SHUXUE

数学

三 角·第二册

青年自学丛书

四川人民出版社

数学

青年自学丛书

数　　学

三角·第二册

主　　编　成都市教育局

编写单位　成都市西北中学

成都市第八中学

成都市第十三中学

成都市第二十六中学

执　　笔　余绍维　黎　明

周秦金　宋思孔

四川人民出版社

一九七九年·成都

数 学 三角·第二册 （青年自学丛书）

四川人民出版社出版 重庆印制一厂印刷
四川省新华书店重庆发行所发行

开本 787×1092 毫米 1/32 印张 7.75 字数 158 千
1978 年 12 月第一版 1979 年 3 月第一次印刷
印数：1—158,500册

书号：13118·11 定价：0.54元

前　　言

“一定要极大地提高整个中华民族的科学文化水平”．这是英明领袖华主席、党中央高瞻远瞩地向全党、全军、全国各族人民发出的庄严号召．这是激动人心的动员令，这是气吞山河的宣言书，这同样是对广大青年亲切的召唤。

青年是我们的希望，是我们的未来．为了适应广大青年向科学进军的需要，我们组织编写了一套“青年自学丛书”，供广大青年自学，在校中学生课外阅读和中学教师参考．

这套“青年自学丛书”的数理化部分，共十七册，即《数学》八册（《代数》三册、《几何》三册、《三角》二册、《物理》四册、《化学》五册）．考虑到这套丛书具有自学的特点，使读者学后能系统掌握基础知识和基本技能，编写时注意了基本理论、基本概念、基本规律和学习中难点的讲述，例题较详，习题较多，循序渐进，由浅入深；文字上努力做到生动活泼，明白易懂．同时，参照全国中小学通用教材教学大纲精神，还介绍了一些先进知识．要求通过对丛书的自学，使读者能达到高中或略高于高中的程度．

这是“青年自学丛书”《数学》的《三角》读本，讲了三角函数的性质、三角函数式的恒等变形、三角方程以及解三角形等方面的内容，编成两册．

这套丛书的编写出版，得到中共成都市委宣传部的亲切关怀和有关学校的支持．四川师范学院数学系协助了丛书《数学》读本的审稿工作．在此，我们谨致谢意．

由于时间仓促和编者水平所限，本书内容可能有缺点或错误．鉴于当前需要迫切，先以“试用本”出版，广泛听取意见．我们热忱欢迎广大读者批评指正，以便再版时修订．

编　者

一九七八年十月

目　录

第五章　三 角 方 程

在生产实际和科学研究中，常常遇到这样的问题：已知三角函数值而求角，这种问题我们在前面就已见过，不过以前我们没有正式提出解方程，其实这就是解三角方程的问题．在这一章里，我们要把解三角方程的知识作比较系统的介绍．

三角方程的形式是多种多样的，它不象代数方程中的一元一次方程或者一元二次方程那样，有一定的解法．由于解三角方程在一般情况下没有一定的法则可遵循，而且也只有某些特殊类型的三角方程才能用初等数学的方法可解，因为一般的三角方程都要化成最基本的三角方程后再求解．因而为了使读者便于着手解题，我们先从最基本的三角方程着手，然后逐步扩展到一般的三角方程．这些基本的三角方程，就是下面要讲的最简的三角方程．

第一节　最简三角方程

我们知道，含有未知数的等式叫做方程．如果方程中含有未知数的三角函数，那末就叫三角方程．例如

$$3\operatorname{tg} x-2=0;$$

$$\sin x+2\cos x=1.$$

等都是三角方程．象方程

$$\sin x+\frac{x}{2}=x$$

未知数不仅出现在三角符号的后面，而且还有不在三角函数符号后面的，这样的方程也是三角方程。

在未知数的允许值范围内，求出适合于三角方程的一切值，叫做解三角方程．适合方程的这些值，叫做三角方程的解．如果在未知数允许值范围内的值都不适合于所求解的方程，这样的三角方程叫做无解．所解的方程是这种情形的时候，只须指出它没有解就可以了．三角方程所有解的全体叫做三角方程的通解．

