高等教育自学考试应试宝典系列

高等数学(二)应试指导与仿真模拟

(经管类本科)

刘有炳　　编著

西北工业大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(二)应试指导与仿真模拟(经管类本科)/刘有炳编著,—西安:西北工业大学出版社,2001.4

(高等教育自学考试应试宝典系列)
ISBN 7-5612-1330-1

Ⅰ.高…　Ⅱ.刘…　Ⅲ.高等数学-高等教育-自学考试-自学参考资料　Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 08333 号

出版发行:西北工业大学出版社
通信地址:西安市友谊西路 127 号　**邮编**:710072　　**电话**:029—8493844
网　　址:http://www.nwpup.com
印 刷 者:长安县第二印刷厂
开　　本:850 mm×1 168 mm　1/32
印　　张:9.375
字　　数:227 千字
版　　次:2001 年 5 月　第 1 版　2001 年 5 月　第 1 次印刷
印　　数:1～6 000 册
定　　价:全套定价:23.00 元(共 2 册)　本册定价:12.00 元

前　言

为了适应参加高等教育自学课程“高等数学(二)”考生的学习需要，我们编著了这本自学指导书。本书内容包括：概率论、数理统计、线性代数、线性规划。每章都包括如下5个部分：

(一)主要内容：用精练的语言列出本章主要内容，旨在使考生熟悉本章内容。

(二)自学考试应记公式：列出参加自学考试应记公式，并指出必须熟记的公式。

(三)典型例题：每章针对性地举出一定数量的例题进行分析，以帮助考生理解基本概念，提高计算能力。

(四)自学考试题型：把过去多年“高等数学(二)”考试题分类列出，并作出解答，以便考生熟悉自学考试题型。

(五)自测练习题：每章都有反映本章内容的自测练习题，让考生参加自学考试前练习，并给出参考答案。

该书是根据全国高等教育自学考试“高等数学(二)”考核目标而编写的。作者具有几十年“高等数学(二)”教学经验，长期从事“高等数学”自学考试的命题、辅导和改卷等工作，具有丰富的自学考试辅导经验。

作者对这本书的结构和编写形式做了新的尝试，目的在于对参加“高等数学(二)”考试的考生有所帮助，本书经过近四年的内部试用，今年又进行改进并正式出版。

本书的编写和出版，得益于西北工业大学出版社的大力支持，在此谨向他们表示衷心的感谢。由于水平所限，在内容的取舍、结构的安排以及例题选取等方面如有不妥之处，诚望读者指正，以便进一步修改。

编　者

2001年2月

目　录

第一部分　概率论

第一章　随机事件及其概率 …… 1
一、主要内容 …… 1
二、自学考试应记公式 …… 4
三、典型例题 …… 5
四、自学考试题型 …… 9
五、自测练习题 …… 18
第二章　随机变量及其分布 …… 23
一、主要内容 …… 23
二、自学考试应记公式 …… 29
三、典型例题 …… 30
四、自学考试题型 …… 35
五、自测练习题 …… 44
第三章　随机变量的数字特征 …… 50
一、主要内容 …… 50
二、自学考试应记公式 …… 53
三、典型例题 …… 53
四、自学考试题型 …… 57
五、自测练习题 …… 64
第四章　二维随机变量与极限定理 …… 69
一、主要内容 …… 69
二、自学考试应记公式 …… 73
三、典型例题 …… 74

四、自学考试题型…………………………………………… 78
五、自测练习题…………………………………………… 86

第二部分　数理统计

第五章　样本及其分布 …………………………………… 92
一、主要内容…………………………………………… 92
二、自学考试应记公式…………………………………… 94
三、典型例题…………………………………………… 94
四、自学考试题型………………………………………… 96
五、自测练习题 ………………………………………… 100
第六章　数理统计常用方法………………………………… 103
一、主要内容 ………………………………………… 103
二、自学考试应记公式 ………………………………… 108
三、典型例题 ………………………………………… 109
四、自学考试题型 ……………………………………… 111
五、自测练习题 ………………………………………… 118

第三部分　线性代数

第七章　矩阵……………………………………………… 122
一、主要内容 ………………………………………… 122
二、自学考试应记公式 ………………………………… 125
三、典型例题 ………………………………………… 127
四、自学考试题型 ……………………………………… 132
五、自测练习题 ………………………………………… 142
第八章　线性方程组………………………………………… 148
一、主要内容 ………………………………………… 148
二、自学考试应记公式 ………………………………… 150
三、典型例题 ………………………………………… 150
四、自学考试题型 ……………………………………… 157
五、自测练习题 ………………………………………… 167

