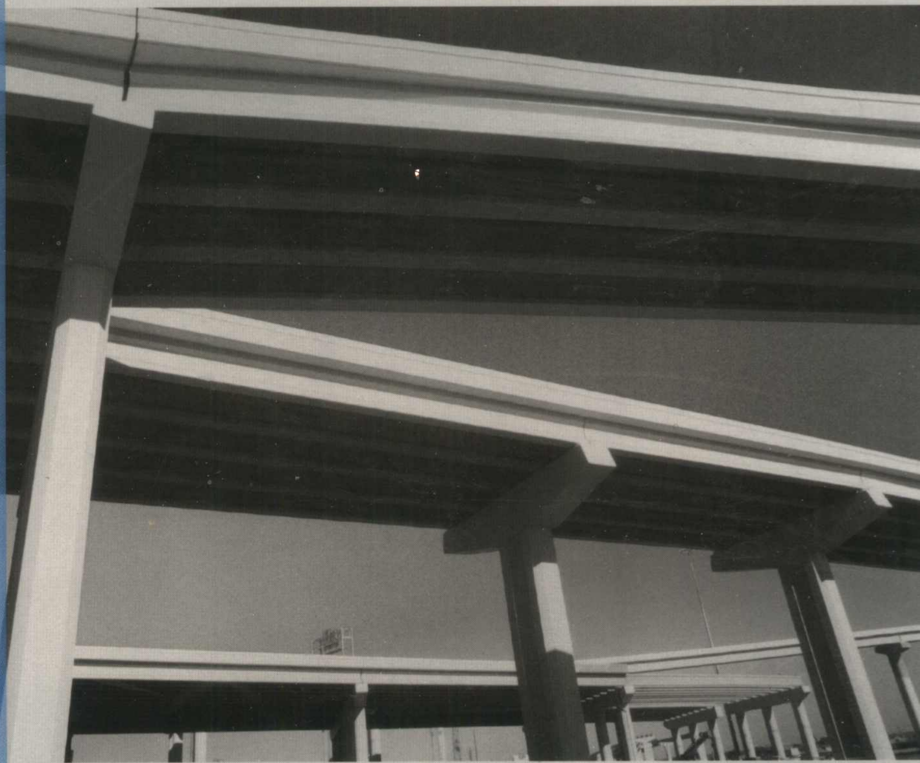
高等学校教材

材料力学习题选解

许留旺 李志君 史智 编



中 国 铁 道 出 版 社

高等学校教材

材料力学习题选解

许留旺　李志君　史　智　编

中国铁道出版社
2002年·北京

(京)新登字 063 号

内 容 简 介

为了贯彻“因材施教”的方针,满足部分同学渴望深入了解和掌握材料力学知识,更多地了解材料力学更广泛、更深奥、更典型的一些问题,以及解决这些问题的思路,甚至具体的解法和步骤,我们精心选编了部分较难的习题并作了解答,形成了本书。

本书可作为有志报考研究生、参加力学竞赛的同学,刚刚步入材料力学教学岗位的青年教师的学习参考资料,部分习题可作为本科教学讨论课的内容。建议读者将本书与《材料力学思维训练题集》配合使用。

图书在版编目(CIP)数据

材料力学习题选解/许留旺等编.-北京:中国铁道出版社,2002.9
ISBN 7-113-04829-3

Ⅰ.材… Ⅱ.许… Ⅲ.材料力学-解题 Ⅳ.TB301-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 062351 号

书　　名:材料力学习题选解
作　　者:许留旺　李志君　史　智
出版发行:中国铁道出版社(100054,北京市宣武区右安门西街 8 号)
责任编辑:程东海　　　编辑部电话:路电(021)73135　市电(010)51873135
封面设计:冯龙彬
印　　刷:中国铁道出版社印刷厂
开　　本:787×1092　1/16　印张:11.75　字数:292 千
版　　本:2002 年 9 月第 1 版　2002 年 9 月第 1 次印刷
印　　数:1～3 000 册
书　　号:ISBN 7-113-04829-3/O·100
定　　价:16.80 元

