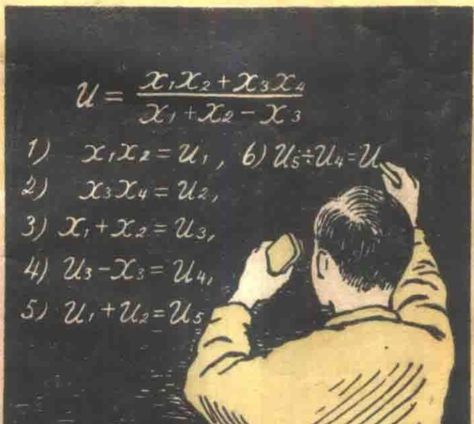
蘇聯青年科學叢書

數學歸納法

索明斯基著



中国青年出版社

蘇聯青年科學叢書

數學歸納法

索明斯基 著
高 徹 譯

中国青年出版社
一九五四年・北京

書號 98 數理化 6

數學歸納法

著者 〔蘇聯〕索明斯基

譯者 高徹

出版者 青年·開明聯合組織 中國青年出版社 北京東四12條老君堂11號

總經售 新華書店

印刷者 北京市印刷一廠

開本 787×1092 1/32　一九五三年六月北京第一版

印張 2　一九五四年十一月北京第四次印刷

字數 38,000　印數 40,001—48,000

北京市書刊出版業營業許可證出字第035號

定價 2,000 元

序

這本小册子裏所要講的數學歸納法在各門數學中都廣泛的應用到；從最基本的學校裏的課程起，一直到最後幾年所鑽研的科目裏都用到它．因此就很清楚，沒有掌握這種方法，學校裏的數學課程便不可能學習得好．不僅如此，數學歸納的思想方法具有相當大的一般教育意義，因此即使對數學和數學應用沒有什麽關係的人，對這種方法加以認識也是一件有益的事．

數學歸納法的基本內容以及最簡單的例題是包含在第一章以及第二章第一節裏，要懂得這一部份，只要具備七年制學校的程度就够了．至於了解其餘部份，對於一個具有中學程度*的讀者來說，也完全不成問題．

這本小册子的對象是中學高年級的學生，師範學院、大學及技術專科學校的初年級學生．除此以外，本書也可用來作中學裏數學討論會的資料．

以下的幾篇文章是討論關於數學歸納法的：

謝平斯基(Серпинский С. В.)，論數學歸納法，載‘數學及物理教學法’1936年第3期．

別西考維奇(Безикович Я. С.)，數學歸納法，載‘數學教學

---

*蘇聯的七年制學校相當於我國的初級中學，這裏所說的中學程度，相當於我國的高級中學程度——譯者註

法'1946年第1期.

索明斯基(Соминский И. С.),論中學裏數學歸納法的學習,載'數學教學法,方法論文集'第2卷,列寧格拉省教師進修學院,1947年出版.

納基賓(Нагибин Ф. Ф.),中學課程裏的數學歸納法,載'數學教學法'1949年第4期.

關於數學歸納法的練習題,讀者可在下列的書裏找到:克雷契馬爾(Кречмар В. А.),代數習題,第二版,國家技術理論書籍出版局,1950.

И. С. 索明斯基 一九五〇,八,二五

第 二 版 序

在第二版裏補充了一個例題（例題 8），並且加了例題 10 的另一個解答。

除了略作文字上的修改以及把少數誤植更正了以外，其他部份可以說是沒有更動。

И. С. 索明斯基 一九五一，一〇，二五

內容提要

在許多數學部門裏，都用到了數學歸納法。若不能掌握這種方法，就不能認眞學好數學課程。本書先介紹了數學歸納法的基本意義，然後列舉各種各樣的例題來說明在不同的場合下，數學歸納法是怎樣被使用着的。本書主要爲中學高級班的同學寫的，但對於較高程度的學生也很有用處，最適宜於作爲學校中數學討論會的參考資料。

И. С. СОМИНСКИЙ
МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ
ТЕХГИЗ, МОСКВА, 1952