第九章　行列式…………………………………………………… 172
一、主要内容 …………………………………………………… 172
二、自学考试应记公式 ………………………………………… 174
三、典型例题 …………………………………………………… 175
四、自学考试题型 ……………………………………………… 181
五、自测练习题 ………………………………………………… 192
第十章　特征值与二次型…………………………………………… 199
一、主要内容 …………………………………………………… 199
二、自学考试应记公式 ………………………………………… 203
三、典型例题 …………………………………………………… 204
四、自学考试题型 ……………………………………………… 211
五、自测练习题 ………………………………………………… 217

第四部分　线性规划

第十一章　线性规划……………………………………………… 221
一、主要内容 …………………………………………………… 221
二、自学考试应记公式 ………………………………………… 225
三、典型例题 …………………………………………………… 226
四、自学考试题型 ……………………………………………… 234
五、自测练习题 ………………………………………………… 244
自测练习题参考答案………………………………………………… 249
附录…………………………………………………………………… 260
模拟试卷一……………………………………………………………… 260
模拟试卷二……………………………………………………………… 268
模拟试卷三……………………………………………………………… 272
1999 年高等教育自学考试线性代数试卷 ……………………… 278
2000 年高等教育自学考试概率论与数理统计试卷 ………… 283

第一部分　概率论

第一章　随机事件及其概率

一、主要内容

（一）随机事件

随机现象：在一定条件下可能发生也可能不发生的现象称为随机现象．

随机试验：在一定条件下对随机现象的观察或实验称为随机试验．

随机事件：随机试验的任何一个可能发生的结果称为随机事件．用 $A,B,C,\cdots$ 表示．

必然事件：每次试验中必然发生的事件．记作 S.

不可能事件：每次试验中不会发生的事件称为不可能事件．记作 $\varnothing$.

基本事件：在一定范围内不能再分解的事件称为基本事件．

样本空间：随机试验的所有基本事件构成的集合称为样本空间．记作 S.

（二）随机事件的关系及运算

（1）包含　事件 A 发生则 B 必发生．记为 $A\subset B$，称为 A 包

含于 B.

(2) 相等　事件 A 包含于 B 且 B 包含于 A. 记为 $A = B$.

(3) 事件的和　事件 A,B 至少有一个发生. 记为 $A \cup B$.

(4) 事件的积　事件 A,B 同时发生. 记为 $A \cap B$ 或 AB.

(5) 事件的差　A 发生而 B 不发生. 记为 $A - B$.

(6) 互不相容事件　A 与 B 不能同时发生. 即 $AB = \varnothing$.

(7) 对立事件 A 与 B 满足 $A \cup B = S, AB = \varnothing$. 记为 $B = \overline{A}$, 即有 $A + \overline{A} = S, A\overline{A} = \varnothing$.

(三) 频率与概率

频率:随机事件 A 在 n 次试验中出现 n_A 次,则称比值 $\frac{n_A}{n}$ 为事件 A 在 n 次试验中出现的频率. 记为 $f_n(A) = \frac{n_A}{n}$.

当 n 逐渐增大时, $f_n(A)$ 具有稳定性.

概率:随机事件 A 的频率 $f_n(A)$ 的稳定值 p 称为事件 A 的概率. 记为 $P(A) = p$. 其基本性质有

(1) $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$;

(2) $P(S) = 1, P(\varnothing) = 0$;

(3) 若 A,B 互斥,则

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

(四) 古典概型

若一随机试验中有 n 个等可能的基本事件,而事件 A 由 m 个基本事件组成,则

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{A\text{ 中所含基本事件数}}{\text{基本事件总数}}$$

古典概型的特点:

(1) 试验的所有结果只有有限个;

(2) 每个基本事件出现的可能性是相等的.