前　言

在高等学校教学改革不断深入的过程中，为了提高材料力学课程的教学质量，我们在多年探索和实践的基础上，于 2000 年 7 月出版了《材料力学思维训练题集》。该题集的显著特点，除了在材料力学课程的基本概念方面设题外，还将大量计算题、证明题中的难点、要点概括抽象出来，设计了足够数量的思维训练题。在教学时数减少的情况下，该训练题集的使用，提高了学生分析问题、解决问题的能力，对提高材料力学课程的教学质量，起到了一定的作用。但是，思维训练题仍然是侧重于基本要求的训练。为了贯彻“因材施教”的方针，满足部分同学渴望深入了解和掌握材料力学知识，更多地了解材料力学更广泛、更深奥、更典型的一些问题，以及解决这些问题的思路，甚至具体的解法和步骤，我们精心选编了部分较难的习题并作出了解答，形成了本书。

通过这部分习题的训练将使读者对材料力学的概念、原理和方法理解更加深刻，解题方法更加灵活，思路更加开阔，综合利用材料力学知识的能力得到提高，创新意识增强，分析问题和解决问题的能力进一步提高。

该书可作为有志报考研究生、参加力学竞赛的同学，刚刚步入材料力学教学岗位的青年教师的学习参考资料，部分习题也可作为本科教学习题讨论课的内容。建议读者将本书与《材料力学思维训练题集》配合使用。

本书作者对西南交通大学材料力学教师的大力支持深表谢意。

限于作者水平，遗误难免，恳求读者批评指正。

编　者

2002 年 6 月

目　录

第一章

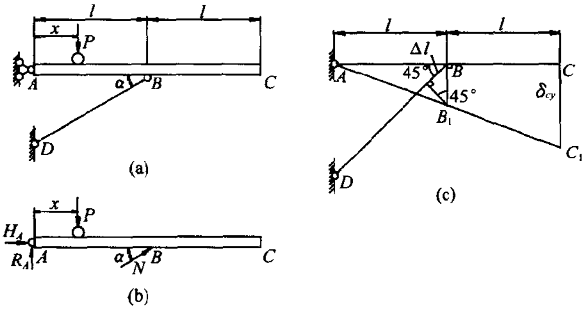
轴向拉伸与压缩

1—1　图(a)所示三角形托架中，AC 为刚性杆，BD 为弹性杆，弹性模量为 E，许用应力为 $[\sigma]$，P 力可以在 AC 杆上自由移动。试求：

(1) P 力作用线的最不利位置；

(2) 使 BD 杆重量最轻时的 α 角；

(3) 确定 α 角后，求 C 截面的位移。



题 1—1 图

解　(1) 求 P 力作用线位置

以 AC 杆为研究对象[图(b)]，设 BD 杆的轴力为 N，由平衡方程得

$$N=\frac{Px}{l\sin\alpha}$$

当 $x=2l$ 时，N 达到最大值，即 $x=2l$ 为 P 力作用线的最不利位置。

(2) 求 BD 杆重量最轻时的 α 角

$x=2l$ 时，N 的最大值为

$$N_{\max}=\frac{2P}{\sin\alpha}$$

BD 杆的横截面面积 A 应为

$$A\geqslant\frac{N_{\max}}{[\sigma]}=\frac{2P}{\sin\alpha[\sigma]}$$

BD 杆的体积为

$$V=Al_{BD}=A\frac{l}{\cos\alpha}=\frac{2P}{\sin\alpha[\sigma]}\frac{l}{\cos\alpha}=\frac{4Pl}{\sin2\alpha[\sigma]}$$

当 $\alpha=45°$时，BD 杆的体积 V 最小，即 BD 杆的重量为最轻。

(3) 求 C 截面的位移

BD 杆的缩短量为

$$\Delta l_{BD}=\frac{N_{\max}\ l_{AB}}{EA}=\frac{(2P/\sin\alpha)(l/\cos\alpha)}{E(2P/\sin\alpha[\sigma])}=\frac{[\sigma]l}{E\cos\alpha}$$