目 次

前　　言

命題可以分爲一般的和特殊的．我們舉幾個一般命題的例子如下：

任何一個蘇聯公民都有受教育的權利．

在**任何**一個平行四邊形中，對角線的交點必定平分對角線．

任何一個個位爲零的數必定可被 5 除盡．

下面是幾個和上述的一般命題相對應的特殊命題：

彼特羅夫有受教育的權利．

在平行四邊形 $ABCD$ 中，對角線的交點平分對角線．

140 可被 5 除盡．

由一般命題過渡到特殊命題，稱爲**演繹**．例如：

1．任何一個蘇聯公民都有受教育的權利．

2．彼特羅夫是蘇聯公民．

3．彼特羅夫有受教育的權利．

由一般命題 1，借助於命題 2，而得到特殊命題 3．

由特殊命題過渡到一般命題稱爲**歸納**．歸納可以引到正確的結論，也可以引到不正確的結論．舉兩個例子來闡明這一點．

1．140 可被 5 除盡．

2．任何一個個位爲零的數必定可被 5 除盡．

由特殊命題1得到一般命題2．這裏命題2是正確的．

1．140可被5除盡．

2．任何一個三位數必定可被5除盡．

由特殊命題1得到一般命題2．這裏命題2是不正確的．

於是就發生了這樣的問題，如何在數學中用歸納法，使得所得到的結論全是正確的呢？這本小書就要回答這一個問題．

一 數學歸納法

1. 首先我們研究兩個數學裏所不允許的歸納的例子．

〔例1〕 令

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}.$$

我們容易證明：

$$S_1=\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2},$$

$$S_2=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{2}{3},$$

$$S_3=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{3}{4},$$

$$S_4=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}=\frac{4}{5}.$$

根據所得的這些結果就斷言，對於任何自然數 n

$$S_n=\frac{n}{n+1}.$$

〔例2〕 我們研究三項式 x^2+x+41；這個例是著名數學家，彼得堡科學院最早的院士之一Л.歐拉所指出的．在這個三項式裏以零代 x，得到一個質數41．現在，再對於同一個

三項式以1代x,又得一個質數43. 在這個三項式裏,繼續以2,3,4,5,6,7,8,9,10代x,每次都得到一個質數,分別爲47,53,61,71,83,97,113,131,及151. 根據所得的這些結果斷言,以**任何一個正整數代替這個三項式裏的x,必定得到一個質數.**

爲什麼在以上兩個例子中所作的推論是數學裏所不允許的呢? 我們所作的推論,不正確的地方究竟在哪裏呢?

問題在這裏,就是在以上的推論中,我們只根據了這些命題對於某些數值的n(在例2中的x)是眞確的,就推出關於任意數值的n(或x)的**一般命題**.

歸納在數學裏是被廣泛的應用着的,不過用時必須小心. 粗心地對待歸納會招致不正確的結論.

如果說,我們在例1中所作的一般命題幸而是對了,這點將要在例5中證明,那麼我們在例2中的一般命題卻是錯的.

實際上,更深入地考察三項式 x^2+x+41 就會發現,當$x=0,1,2,\cdots\cdots,39$時,所得的全是質數,可是當$x=40$時,三項式的數値爲41^2,就是一個合數.

2. 在例2中我們已遇到這樣一個命題,對四十個特別的情形都眞確,可是對一般的情形是不眞確的.

再舉兩個例說明有些命題在某些特別情形是眞確的,可是一般並不眞確.

〔例3〕 二項式x^n-1,這裏n是一個自然數,是很使數學家們感興趣的. 舉出這一點就足以說明了,就是這個二項式和幾何裏的把圓周n等分的問題有密切關係. 因此,這個二項式在數學裏曾經被深入地鑽研過,也就沒有什麼可以奇怪

的了. 數學家們對於把這個二項式分解爲具有整數係數的因子的問題,特別有興趣.

考慮了對於 n 的許多特殊數値的分解以後,數學家們觀察到,在所有分解出來的因子中,各個係數的絕對値都不超過一. 事實上,

$$x-1=x-1,$$
$$x^2-1=(x-1)(x+1),$$
$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1),$$
$$x^4-1=(x-1)(x+1)(x^2+1),$$
$$x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1),$$
$$x^6-1=(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

人們並且造出表來,在表的限度以內,各係數都具有上述的性質. 企圖證明這個事實對 n 的任何數値都成立的種種嘗試,都沒有成功.