(五) 几何概型

具有以下两个特点的概率问题称为几何概型：

(1) 样本空间 S 是一个几何区域，这个区域是可计算的；

(2) 向 S 中任投掷一点，而事件 A 是 S 的一部分，假设任掷的点落在 S 的任一点是等可能的，则任掷一点落在区域 A 内的概率为

$$P(A)=\frac{A\text{ 的度量值}}{S\text{ 的度量值}}$$

(六) 条件概型

事件 B 已发生条件下事件 A 发生的概率．记作 $P(A/B)$．计算公式是

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}\quad (P(B)>0)$$

如果 $P(AB)=P(A)P(B)$ 则称 A 与 B 二事件是独立的．

若 A 与 B 独立，则 $\overline{A}$ 与 B 独立、A 与 $\overline{B}$ 独立、$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 独立．

(七) 全概率公式与逆概率公式

全概率公式：若 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 是 S 的一个完备事件组，即

$$B_1+B_2+\cdots+B_n=S$$

而 $A\subset S$，则

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i)$$

逆概率公式：若 $B_1+B_2+\cdots+B_n=S$，$A\subset S$，在 A 发生条件下 B_i 发生的概率是

$$P(B_i\mid A)=\frac{P(B_i)P(A\mid B_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i)}$$

(八) 独立试验序列概型(二项公式)

若每次试验中,事件 A 发生的概率为 p,则在 n 重贝努里试验中事件 A 恰好发生 k 次的概率为

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} (k = 0,1,2,\cdots,n)$$

其中 $q = 1 - p$.

二、自学考试应记公式

(1) **狄·摩根律**: $\overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B}$

$\overline{A \cup B} = \overline{A}\,\overline{B}$

(2) **加法公式**:

1) $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

2) 当 A,B 互不相容时

$P(A + B) = P(A) + P(B)$

3) $P(A) + P(\overline{A}) = 1$

(3) **乘法公式**:

1) $P(AB) = P(A)P(B \mid A) =$

$P(B)P(A \mid B)$

2) $P(ABC) = P(A)P(B \mid A)P(C \mid AB)$

3) 若 A,B 独立

$P(AB) = P(A)P(B)$

(4) **全概率公式**:

若 $B_1 + B_2 + \cdots + B_n = S, A \subset S$,则

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A \mid B_i)$$

(5) **逆概率公式**:

若 $B_1 + B_2 + \cdots + B_n = S, A \subset S$ 则

$$P(B_i) = \frac{P(B_i)P(A \mid B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A \mid B_i)}$$

(6) **二项概率公式**:

$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} (k = 0,1,2,\cdots,n) \quad q = 1 - p$

(7) **四对事件**:(1)A,B; (2)$A,\overline{B}$; (3)$\overline{A},B$; (4)$\overline{A},\overline{B}$ 同时相互独立或同时不相互独立.

三、典型例题

例 1 若 $P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{3}, P(AB) = \frac{1}{4}$,求 $P(B \mid A)$, $P(\overline{A}\overline{B}), P(\overline{A} + B)$.

解 $P(B \mid A) = P(AB)/P(A) = \frac{1}{4} / \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} P(\overline{A}\overline{B}) = P(\overline{A+B}) = \\ & 1 - P(A+B) = \\ & 1 - P(A) - P(B) + P(AB) = \\ & 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12} \end{aligned}$$

$P(\overline{A} + B) = P(\overline{A}) + P(B) - P(\overline{A}B)$

其中 $P(\overline{A}B) = P(B - AB) = P(B) - P(AB) =$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

故 $P(\overline{A} + B) = (1 - \frac{1}{2}) + \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$

例 2 房间里有 4 个人,问至少 2 人生日在同一个月的概率是多少?

解 设 A 表示“4 人中至少有 2 人生日在同一个月”,则 $\overline{A}$ 表示四人生日均不在同一个月.

4 人生日（按月）的可能性有 12^4 种；

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{A_{12}^4}{12^4}=0.427$$

例 3　甲、乙两艘轮船驶上一个不能同时停泊两艘轮船的码头，它们在一昼夜内到达的时间是等可能的．如果甲船的停泊时间是 1 h，乙船的停泊时间是 2 h，求它们中任何一艘都不需要等候码头空出的概率是多少？

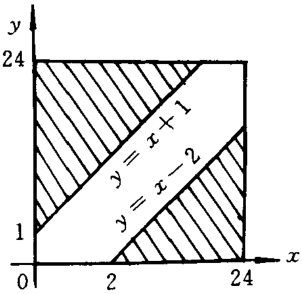

图 1

解　设自当天零时算起，甲乙两船到达码头的时刻分别为 x 及 y，则 $0\leqslant x\leqslant 24$，$0\leqslant y\leqslant 24$，设所求事件为 A，则有利于 A 的情形分别为：

(1) 当甲船先到时，乙船应迟来 1 h 以上，即 $y-x\geqslant 1$ 或 $y\geqslant 1+x$；

(2) 当乙船先到时，甲船应迟来 2 h 以上，即 $x-y\geqslant 2$ 或 $y\leqslant x-2$.

