厂印刷

*

开本 850×1168 1/32 印张 10.125 插页 2 字数 229 千

1989 年 6 月第 1 版 1989 年 6 月第 1 次印刷

印数 1—2 000

ISBN7-5613-0230-4

G·212 定价：2.10 元

前　　言

众所周知，数学分析在整个数学中占重要地位。而在大学数学系的教学中则起着举足轻重的奠基作用。目前正在进行的教学改革是一项涉及面很广的复杂工作，而教材改革无疑是其中重要的一环。由此促使我们编写了这本教材，以便更好地进行一些改革试验，探索提高这门课程教学质量的规律。

本书在编写中注意渗透一些现代数学的观点与方法，如介绍并运用了映射、邻域的概念，引入了存在量词 $\exists$ 与全称量词 $\forall$，并用来表示一些基本概念、命题及其对立(否定)命题。

在内容方面竭力贯彻少而精的原则。这一方面考虑到当今整个数学的发展中除去连续数学之外，离散数学亦日益显现其重要性；另一方面数学分析本身也需要不断更新内容。我们参照1980年高校理科数学教材编审委员会审订的高师《数学分析教学大纲》，较同类教材减少了一定的篇幅，同时增加了向量值函数的微分学。

对于定理的证明，力求博采众书之长，使思路清晰、叙述简明，例如一致连续性定理、可积性定理、隐函数存在定理和重积分的变量代换定理等都着意进行了考虑，尽量使之易为学生所接受。

实数理论概要作为中学数学教师是应该了解的，而上、下极限在一些后继课程中要用到，故作为附录Ⅰ、Ⅱ列于书后，以备查阅。

书中配备的习题大多为基本的而读者有可能在课后独立完成的，个别题有一定的难度，需要在教师的提示或指导下方能完成 在书末附有部分习题的答案以供参考。

本教材是为高师数学系本科生编写的，也可作数学系本科函

授生教材。带*号的部分内容和习题可作为选用。适当删减部分内容(如可积性理论、隐函数存在定理等)亦可作高等师专教材，还可供高校理工科有关专业作教学参考用书。

本书分上、下两册，各部分编写分工如下：一元微分学及附录Ⅱ朱永庚，一元积分学及级数申启阳，多元微分学及隐函数论戴文惠，广义积分及多元积分学李志毅，附录Ⅰ由山西大学师范学院王永明副教授和山西师大数学系副系主任李少琪编写，曾经相互多次交换审阅了初稿和修改稿，最后曹怀信同志通读了全稿，提出了许多修改的意见。

本书是在陕西师大数学系原系主任叶彦润教授的直接指导下，原函数论教研室主任王幼鹏副教授倡导下编写的。数学系、校成人教育学院的领导对于编写和试用工作都给予了大力支持。路干亭教授、常心怡副教授和李文同志为提高书稿的质量付出了辛勤的劳动。在此我们一并致谢。

由于时间仓促，加之编者水平有限，错误与疏漏之处在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

1989年2月于陕西师大

内 容 简 介

本书分上、下两册出版。上册包括引论、函数、数列极限、函数极限、连续函数、导数和微分、微分中值定理及其应用、不定积分、定积分及其应用等。书末附有实数理论概要及上、下极限的内容。

本书为高师数学系本科教材，也可作数学系本科函授教材，适当删减部分内容还可作高师师专教材，亦可供高校理工科有关专业作教学参考用书。

目　录

第一章 引 论

微积分是 17 世纪末由牛顿(Newton, I.)和莱布尼兹(Leibniz, G. W.)相互独立地创立的。当然，微积分的形成远非是一两个人的工作，几乎 17 世纪所有杰出的科学家都不同程度地参与了这一门新学科的创立工作。它实际上经历了一个极其漫长而曲折的历史过程，是一系列数学思想演变的结果。牛顿和莱布尼兹的功绩是把在此以前的人们在无穷小量分析中涉及到的观点、方法和发现组成了以独特的算法为特征的新的学科。《数学分析》即《无穷小分析》，而《无穷小分析》又是《利用无穷小进行分析》的简称。