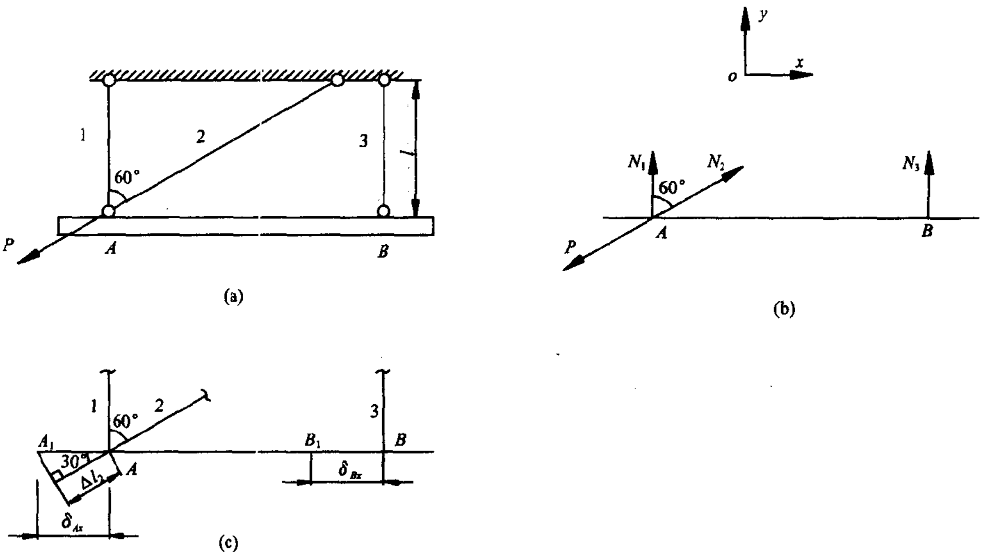
结构的位移图如图(c)所示。图中，$BB_1=\sqrt{2}\Delta l_{BD}=\dfrac{\sqrt{2}[\sigma]l}{E\cos\alpha}$，$C$ 截面的水平和竖直位移分别为

$$\delta_{cx}=0$$

$$\delta_{cy}=2BB_1=\frac{2\sqrt{2}[\sigma]l}{E\cos\alpha}=\frac{2\sqrt{2}[\sigma]l}{E\cos45°}=\frac{4[\sigma]l}{E}\quad(\downarrow)$$

1—2　图(a)所示结构中，1、2、3 三根杆的抗拉(压)刚度均为 EA，AB 杆为刚性杆。试求

B 点的位移。



题 1—2 图

解 该题的关键在于结构的受力分析，以 AB 杆为研究对象〔图(b)〕，由 $\Sigma m_A=0$，得 $N_3=0$；由 $\Sigma X=0$，得 $N_2=P$；由 $\Sigma Y=0$，得 $N_1=0$。由于 1、3 杆的轴力为零，该两根杆不变形，只有 2 杆伸长，则结构的位移图如图(c)所示。

由图(c)得，A、B 两点的水平位移和竖直位移分别为

$$\delta_{Ax}=\Delta l_2/\cos30°=\frac{2\sqrt{3}}{3}\Delta l_2$$

$$\delta_{Ay}=0$$

$$\delta_{Bx}=\delta_{Ax}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\Delta l_2$$