1938 年,在雜誌'數學科學的成就'(第 4 卷)上,發表了著名蘇聯數學家,蘇聯科學院通訊院士 H. Г. 契波塔列夫的一篇短文,在其中他建議我們的數學家來搞清楚這個問題.

這個問題爲 B. 伊凡諾夫所解決* 證明了,當 n 小於 105 時,二項式 x^n-1 具有上述的性質. 不過 $x^{105}-1$ 的因子當中有一個是下面的多項式:

$$x^{48}+x^{47}+x^{46}-x^{43}-x^{42}-2x^{41}-x^{40}-x^{39}+x^{36}+x^{35}+x^{34}+x^{33}$$
$$+x^{32}+x^{31}-x^{28}-x^{26}-x^{24}-x^{22}-x^{20}+x^{17}+x^{16}+x^{15}+x^{14}$$

* '數學科學的成就',第 4 卷,313—317 頁,1941.

$$+x^{13}+x^{12}-x^9-x^8-2x^7-x^6-x^5+x^2+x+1,$$

已經不再具有上述的性質.

〔例 4〕 設有 n 個平面，經過同一個點，並且其中沒有三個平面經過同一直線. 這 n 個平面把空間分成多少部份?

先看這個問題最簡單的幾個情形. 一個平面把空間分成 2 部份. 經過一點的兩個平面把空間分成 4 部份. 經過一點而不經過同一直線的三個平面把空間分成 8 部份.

初看起來好像當平面的數目增加一個的時候，空間被分成的部份數是原來的 2 倍，於是就得到，四個平面分空間成 16 部份，五個平面分空間成 32 部份，等等. 一般地說，n 個平面會把空間分成 2^n 部份.

但是事實上並不是這樣，而是四個平面分空間成 14 部份，五個平面分空間成 22 部份. 一般地說，n 個平面分空間成 $n(n-1)+2$ 部份*.

由以上的例使我們有可能作出一個簡單同時又是極重要的結論.

命題可以對於一系列很多的特別情形是眞確的，但是一般並不眞確.

3. 現在就產生了這樣的問題. 有些命題在某些特殊情形是眞確的. 但是不可能把所有的特殊情形都考慮到. 如何去斷定在一般情況之下這命題是否眞確呢?

這個問題有時可借助於一種特別的推理方法來得到完滿的解決，就是借助於所謂數學歸納法（完全歸納法）.

* 解答見後第 24 頁（例題 11）.

這個方法是根據數學歸納的原理，內容如下：

假若：(1) 命題當 $n=1$ 時是眞確的，並且 (2) 由命題當 n 等於任一自然數 k 時是眞確來推出它對於 n 等於 $k+1$ 時也是眞確的，那麼這命題對於所有的自然數 n 都是眞確的.

證明：如果不是這樣的話，就是說這命題並非對於所有的自然數 n 都是眞確的，那麼必然存在一個自然數 m，適合下面兩個條件：(1) 命題當 $n=m$ 時並不眞確，(2) 對於所有小於 m 的自然數 n，命題都是眞確的（換句話說，m 是第一個使命題不眞確的自然數）.

顯然 $m>1$，因爲 $n=1$ 時命題是眞確的（條件 1）. 因此，$m-1$ 也是自然數. 這樣就得出，對於自然數 $m-1$ 命題是眞確的，而對於緊接着的自然數 m 命題不眞確. 這和條件 2 矛盾.

注意： 在證明數學歸納的原理時，我們用到了這樣一點，就是任意一組自然數當中必定包含一個最小數. 反過來也容易看出，這個性質也可以由數學歸納的原理推引出來. 因此，這兩個命題是等價的. 其中任意一個可以採取作爲規定自然數的意義的公理，其他一個就成了一條定理. 通常，數學歸納的原理是被採作公理的.

4. 根據數學歸納原理的證明，稱爲用數學歸納法的證明. 這種證明必然包含着兩個部份，形成兩個獨立的定理：

〔定理 1〕 **命題當 $n=1$ 時是眞確的.**

〔定理 2〕 **k 是任意一個自然數，若命題當 $n=k$ 時是眞確的，則命題當 $n=k+1$ 時也是眞確的**

如果這兩個定理都證明了，則根據數學歸納的原理，命題對所有的自然數 n 都是眞確的.

