数 学 分 析

（上 册）

华中师范大学数学系编

华中师范大学出版社

(鄂)新登字 11 号

图书在版编目(CIP)数据

数学分析(上册)/华中师范大学数学系编.
—武汉:华中师范大学出版社,2000.8
ISBN 7-5622-2223-1/O·126
Ⅰ.数…
Ⅱ.华…
Ⅲ.数学分析
Ⅳ.O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 64859 号

数 学 分 析

(上册)

华中师范大学出版社出版发行
(武昌桂子山 邮编:430079)

新华书店湖北发行所经销	湖北省科学技术出版社黄冈印刷厂印刷

责任编辑:吴小岸	封面设计:甘 英	
责任校对:张 钟	督 印:方汉江	
开本:850×1168 1/32	印张:7	字数:175 千字
版次:2000 年 8 月第 1 版	2000 年 8 月第 1 次印刷	
印数:1-3000	定价:10.00 元	

本书如有印装质量问题,可向承印厂调换。

主　编　张喜堂
编　委　（以姓氏笔划为序）
　　　　刘敏思　何　穗　张喜堂　喻小培
顾　问　王光发

前　言

本书是为适应高等学校理科数学的教学体系和课程体系改革,根据华中师范大学数学系多年来从事数学分析教学的经验与体会编写而成的.

近些年来,随着社会对人才需求的变化,高等学校中增加了培养宽口径、厚基础、高素质,知识型培养与能力型培养并举的数学人才的办学思想,数学专业的各类选修课剧增,传统基础课无论在学时或在教学方法上都受到挑战.基于这种情况,我们编写了该套教材.

本书分上、下两册,采用板块化编写模式,把数学分析的主要内容分为"一元函数微积分","多元函数微积分","无穷级数及极限理论"三大块,使教材内容更具条理性.上册为"一元函数微积分"部分,内容有函数、极限与连续、一元函数的微分学、一元函数的积分学共四章;下册共十章,其中"多元函数微积分"部分有六章,包括多元函数的极限与连续、多元函数的微分,隐函数存在定理及应用,重积分,曲线积分与曲面积分,含参变量积分;"无穷级数及极限理论"部分有四章,包括数项级数、函数项级数、傅里叶级数、极限理论.最后是附录.

本书需三个学期约 280—300 个学时(含习题课)讲授,三个学期的周学时依次大体可按 6、6、3 安排讲授.

在本书的编写过程中,我们注意了以下几个方面:

1.本书与目前国内通用的数学分析最大不同之处是:把多元函数微积分部分提前在无穷级数部分之前讲授.这样在时间安排上便于数学专业学生对大学物理课程的学习.解决了数学专业大学物理的教学与微积分教学在时间上的冲突.

2.为了使难点分散和便于理解,本书把微积分的极限理论分

两阶段完成.第一阶段在一元函数微积分部分,我们把极限理论的六个定理不加证明而直接据此展开一系列讨论,然后以适当的例子给出它们的应用,以期解释这些定理并使读者易于理解掌握.

第二阶段在十四章的极限理论部分,集中论证了六个定理的等价性及其典型方法。以供报考研究生和以后从事数学工作的读者进一步提高极限理论。

3.由于章节顺序的变化及篇幅等原因,本书在内容处理上与国内通用教材有较多变化.如:导数与微分的概念同时引入,相关内容同时讨论,突出了两者的联系;考虑到计算机的应用与逐步普及,本书明显淡化了函数作图、求导数计算、求不定积分计算、Γ函数与B函数的计算、近似计算以及定积分在几何与物理方面的应用;为讨论无穷限含参变量积分,恰当地引入二元函数一致收敛的概念等.另外,书中突出并加大了重难点内容的例子,力求通过一些典型例子使读者初步掌握分析问题与解决问题的方法;各章节习题的难度有所降低,给读者和教师留下一定的空间.

编写本书过程中,虽然我们作了很大的努力,但由于知识与能力所限,深感难度很大,错误在所难免,诚请读者给予批评指正.