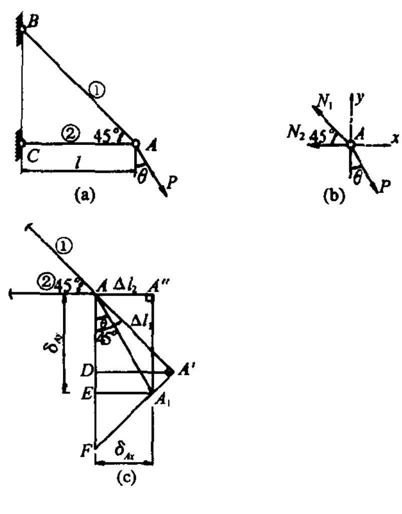
$$\delta_{By}=0$$

其中 $$\Delta l_2=\frac{N_2 l_2}{EA}=\frac{P\times 2l}{EA}=\frac{2Pl}{EA}$$

故 $$\delta_{Bx}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{2Pl}{EA}=\frac{4\sqrt{3}Pl}{3EA}\quad(\leftarrow)$$

$$\delta_{By}=0$$

1—3 图(a)所示结构中，AB 杆和 AC 杆的材料相同，弹性模量为 E，横截面面积分别为 A_1 和 A_2，设 $A_2=2A_1$。欲使 A 点的位移方向和 P 力方向相同，则角度 θ 应为何值？



题 1—3 图

解 A 点的受力图和结构的位移图分别如图(b)及图(c)所示。设 A 点的位移 AA_1 和竖直方向的夹角为 θ，由图(b)得

$$\Sigma X=0,\quad -N_1\cos45^\circ-N_2+P\sin\theta=0$$

$$\Sigma Y=0,\quad N_1\sin45^\circ-P\cos\theta=0$$

解得
$$N_1=\sqrt{2}P\cos\theta,\qquad N_2=P(\sin\theta-\cos\theta)\tag{1}$$

由图(c)得

$$\delta_{Ax}=\Delta l_2,\qquad \delta_{Ay}=\sqrt{2}\Delta l_1-\Delta l_2\tag{2}$$

$$\tan\theta=\frac{\delta_{Ax}}{\delta_{Ay}}=\frac{\Delta l_2}{\sqrt{2}\Delta l_1-\Delta l_2}\tag{3}$$

其中，$$\Delta l_1=\frac{N_1l_1}{EA_1}=\frac{\sqrt{2}P\cos\theta\sqrt{2}l}{EA_1}=\frac{2Pl\cos\theta}{EA_1},\Delta l_2=\frac{N_2l_2}{EA_2}=\frac{Pl(\sin\theta-\cos\theta)}{EA_2}\tag{4}$$

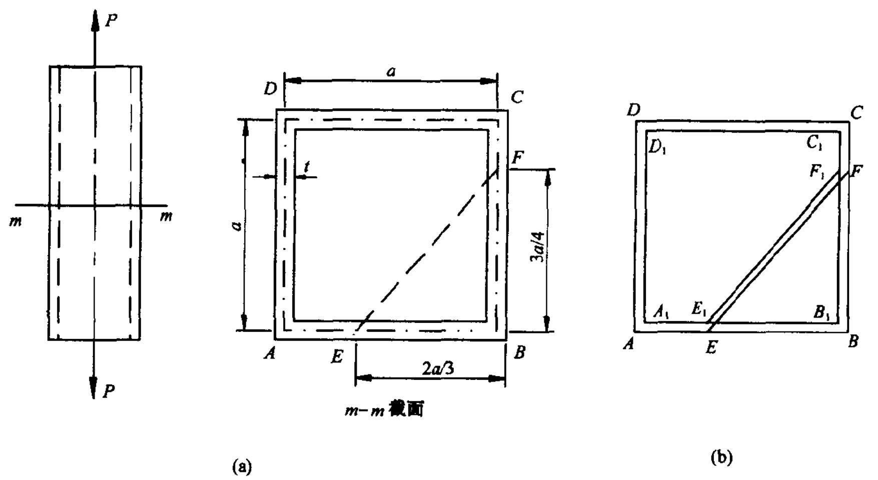
把(4)式代入(3)式得

$$\tan2\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{A_1}{A_2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{A_1}{2A_1}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\theta=-9.7^\circ$$

θ 角为负值，说明 P 力应在图(a)中 A 点处的竖线左侧，P 力和竖线夹角为 9.7°。

1—4　正方形箱形截面杆，其中心线长度为 a，厚度为 t，受轴向拉力 P 作用，试求 $m-m$ 横截面上 E、F 两点间距离的改变量 ΔEF。已知材料的弹性模量为 E，泊桑比为 ν。