下列三角方程：

$$\sin x=a,$$

$$\cos x=a,$$

$$\operatorname{tg} x=a,$$

$$\operatorname{ctg} x=a$$

式中 a 是给定的实数．这些方程就叫做最简三角方程．

现在我们先讨论这四个最简三角方程的解

1. $\sin x=a$ 的通解

（1） 若 $|a|<1$ 由前章反正弦函数可知，当 x 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 区间内时，$\sin x=a$ 有唯一解：

$$x_1=\arc\sin a.$$

易知 $x_2=\pi-x_1$ 也是方程 $\sin x=a$ 的解．事实上，根据诱导公式

$$\begin{aligned}\sin x_2&=\sin(\pi-x_1)\\&=\sin x_1\\&=\sin(\arc\sin a)=a.\end{aligned}$$

即 $x_2=\pi-x_1=\pi-\arc\sin a$ 是方程 $\sin x=a$ 的解．

而 $x_2=\pi-\arcsin a$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ 上．因为正弦函数在这个区间是减函数，所以方程 $\sin x=a$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ 上也只有唯一解 $x_2=\pi-\arcsin a$．但 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 与 $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ 构成正弦函数的一个周期长的闭区间．由于正弦函数是以 2π 为周期，因此，在 x_1 与 x_2 上分别加上 $2n\pi$ 就得到 $\sin x=a$ 的通解．

即当 $|a|<1$ 时，方程 $\sin x=a$ 的通解为

$$x=2k\pi+\arcsin a;$$

$$x=(2k+1)\pi-\arcsin a.$$

为了简便起见，上面两式可合并为一个式子如下：

$$x=k\pi+(-1)^k\arcsin a \quad (k\text{是整数})^*$$

（2） 若 $|a|>1$ 因为正弦函数的绝对值不能大于 1，所以当 $|a|>1$ 时，$\sin x=a$ 无解

（3） 若 $|a|=1$ 当 $a=1$ 时，则 $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$；当 $a=-1$ 时，则 $x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$，即 $|a|=1$ 时，$x=k\pi+\frac{\pi}{2}$．

例 1 解方程 $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$．

解 因为 $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$，所以方程的解是

$$x=k\pi+(-1)^k\frac{\pi}{4}.$$

---

* 以后的 k 都表整数．

例 2 解方程 $\sin x=-\frac{1}{2}$.

解 因为 $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{6}$，所以方程的解是

$$x=k\pi+(-1)^k\left(-\frac{\pi}{6}\right).$$

例 3 解方程 $\sin^2 x=1$.

解 原方程变形为两个最简方程:

$$\sin x=1 \text{ 与 } \sin x=-1$$

由 $\sin x=1$，得 $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$.

由 $\sin x=-1$，得 $x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$.

因此，原方程的解是

$$x=2k\pi+\frac{\pi}{2};\quad x=2k\pi-\frac{\pi}{2}.$$

根据角的终边位置，上面两式可简写为

$$x=k\pi+\frac{\pi}{2}.$$

例 4 解方程 $\sin(3x-105°)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

解 由 $\sin(3x-105°)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，把 $3x-105°$ 看做一个未知量，得

$$3x-105°=2k\cdot 180°+60°*,$$

---

* 方程中的角如果用六十分制的度表示的，为了前后一致，解的过程中，都要以同一单位来表示。

$$3x=2k\cdot180^\circ+165^\circ,$$

$$x=2k60^\circ+55^\circ$$

或 $$3x-105^\circ=(2k+1)\cdot180^\circ-60^\circ,$$

$$3x=(2k+1)\cdot180^\circ+45^\circ,$$

$$x=(2k+1)\cdot60^\circ+15^\circ$$

$$=2k\cdot60^\circ+75^\circ$$

所以原方程的解是

$$x=2k\cdot60^\circ+55^\circ;\quad x=2k60^\circ+75^\circ.$$

例 5 解方程 $2\sin\left(\dfrac{3x}{4}-\dfrac{\pi}{12}\right)=1.$

解 $\sin\left(\dfrac{3x}{4}-\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{1}{2},$