〔例 5〕 求下面的和（見例 1）：

$$S_n=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}.$$

我們知道

$$S_1=\frac{1}{2},\quad S_2=\frac{2}{3},\quad S_3=\frac{3}{4},\quad S_4=\frac{4}{5}.$$

現在，我們不再重複在例 1 當中所作的錯誤，我們並不一上來就作斷言說，對於所有的自然數 n，

$$S_n=\frac{n}{n+1}.$$

我們要謹愼些，在這裏只說，由 S_1, S_2, S_3, S_4 的形式，使我們有可能猜想（假設）$S_n=\frac{n}{n+1}$ 對所有的自然數 n 都成立. 我們已經知道這個假設在 $n=1,2,3,4$ 時都是眞確的. 為了要驗證這個假設，我們用數學歸納法.

定理 1： 當 $n=1$ 時這假設是眞確的，因為 $S_1=\frac{1}{2}$.

定理 2： 假定上面的假設對於 $n=k$ 時是眞確的，也就是說

$$S_k=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots\cdots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}.$$

這裏 k 是某一個自然數. 我們要證明當 $n=k+1$ 時這假設仍然是眞確的，也就是說

$$S_{k+1}=\frac{k+1}{k+2}.$$

實際上，$$S_{k+1}=S_k+\frac{1}{(k+1)(k+2)},$$

由定理中已設的條件，就得到

$$S_{k+1}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}.$$

兩個定理都證明了．現在，根據數學歸納的原理我們可以肯定

$$S_n=\frac{n}{n+1}$$

對於所有的自然數 n 都成立．

注意 1： 必須着重指出，用數學歸納法的證明，無條件地要求上面的兩條定理 1 和 2 都加證明．

我們已經看到，忽視了定理 2 部份會引到怎樣的結果（例 2）．現在我們來指明，忽略了定理 1，也是不行的．看下面的例．

〔例 6〕．**定理：任何一個自然數等於緊隨在它後面的那個自然數．**

用數學歸納法來證明．假設

$$k=k+1, \tag{i}$$

要證明

$$k+1=k+2. \tag{ii}$$

實際上，在等式（i）的等號兩邊各加上 1 就得到等式（ii）．由此可知，若命題當 $n=k$ 時是眞確的，則當 $n=k+1$ 時也眞確．定理就證明了．

系： 所有的自然數都相等．

錯誤究竟發生在哪裏呢？錯誤就發生在，用數學歸納法證明所不可缺少的定理 1，這裏並未證明，而只是證明了一個

定理 2，其實定理 1 在這裏是不眞確的.

定理 1 和 2 各有其特別的意義. 定理 1 構成所謂歸納的**基礎**. 定理 2 給這個基礎以正確的無限度的**自動推演**，從已知的情形**正確地推演**到下一個情形，從 n 到 $n+1$.

如果沒有證明定理 1 而證了定理 2（見例 6），因而缺乏歸納的基礎，那麼定理 2 的應用便是無意義的，因爲要推演的東西根本就沒有.

如果沒有證明定理 2 而只證了定理 1（見例 1 及 2），那麼雖然有了歸納的基礎，可是正確地推演這個基礎仍然是不可能的.

注意 2: 上面所說的是數學歸納法最簡單的情形. 在比較複雜的情形，定理 1 和定理 2 的形式可能有相當的改變.

有時候，在證明的第二部份中不僅說當 $n=k$ 時命題是眞確的，而是說命題當 $n=k$ 及 $n=k+1$ 時是眞確的，則當 $n=k+2$ 時也眞確. 這時，在第一部份證明中就必須對兩個接續的自然數 n 來驗證命題的眞確性（見第 17 頁的例題 5）.

有時候，所要證的命題不僅僅是關於所有的自然數，而是關於所有大於某一個整數 m 的整數而說的. 在這種情形之下，證明的第一部份就是要來驗證 $n=m+1$ 時命題的眞確性，並且，遇有必要時，還要對於緊接着 n 的一些整數來作這個工作（見第 20 頁的例題 8）.

5. 在結束本章時，我們再一次回到例 1 來闡明數學歸納法的一個要點.

對於各個不同的 n，研究下面的和