古典的数学分析研究的对象是欧氏空间上的函数，它的进一步发展将是研究更抽象、结构更复杂的空间上的函数，如泛函、算子等概念。

数学分析的研究方法为无穷小方法，即极限的方法。由它导出的两种极为基本而重要的运算——微分和积分，构成了我们这门课程的主要内容。

这一章是一些预备知识，内容是按照后面的需要而安排的。

§1 直积 映射 量词

在数学中，通常用记号$\{x|p(x)\}$表示满足条件$p(x)$的元素x的全体作成的集合。例如$\{x|x^2-1=0\}$表示方程$x^2-1=0$的根组成的集合，$\{x|8\leqslant x<10\}$表示满足$8\leqslant x<10$的实数作成的集合。

本书以R、Q、Z和N分别表示全体实数、有理数、整数和自然数所成的集合。

一、直积

1.1 定义 设 A、B 是两个集合，由所有 $a\in A$，$b\in B$ 的序偶 (a, b) 构成的集合，称为 A 与 B 的直积或笛卡尔(Descartes, R.)积。记为

$$A\times B=\{(a, b)\mid a\in A, b\in B\}.$$

例如平面上的点的全体，可记为

$$R\times R=\{(x, y)\mid x\in R, y\in R\}.$$

若 $A=\{1, 2, 3\}$，$B=\{4, 5\}$，则

$$A\times B=\{(1,4), (1,5), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5)\}.$$

若 A 中有 n 个元素，B 中有 m 个元素，则 $A\times B$ 中有 nm 个元素。

显然一般地 $A\times B\neq B\times A$。

二、映射

1.2 定义 设 X、Y 为两个任意非空集合，若对于 X 中的每一个元素 x，通过某一法则 f，有唯一的 $y\in Y$ 与之对应，则称 f 为集合 X 到 Y 的一个映射，记为 $f: X\to Y$。在映射 f 下与 x 对应的 y 称为 x 的象或值，记为 $y=f(x)$。x 称为 y 在 f 之下的原象，y 的原象集记为 $f^{-1}(y)$，即 $f^{-1}(y)=\{x\mid x\in X, 且 f(x)=y\}$。又 X 称为映射 f 的定义域，$f(X)=\{f(x)\mid x\in X\}\subset Y$ 称为映射 f 的值域。

设 $f: X\to Y$ 是一映射。如果对于任意 x_1、$x_2\in A$，$x_1\neq x_2$ 都有 $f(x_1)\neq f(x_2)$，则称 f 为一一映射或单射；如果 $f(X)=Y$，则称 f 为到上的映射或满射；如果 f 既是一一的又是到上的，则称 f 为一一对应。

例 1 设 X 为平面上一切圆作成的集合，R 为实数集，法则 f 为：对 X 中的每一个半径为 r 的圆，使与由它唯一确定的面积 πr^2 相对应，则 f 为 X 到 R 的一个映射，它既不是单射，也不是满

射。

例 2 设 A 为平面上所有三角形构成的集合，B 为平面上所有圆构成的集合，法则 f 为：对 A 中的每个三角形，使与它唯一确定的外接圆相对应，显然 f 为 A 到 B 的一个映射，它是满的但不是单的。

由此可见，映射所刻划的是任意两个集合间的一种关系，涉及的集合不一定是数的集合。

例 3 设 $X=(-\infty,\ +\infty)$，$R=(-\infty,\ +\infty)$，法则 f 是与每个 $x\in X$ 对应的 $y\in R$ 要满足 $y=x^2$，则 f 为 X 到 R 的一个映射，尽管 x、$-x\in X$，且 $x\neq -x$，却可以对应同一个象。因为 $y=x^2=(-x)^2$。

例 4 设 $A=(0,\ +\infty)$，$R=(-\infty,\ +\infty)$，法则 f 是：与每个 $x\in A$ 对应的 $y\in R$ 要满足 $y^2=x$，则 f 不是 A 到 R 的映射，因为按照法则 f，一个 x 有两个 y 即 $\sqrt{x}$、$-\sqrt{x}$ 与之对应。