所以　事件 A 应满足关系：

$y\geqslant 1+x$，$y\leqslant x-2$，如图 1 所示；A 用图 1 中两阴影部分的面积之和

$$L(A)=\frac{1}{2}(24-1)^2+\frac{1}{2}(24-2)^2$$

$$L(S)=24^2$$

故　$$P(A)=\frac{L(A)}{L(S)}=\frac{\frac{1}{2}(23^2+22^2)}{24^2}\approx 0.879$$

例 4　有 10 箱产品，其中 5 箱次品率是 15%，3 箱次品率是 20%，2 箱次品率是 10%. 今任选一箱，从中任选一产品，求“选出次品”的概率．

解 设A表示选出的是次品；

B_1 表示选中次品率为 15% 的箱子

B_2 表示选中次品率为 20% 的箱子

B_3 表示选中次品率为 10% 的箱子

则 $B_1 + B_2 + B_3 = S \quad A \subset S$

且 $P(B_1) = 0.5,\quad P(A \mid B_1) = 0.15$

$P(B_2) = 0.3,\quad P(A \mid B_2) = 0.2$

$P(B_3) = 0.2,\quad P(A \mid B_3) = 0.1$

则 $P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(A \mid B_i)P(B_i) =$

$0.5 \times 0.5 + 0.3 \times 0.2 + 0.2 \times 0.1 = 0.155$

例 5 某人外出可乘坐飞机、火车、轮船、汽车 4 种交通工具，其概率分别是 10%，30%，15%，45%，乘坐这几种交通工具能如期到达的概率依次为 80%，70%，60%，90%，已知该旅行者误期到达，求他是乘火车的概率．

解 设 B_i 分别表示旅行者乘坐的是飞机、火车、轮船、汽车，则 $B_1 + B_2 + B_3 + B_4 = S$.

A 表示旅行者误期到达 $\quad A \subset S$

由已知有$P(B_1) = 10\%,\quad P(B_2) = 30\%,$

$P(B_3) = 15\%,\quad P(B_4) = 45\%$ ，

$P(A \mid B_1) = 20\%,\ P(A \mid B_2) = 30\%,$

$P(A \mid B_3) = 40\%,\ P(A \mid B_4) = 10\%,$

则 $P(A) = \sum_{i=1}^{4} P(B_i)P(A \mid B_i) = 0.1 \times 0.2 + 0.3 \times$

$0.3 + 0.15 \times 0.4 + 0.45 \times 0.1 = 0.215$

旅行者误期到达是乘火车可表为 $B_2 \mid A$

则 $P(B_2 \mid A) = \dfrac{P(B_2)P(A \mid B_2)}{P(A)} = \dfrac{0.3 \times 0.3}{0.215} = 0.419$

例 6 一批产品中有 30% 的一等品，进行重复抽样检查，求取出 5

个样品中恰有 2 个一等品的概率．

解 由二项公式有 $n=5, p=0.3, q=0.7$

$P_5(2)=C_5^2\times 0.3^2\times 0.7^3=0.309$

即取出 5 个样本中恰有 2 个一等品的概率是 0.309.

例 7 某工厂有甲、乙、丙三个车间，生产同一种产品，每个车间的产量分别占全厂的 25%，35%，40%，各车间产品的次品率分别为 5%，4%，2%. 试求全厂产品的次品率．

解 $A_i=\{$任取一件在甲、乙、丙车间生产$\}$ $i=1,2,3.$

$B=\{$任取一件是次品$\}$

$$P(B)=P(BA_1)+P(BA_2)+P(BA_3)=$$

$$\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B\mid A_i)=$$

$$\frac{25}{100}\frac{5}{100}+\frac{35}{100}\frac{4}{100}+\frac{40}{100}\frac{2}{100}=0.034\,5$$

例 8 某船运货损坏程度为 2%，10%，90% 的事件的概率分别为 80%，15%，5%，若从运来的货中任取 3 件，发现都是好的．试求该船这次运货损坏程度为 2% 的概率是多少？