题 1—4 图

解　轴向受拉杆沿纵向伸长、横向缩短。受力后横截面的中心线 $ABCD$ 将移到 $A_1B_1C_1D_1$，E、F 两点分别移至 E_1、F_1〔图(b)〕。

设杆的横向线应变为 ε'，有 $E_1B_1=(1+\varepsilon')EB$，$B_1F_1=(1+\varepsilon')BF$。$E_1$、$F_1$ 两点的距离为

$$E_1F_1=\sqrt{E_1B_1^2+B_1F_1^2}=\sqrt{(1+\varepsilon')^2(EB^2+BF^2)}=(1+\varepsilon')EF$$

E、F 两点间的距离为

$$EF=\sqrt{EB^2+BF^2}=\sqrt{\left(\frac{2}{3}a\right)^2+\left(\frac{3}{4}a\right)^2}\approx a$$

E、F 两点间距离的改变量为

$$\Delta EF = E_1F_1 - EF = (1+\varepsilon')EF - EF = \varepsilon' EF = \varepsilon' a$$

杆的纵向线应变和横向线变分别为

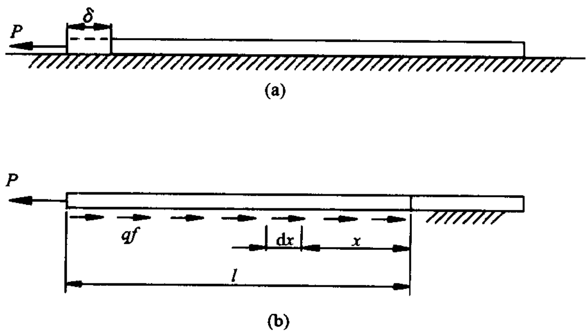
$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{P}{AE} = \frac{P}{4atE}, \qquad \varepsilon' = -\nu\varepsilon = -\nu\frac{P}{4atE}$$

最后得

$$\Delta EF = -\nu\frac{P}{4atE}\times a = -\frac{P\nu}{4tE}$$

由以上分析可知，E、F 两点间距离的改变量 ΔEF 等于横向线应变乘以该两点间的距离。可以进一步证明这个结论具有一般性。当轴向受拉杆的横截面为任意形状空心截面时，设横截面上任意两点间的距离为 d，则其改变量等于横向线应变与 d 的乘积，即 $\Delta d = \varepsilon' d$。

1—5 图(a)所示为无限长的弹性杆，其横截面面积为 A，弹性模量为 E，单位长度的重量为 q。该杆放在粗糙的平面上，杆与支承面之间的摩擦系数为 f。试求欲使杆端产生的位移为 δ 时所需的 P 力之值。



题 1—5 图

解 因为杆为无限长杆，在 P 力作用下，设仅有长度为 l 的一段杆产生伸长变形〔图(b)〕，从而使杆的左端产生水平位移。该段杆与支承面之间单位长度的摩擦力为 qf。x 截面的轴力为

$$N(x) = qfx \tag{1}$$

当 $x = l$ 时，有

$$P = N(l) = qfl \tag{2}$$

杆左端的位移为

$$\delta = \int_0^l \frac{N(x)\mathrm{d}x}{EA} = \int_0^l \frac{qfx}{EA}\mathrm{d}x = \frac{qf}{2EA}l^2$$

解得

$$l = \sqrt{\frac{2EA\delta}{qf}} \tag{3}$$

把(3)式代入(2)式，得

$$P = qf\sqrt{\frac{2EA\delta}{qf}} = \sqrt{2EAqf\delta}$$

1—6 图(a)所示结构中，A、B 处为铰接，C 处为定向支承，C 点只产生铅垂位移，不能产生水平位移，1、2 两杆的抗拉刚度均为 EA。试求 1、2 杆的轴力以及 C 点处的约束反力。