本书编写过程中参考了不少兄弟院校的教材和习题,在此表示深切的感谢.

本书是1995年原国家教委关于直属师范大学师范专业建设基金项目的一个课题.

本书编写组由张喜堂、刘敏思、何穗、喻小培组成,王光发担任顾问.在编写组讨论的基础上,全书由张喜堂执笔主编并在1996级试用,且随后进行了第一次修改.接着由刘敏思、何穗、喻小培在1997级、1998级、1999级中试用的基础上,进行了第二次修改.刘敏思还增写了附录部分,全书由张喜堂统稿.

编　者

2000年元月于华中师范大学数学系

目　　录

一元函数微积分篇

一元函数微积分篇

第一章　函　　数

§1　预备知识

1.1　实数的概述

实数的全体称为实数集或实数域，记为 $\mathbf{R}$. 即 $\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)$. 实数域 $\mathbf{R}$ 中的每一个实数对应着数轴上的一个点. 反之，数轴上的每个点也对应着实数域 $\mathbf{R}$ 中的一个实数. 因此对于实数和数轴上的点我们不加区别.

实数具有稠密性，即任何两个不同的实数之间必有有理数，也必有无理数. 从而进一步推得，任何两个不相等的实数之间，必有无穷多个有理数，也必有无穷多个无理数.

实数满足阿基米德公理，即对任何两个正实数 a 和 b，必存在自然数 N，使 $Na>b$.

1.2　区间

对满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的全体实数称为闭区间，记为 $[a,b]$. 即

$$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}.$$

对满足不等式 $a<x<b$ 的全体实数称为开区间，记为 (a,b). 即

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}.$$

类似可定义半开半闭区间：

$$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\},$$
$$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}.$$

上述区间都是有限区间.还可以定义无穷区间:

$$[a,+\infty)=\{x\mid a\leqslant x<+\infty\},$$

$$(-\infty,b]=\{x\mid -\infty<x\leqslant b\}.$$

读者类似可定义$(a,+\infty)$,$(-\infty,b)$和$(-\infty,+\infty)$.通常用字母 I 表示一般区间.

对满足不等式$|x-a|<\delta$ 的全体实数,称为点 a 的 δ 邻域,记为 $U(a,\delta)$,有时也简记为 $U(a)$.即

$$U(a,\delta)=\{x\mid |x-a|<\delta\}=(a-\delta,a+\delta).$$

对满足不等式 $0<|x-a|<\delta$ 的全体实数,称为点 a 的 δ 空心邻域,记作 $U^\circ(a,\delta)$或 $U^\circ(a)$.即

$$U^\circ(a,\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

此外,我们还常用到下面两种邻域:

$$U_+(a,\delta)=\{x\mid 0\leqslant x-a<\delta\},$$

$$U_-(a,\delta)=\{x\mid -\delta<x-a\leqslant 0\}.$$

分别称它们为点 a 的 δ 右邻域和点 a 的 δ 左邻域,也常简记为 $U_+(a)$和 $U_-(a)$.记号 $U^\circ{}_+(a)$和 $U^\circ{}_-(a)$分别表示数集:

$$U^\circ{}_+(a)=U^\circ{}_+(a,\delta)=(a,a+\delta),$$

$$U^\circ{}_-(a)=U^\circ{}_-(a,\delta)=(a-\delta,a).$$

1.3 数集的有界性和确界存在定理

设 $A=\{x\}$为 $\mathbf{R}$ 中一数集,若存在实数 M(或 L)使得对一切 $x\in A$,都有 $x\leqslant M$(或 $x\geqslant L$),则称 A 为有上(或下)界的数集.数 M(或 L)称为集 A 的一个上(或下)界.若数集 A 既有上界,又有下界,则称 A 为有界集.若 A 不是有界集,则称它为无界集.

若数集 A 有上界,则它有无穷多个上界.我们把这些上界中最小的一个称为数集 A 的上确界.同样地,把有下界的数集 B 的最大下界称为B 的下确界.