解 设 $A_i=\{$损坏程度为 2%，10%，90%$\}$ $i=1,2,3$

$P(A_1)=0.8,\quad P(A_2)=0.15,\quad P(A_3)=0.05$

$B=\{$任取三件，都是好的$\}$

$$P(A_1\mid B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)}=$$

$$\frac{P(A_1)P(B\mid A_1)}{P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)+P(A_3)P(B\mid A_3)}=$$

$$\frac{0.8(0.98)^3}{0.8(0.98)^3+0.15(0.9)^3+0.05(0.1)^3}=$$

$$\frac{0.752\,95}{0.752\,95+0.109\,35+0.000\,05}=$$

$$\frac{0.752\,95}{0.862\,35}=0.873\,1$$

四、自学考试题型

(一) 判断题

1. 若 A 与 B 互斥,则 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也互斥. (×)
2. 事件 A,B 互斥,且 $P(A)>0$,则 $P(B|A)=0$. (√)
3. 若事件 A,B 相互独立,则 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 亦相互独立. (√)
4. 从一副 52 张的扑克牌中,随机地抽取 5 张,则其中至少有一张 A 字牌的概率为 0.341. (√)
5. 从编号 1 到 10 的 10 张卡片中任取一张,若以 A 表示卡片编号是奇数,B 表示卡片编号小于 5,则 $\overline{A \cup B}$ 表示取的卡片编号是 6,8 或 10. (√)
6. 事件 A_1,A_2,A_3 用 $\overline{A_1}\,\overline{A_2} \cup \overline{A_1}\,\overline{A_3} \cup \overline{A_2}\,\overline{A_3}$ 表示时的含意是:三件事中至多有一事件发生. (√)
7. 事件 A,B 互不相容的充要条件是 $AB=\varnothing$. (√)
8. 设 A,B,C 为三事件,则 $\{A,B,C$ 只有一个发生$\}=ABC$. (×)
9. 设 A、B 为二事件,且 $P(A)>0$,$P(B)>0$,则 $P(A|B)P(B)=P(B|A)P(A)$. (√)
10. 设事件 $A=\{$三件产品都是正品$\}$,则 $\overline{A}=\{$三件产品都是次品$\}$. (×)

(二) 单项选择题

1. 掷两个硬币,A 表示“两个都是正面朝上”,则 A 是 ③.

   ① 随机现象　　② 随机试验

   ③ 随机事件　　④ 随机变量

2. 若 $AB=\varnothing$,那么事件 A 与 B 是 ②.

   ① 对立事件　　② 互不相容事件

   ③ 相互独立事件　　④ 基本事件

3. 设袋中有标号为 1,1,1,-2,2,3 的 6 个球,现从中任取一球观察其号码,则这一随机试验的样本空间为 ②.

①$\{1,2,3\}$　　②$\{-2,1,2,3\}$

③$\{1,1,1,-2,2,3\}$　　④$\{1,1,1\}$

4. A,B,C 表示任意三个事件,则恰有二个事件发生可表示为 ①.

①$AB\overline{C} \cup A\overline{B}C \cup \overline{A}BC$　　②$\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$

③$AB \cap BC \cap AC$　　④ $\overline{ABC}$

5. “掷骰子”试验中,出现点数不大于 5 的概率是 ③.

① $\frac{1}{6}$　　② $\frac{1}{3}$　　③ $\frac{5}{6}$　　④ $\frac{1}{2}$

6. 几何概型的计算公式是 ③.

① 总体测度 / 部分测度　　② 小面积 / 大面积

③ 部分度量 / 总体度量　　④ 以上都不对

7. 设事件 A 与事件 B 相互独立,则 $P(B/A)$ 与 $P(B)$ 是 ③.

① 不相等的　　② 有时相等

③ 相等的　　④ 有时不相等

8. 某项目,甲独立完成的概率为 0.7,乙独立完成的概率为 0.3,则二人同时完成此科研项目的概率是 ④.

① 0.4　　② 0.6　　③ 1　　④ 0.21

9. 事件 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 互不相容时,$P(\overline{A \cup B}) =$ ③.

① $1-P(A)$　　② $1-P(A)-P(B)$

③ 0　　④$P(\overline{A})P(\overline{B})$

10. 设 $S=\{x \mid -\infty < x < +\infty\}$,$A=\{x \mid 0 \leqslant x < 2\}$,$B=\{x \mid 1 \leqslant x < 3\}$,则 $A\overline{B}$ 表示 ①.

①$\{x \mid 0 \leqslant x < 1\}$

②$\{x \mid 0 < x < 1\}$

③$\{x \mid 1 \leqslant x < 2\}$

④$\{x \mid -\infty < x < 0\} \cup \{x \mid 1 \leqslant x < +\infty\}$

11. 已知 A,B 为二事件,则$\overline{AB} =$ ②.