$$\therefore\quad \frac{3x}{4}-\frac{\pi}{12}=2k\pi+\frac{\pi}{6},\quad \frac{3x}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{4},$$

$$x=\frac{1}{3}(8k+1)\pi,$$

或 $$\frac{3x}{4}-\frac{\pi}{12}=(2k+1)\pi-\frac{\pi}{6},$$

$$\frac{3x}{4}=(2k+1)\pi-\frac{\pi}{12},$$

$$x=\frac{1}{9}(24k+11)\pi.$$

所以方程的解是

$$x=\frac{1}{3}(8k+1)\pi;\quad x=\frac{1}{9}(24k+11)\pi.$$

2. cos x＝a 的通解

（1） 若 $|a|<1$ 由前章反余弦函数可知，x 在区间 $[0, \pi]$ 上，$\cos x=a$ 有唯一解：

$$x_1=\arccos a;$$

又在区间 $[-\pi, 0]$ 上，方程有唯一解 $x_2=-x_1=-\arccos a$. 而 $[-\pi, 0]$ 与 $[0, \pi]$ 恰好构成一个以 2π 长的一个闭区间 $[-\pi, \pi]$. 因余弦函数的周期是 2π，所以方程 $\cos x=a$ 的通解是

$$x=2k\pi+\arccos a;$$

$$x=2k\pi-\arccos a.$$

合并成一个式子为：

$$x=2k\pi\pm\arccos a.$$

（2） 若 $|a|>1$ 因为余弦函数的绝对值不大于一，所以当 $|a|>1$ 时，$\cos x=a$ 无解.

（3） 若 $|a|=1$ 当 $a=1$ 时，则 $x=2k\pi$；当 $a=-1$ 时，则 $x=(2k+1)\pi$. 即 $|a|=1$ 时，$x=k\pi$.

例 6 解方程 $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

解 因为 $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\pi-\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}.$$

所以方程的解是

$$x=2k\pi\pm\frac{5\pi}{6}.$$

例 7 解方程 $\cos\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

解 因为 $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$.

$$\therefore\quad \frac{x}{3}-\frac{\pi}{4}=2k\pi\pm\frac{\pi}{4},\ \frac{x}{3}=2k\pi\pm\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4},$$

所以方程的解是

$$x=\frac{1}{4}(24k+3)\pi\pm\frac{\pi}{4}.$$

例 8 解方程 $2\cos x=-3$.

解 $\cos x=-\frac{3}{2}$. $\quad\because\ \left|-\frac{3}{2}\right|>1$,

所以原方程无解.

3. $\operatorname{tg} x=a$ 的通解

不论 a 为任何实数，在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ 内，方程 $\operatorname{tg} x=a$ 都有唯一的解:

$$x=\operatorname{arc\,tg} a.$$

因为正切函数的周期为 π，而这个区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ 的长恰好是正切函数的一个周期，所以方程 $\operatorname{tg} x=a$ 的通解是

$$x=k\pi+\operatorname{arc\,tg} a$$

例 9 解方程 $\operatorname{tg} x=-1$.

解 因为 $\operatorname{arc\,tg}(-1)=-\frac{\pi}{4}$,

所以方程的解是 $x=k\pi-\frac{\pi}{4}$.

例10 解方程 $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{12}\right)-1=0$.

解 $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{12}\right)=1$.

$$x+\frac{\pi}{12}=k\pi+\frac{\pi}{4},$$

所以方程的解是 $x=k\pi+\frac{\pi}{6}$.

例11 解方程 $3\operatorname{tg}\frac{x+20^\circ}{3}=\sqrt{3}$.

解 $\operatorname{tg}\frac{x+20^\circ}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,

$$\frac{x+20^\circ}{3}=k\cdot 180^\circ+30^\circ,$$

$$x+20^\circ=3k\cdot 180^\circ+90^\circ,$$

所以方程的解是 $x=3k\cdot 180^\circ+70^\circ$.