定义 1 设 A 为某数集,若存在实数 α 满足下列两个条件:

(1) 对 A 中任何元素 x 有，$x \leqslant \alpha$；

(2) 对任意小的正数 ε，存在 $x_0 \in A$，使 $x_0 > \alpha - \varepsilon$。则称数 α 为数集 A 的上确界，记作

$$\alpha = \sup A \quad 或 \quad \alpha = \sup_{x \in A} x.$$

定义中条件(1)表明 α 是数集 A 的一个上界，条件(2)表明 α 是数集 A 的最小上界.

定义 2 设 A 为一数集，若存在实数 β，满足下列两个条件：

(1) 对 A 中任何元素 x，有 $x \geqslant \beta$；

(2) 对任意小的正数 ε，存在 $x_0 \in A$，使 $x_0 < \beta + \varepsilon$。则称数 β 是数集 A 的下确界，记作

$$\beta = \inf A \quad 或 \quad \beta = \inf_{x \in A} x.$$

例如，集 $A = \{3,5,7,9\}$，则 $\sup A = 9$，$\inf A = 3$.

例 1 设 $A = (a, b]$，证明 $\sup A = b$，$\inf A = a$.

证 对 A 中任何元素 x，均有 $a < x \leqslant b$。设 ε 为小于 $b - a$ 的任意正数，显然存在 $x_1 = b \in A$，使 $x_1 > b - \varepsilon$。根据实数的稠密性，必存在实数 x_2 使 $a < x_2 < a + \varepsilon < b$，也即 $x_2 \in A$ 且 $x_2 < a + \varepsilon$，从而证得 $\sup A = b$，$\inf A = a$.

例 2 若 $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right\}$，则 $\sup A = 1$，$\inf A = 0$.

证 $\sup A = 1$ 是显然成立。下证 $\inf A = 0$。对 A 中一切元素 $\frac{1}{n}(n = 1, 2, \cdots)$ 有 $\frac{1}{n} > 0$。对任意小的正数 ε，当 $n > \frac{1}{\varepsilon}$ 时必有 $\frac{1}{n} < 0 + \varepsilon$。由下确界定义知 $\inf A = 0$.

关于数集确界的存在性问题，我们给出如下定理：

确界存在定理 非空有上(或下)界的数集，必有上(或下)确界.

这个定理的证明，我们将在十四章专门进行讨论.

§2 函　数

2.1 函数的概念

定义 1 设 D 为实数集,如果存在一个对应规律 f,对于 D 中每一个实数 x,都有唯一的实数 y 与之对应,则称 f 是从 D 到 $\mathbf{R}$ 的一个函数.记作

$$f:D\to\mathbf{R},$$
$$x\longmapsto y.$$

对于 D 中每一个 x 所对应的数 y,称为 f 在点 x 的函数值,记作 $f(x)$.D 称为函数 f 的定义域,函数值的全体称为值域,记作 $f(D)$.我们称函数关系中的 x 为自变量,y 为因变量.

例 1 在物体的自由落体运动中,时间 t 与物体下落的高度 h 的函数关系是:

$$h=\frac{1}{2}gt^2,\quad t\in[0,T].$$

其中 g 为重力加速度,T 为物体落地的时刻.

例 2 球体积 V 与球半径 R 的函数关系是

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3,\quad R\in(0,+\infty).$$

例 1、例 2 的函数关系是可以用数学式表达的,这种表达的方法称为函数的解析表示法.函数的表达方法还有列表法和图像法.下面介绍另一种表达法.

例 3 狄利克雷(Dirichlet)函数

$$D(x)=\begin{cases}1,\text{当 } x \text{ 为有理数},\\0,\text{当 } x \text{ 为无理数},\end{cases}x\in(-\infty,+\infty).$$

例 4 黎曼(Rieman)函数

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, \text{当 } x=\dfrac{p}{q}\,(p,q \text{ 为正整数}, \dfrac{p}{q} \text{ 为既约分数})\\ 0, \text{ 当 } x=0,1 \text{ 和}[0,1]\text{上无理数},\end{cases} \quad x\in[0,1].$$

在下面的例 5、例 6 中,函数在其定义域的不同部分要用不同的表达式描述,我们称这样的函数为分段函数.