解 若 C 处的约束不能限制其水平位移，C 点将有向右的水平位移，所以 C 处有向左的水平反力 R。C 点的受力图如图(b)所示，平衡方程为

$$\Sigma X = 0,\ N_2\sin 30° - R = 0 \tag{1}$$

$$\Sigma Y = 0,\ N_1 + N_2\cos 30° = P \tag{2}$$

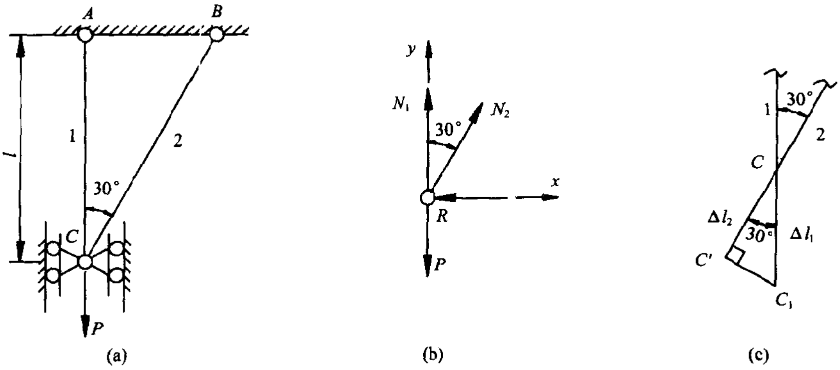
结构的位移图如图(c)所示，变形的几何关系为

$$\Delta l_1\cos 30° = \Delta l_2 \tag{3}$$

应用胡克定律，并化简得

$$N_1 = \frac{N_2}{\cos^2 30°} = \frac{4}{3}N_2 \tag{4}$$

联立求解(2)、(4)两式，得



题 1—6 图

$$N_1=\frac{8}{8+3\sqrt{3}}P=0.61P(\text{拉力}),\quad N_2=\frac{6}{8+3\sqrt{3}}P=0.45P(\text{拉力})$$

把 N_2 之值代入(1)式得

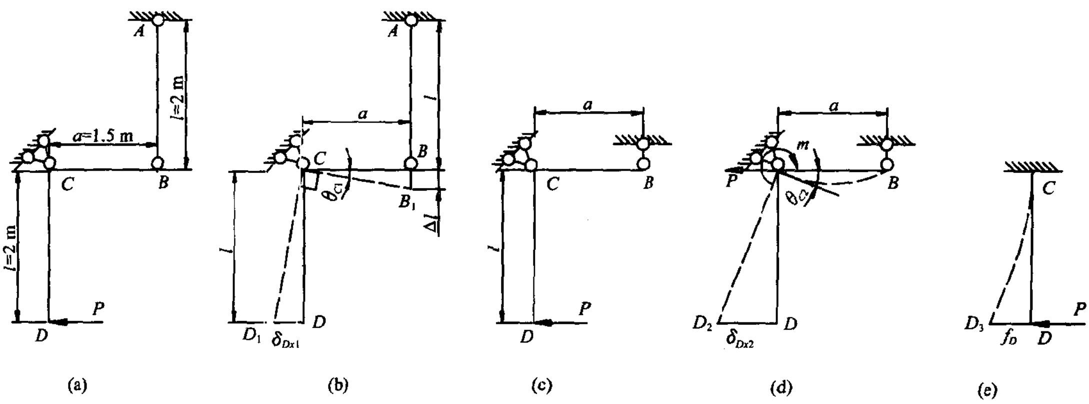
$$R=\frac{1}{2}N_2=0.225P$$

1—7　直径为 $d=16$ mm的钢圆杆 AB，与刚性折杆 BCD 在 B 处铰接〔图(a)〕，当 D 处受水平力 P 作用时，测得 AB 杆的线应变 $\varepsilon=9\times10^{-4}$。已知钢材的弹性模量 $E=210$ GPa。试求：