4. ctg x＝a 的通解

不论 a 为任何实数，在区间 $(0,\ \pi)$ 内，方程 $\operatorname{ctg} x=a$ 都有唯一的解：

$$x=\operatorname{arc\,ctg} a.$$

因余切函数的周期是 π，而这个区间 $(0,\ \pi)$ 的长正好是余切函数的一个周期，所以方程 $\operatorname{ctg} x=a$ 的通解是

$$x=k\pi+\operatorname{arc\,ctg} a$$

例12 解方程 $\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

解 因为 $\operatorname{arc\ ctg}\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{3}$,

$$\therefore \quad x+\frac{\pi}{3}=k\pi+\frac{\pi}{3},$$

所以方程的解是 $x=k\pi$.

例13 解方程 $\operatorname{ctg} x=-\sqrt{3}$.

解 因为 $\operatorname{arc\ ctg}(-\sqrt{3})=\frac{5\pi}{6}$,

所以方程的解是 $x=k\pi+\frac{5\pi}{6}$.

例14 解方程 $\operatorname{ctg}\left(\frac{8x}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=1$.

解 因 $\operatorname{ctg}\left(\frac{8x}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=1$,

$$\therefore \quad \frac{8x}{3}+\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{4},$$

$$\frac{8x}{3}=k\pi+\frac{\pi}{12},$$

所以方程的解是 $x=\frac{3}{8}k\pi+\frac{\pi}{32}$.

例15 解方程 $\operatorname{ctg}(2x+1)=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

解 因 $\operatorname{ctg}(2x+1)=\frac{\sqrt{3}}{3}$,

$$\therefore \qquad 2x+1=k\pi+\frac{\pi}{3},$$

$$2x=k\pi+\frac{\pi}{3}-1,$$

所以方程的解是 $\quad x=\frac{1}{6}(3k+1)\pi-\frac{1}{2}$.

根据上面的讨论，现将四种最简三角方程的有解，无解条件和通解公式列于下表(见下页)内，以便查用.

练　　习

1. a在什么范围内，方程 $\sin x=\frac{a+1}{2}$ 有解?

2. a在什么范围内，方程 $\cos x=\frac{a^2+1}{2}$ 没有解?

3. a在什么范围内，方程 $\operatorname{tg} x=\frac{a^2}{a+1}$ 没有解?

4. a在什么范围内，方程 $(a-1)\operatorname{ctg} x=3$ 有解?

5. 已知 $ab\neq 0$，方程 $\sin x=\frac{a^2+b^2}{2ab}$ 当 $a=b$ 和 $a\neq b$ 时，解的情形怎样?

方　　程	a 值	有解或无解	通　　解　　公　　式
$\sin x=a$	$\|a\|<1$	有　解	$\left.\begin{array}{l}x=2k\pi+\arcsin a\\ x=(2k+1)\pi-\arcsin a\end{array}\right\} x=k\pi+(-1)^k\arcsin a.$
	$\|a\|=1$	有　解	$x=k\pi+\frac{\pi}{2}\begin{cases}a=1\text{时}, & x=2k\pi+\frac{\pi}{2},\\ a=-1\text{时}, & x=2k\pi-\frac{\pi}{2}.\end{cases}$
	$\|a\|>1$	无　解	
$\cos x=a$	$\|a\|<1$	有　解	$x=2k\pi\pm\arccos a.$
	$\|a\|=1$	有　解	$x=k\pi\begin{cases}a=1\text{时}, & x=2k\pi,\\ a=-1\text{时}, & x=(2k+1)\pi.\end{cases}$
	$\|a\|>1$	无　解	
$\operatorname{tg} x=a$	任意实数	有　解	$x=k\pi+\operatorname{arc\,tg} a.$
$\operatorname{ctg} x=a$	任意实数	有　解	$x=k\pi+\operatorname{arc\,ctg} a.$