例 5　函数

$$f(x)=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

称为符号函数(如图 1.1).

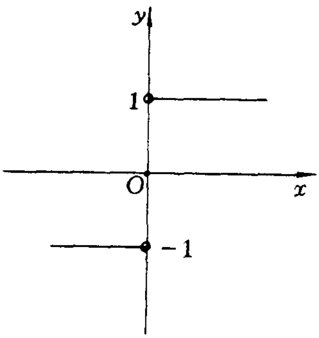

图 1.1

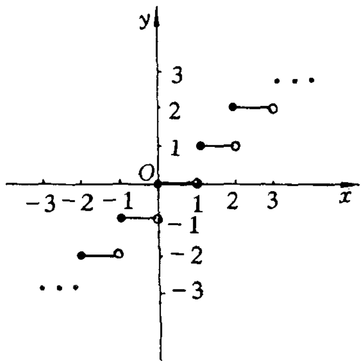

图 1.2

例 6　函数 $f(x)=[x]$,其中符号$[x]$表示不超过 x 的最大整数.显然 $f(x)$具有性质:

$$x-1<[x]\leqslant x<[x]+1\leqslant x+1.$$

(如图 1.2).

2.2　函数的运算

在实际问题中,许多函数是由几个简单函数经过有限次运算而成的较复杂的函数.

(1) 函数的四则运算

若 $f(x)$,$g(x)$均为数集 D 上的函数,则

$$f(x)\pm g(x),\quad f(x)\cdot g(x),\quad \frac{f(x)}{g(x)}\,(g(x)\neq 0),$$

仍为 D 上的函数.

(2) 复合函数

定义 2 设有两个函数 $y=f(u)$ $(u\in E)$和 $u=g(x)$ $(x\in D)$.若 $g(x)$的值域 $g(D)$含在 $y=f(u)$的定义域 E 内,那么对每一个 $x\in D$,通过中间变量 u,有唯一的实数 y 与之对应.这样在 D 上确定了一个函数,记作

$$y=f[g(x)],x\in D \text{ 或 } y=(f\circ g)(x),x\in D,$$

称为由函数 $u=g(x)$及 $y=f(u)$经过复合运算所构成的复合函数.

在复合函数 $y=f[g(x)]$中,f 称为外(层)函数,g 称为内(层)函数.u 称为中间变量.

例如,$y=\ln(x^2+1)$是由函数 $u=x^2+1$,$y=\ln u$ 复合而成的;$y=\sin^2 x$ 是由函数 $u=\sin x$,$y=u^2$ 复合而成.

另外,函数的复合运算不满足交换律,即 $f\circ g\neq g\circ f$.甚至当 $f\circ g$ 是复合函数时,$g\circ f$ 可能无意义.例如,$f(x)=3+x^2$,$x\in(-\infty,+\infty)$;$g(x)=\arcsin x$,$x\in[-1,1]$,则复合函数 $f[g(x)]=3+(\arcsin x)^2$,$x\in[-1,1]$存在;因为 $\arcsin(3+x^2)$ 无意义,故 $g[f(x)]$不存在.

我们还可以讨论多个函数的复合.例如,$f(x)=\sqrt[3]{x}$,$g(x)=\sin x$,$h(x)=x^2$ 复合而成的函数 $f[g(h(x))]=\sqrt[3]{\sin x^2}$.

2.3 反函数

定义 3 设有函数 $y=f(x)$ $(x\in D)$,值域为 M.若对于每一个 $y\in M$,通过关系 $y=f(x)$,有 D 中唯一的 x 与之对应,这种对应关系所确定的 x 是 y 的一个函数,称这个函数是原来函数