三、量词

为了叙述论证的方便简捷，我们介绍两个量词。

符号“$\exists$”叫做存在量词，表示“至少有一个”或“存在”。

符号“$\forall$”叫全称量词，表示“对所有的”或“对任一个”。

存在量词与全称量词统称为量词。

此外，记号“$L\Rightarrow P$”表示若 L 则 P，即 L 蕴含 P，即 L 推出 P 等。

而记号“$L\Leftrightarrow P$”表示 L 与 P 是等价的，即 L 的充要条件是 P，亦即 $L\Rightarrow P$，$P\Rightarrow L$ 同时成立。

习 题 1.1

1. 试用直积、映射表示实数中的加法与乘法。
2. 试举出分别满足下列条件的映射：

(1) 满射而不是单射的；

(2) 单射而不是满射的；

(3) 不是单射也不是满射的；

(4) 既是单射也是满射的.

§2 实数概述

微分、积分的概念是运用无限过程的运算——极限来刻划的. 极限运算是一种不同于加、减、乘、除的新的运算. 在人类生产生活的发展过程中，不断需要进行新的运算，而每一种新的运算都促使数的新的扩充. 我们将会看到，从有理数到实数的扩充，正是为了适应极限运算的需要.

从有理数扩充到实数有种种方法，主要的如戴德金(Dedekind, J·W·R·)分割法、康托(Cantor, G·)有理基本序列法、魏尔斯特拉斯(Weierstrass, K·)区间套法、无限十进小数法和公理法等.

严格的实数理论是数学家们19世纪开始着手逐步建立的.我们这里不打算一开始就完全按照严格的逻辑来建立全部实数理论，而只是证明几个反映实数连续性的定理. 在附录中给出康托实数理论的要点，供有兴趣的读者阅读.

我们知道，有理数总可唯一地表示为$\frac{p}{q}$的形式，其中p、q为整数，$q>0$且p、q互质.

如同由自然数出发可构造有理数一样，我们可以认为有理数及其性质为已知，来构造实数. 如前所述，实现这一目的可以循着种种不同的途径，但不论采取何种途径，都必须满足下列要求，这些大都是我们在中学就已熟知的实数性质的抽象和一般化.

设R为实数集，定义$R\times R$到R的两个映射：$(x,y)\mapsto x+y$，

$(x, y) \to xy$ 分别称为加法与乘法运算，并定义 R 的元素间的关系 $x \leqslant y$，则它们具有以下各性质。

（一）加法运算

1．存在元素 $0 \in R$，使每个 $x \in R$，$x+0=x$；

2．对于每个元素 $x \in R$，都存在元素 $-x \in R$，使 $x+(-x)=0$；

3．对于 R 中任意的元素 x、y、z，有

$$x+(y+z)=(x+y)+z;$$

4．对于 R 中任意的元素 x、y，有

$$x+y=y+x.$$

（二）乘法运算

1．存在元素 $1 \in R$，$1 \neq 0$，使任意的 $x \in R$，$1 \cdot x = x$；

2．对 R 中每一元素 $x \neq 0$，都存在元素 $x^{-1} \in R$，使 $x \cdot x^{-1} = 1$；

3．对 R 中的任意元素 x、y、z，有

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z;$$

4．对 R 中的任意元素 x、y，有

$$x \cdot y = y \cdot x.$$

（三）加法与乘法的联系

对 R 中的任意元素 x、y、z，有

$$(x+y)z = xz + yz.$$

（四）序性质

1．对任意的 $x \in R$，任意的 $y \in R$，

或者 $x \leqslant y$，或者 $y \leqslant x$；

2．若 $x \leqslant y$ 且 $y \leqslant x$，则 $x = y$；

3．若 $x \leqslant y$，$y \leqslant z$，则 $x \leqslant z$。

（五）R 中加法与序的联系

若 $x \leqslant y$，则 $x+z \leqslant y+z$。