(1) P 力的大小；

(2) D 点的水平位移；

(3) 若折杆 BCD 视为弹性的刚架，并设两杆的抗弯刚度为 EI，列出求 D 点的水平位移的表达式。



题 1—7 图

解　(1) AB 杆的轴力为

$$N=\sigma A=E\varepsilon A\qquad(\text{拉力})$$

由 BCD 杆的平衡方程 $\Sigma m_C=0$，得

$$P=\frac{a}{l}N=\frac{1.5}{2}\times210\times10^3\times9\times10^{-4}\times\frac{\pi\times16^2}{4}=28.5\text{ kN}$$

(2) AB 杆的伸长量为 $\Delta l=\varepsilon l$，结构的位移图如图(b)所示，D 点的水平位移为

$$\delta_{Dx}=\frac{l}{a}\Delta l=\frac{2}{1.5}\times 9\times 10^{-4}\times 2\times 10^{3}=2.4\ \mathrm{mm}\qquad (\leftarrow)$$

(3) 把 BCD 杆视为弹性刚架，并暂不考虑 AB 杆的伸长 Δl 时，BCD 杆的计算简图如图(c)所示。将 P 力向 C 点简化〔图(d)〕，$m=Pl$，由 m 产生的 C 截面的转角为

$$\theta_{C2}=\frac{ma}{3EI}=\frac{Pla}{3EI}$$

由 θ_{C2} 引起的 D 截面的水平位移为

$$\delta_{Dx2}=\theta_{C2}\,l=\frac{Pl^2a}{3EI}\qquad (\leftarrow)$$

把 CD 杆视为悬臂梁〔图(e)〕，D 点的挠度为

$$f_D=\delta_{Dx3}=\frac{Pl^3}{3EI}\qquad (\leftarrow)$$

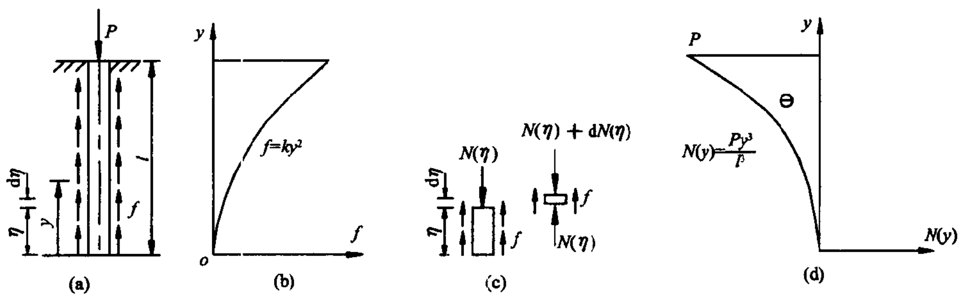
综合考虑以上各因素，D 点的水平位移为

$$\delta_{Dx}=\frac{l}{a}\Delta l+\frac{Pl^2a}{3EI}+\frac{Pl^3}{3EI}\qquad (\leftarrow)$$

1—8　图(a)所示木桩埋入土中的深度 $l=10$ m，横截面面积为 $A=70\ 000\ \mathrm{mm}^2$，弹性模量 $E=10$ GPa。压力 $P=400$ kN，木桩和土的摩擦力为 $f=ky^2$〔图(b)〕，k 为常数。木桩在 P 力和摩擦力作用下保持平衡。

(1) 画出木桩的轴力图；

(2) 求木桩总的缩短量 Δl。



题 1—8 图

解　(1) 画轴力图

取分离体如图(c)所示，$\mathrm{d}N(\eta)=f\mathrm{d}\eta=k\eta^2\mathrm{d}\eta$，则 y 截面上的轴力为

$$N(y)=\int_0^y \mathrm{d}N(\eta)=\int_0^y k\eta^2\mathrm{d}\eta=\frac{1}{3}ky^3\qquad(1)$$

由 $y=l$ 时，$N(l)=P$，得常数 k 为

$$k=\frac{3P}{l^3}\qquad(2)$$

故 y 截面的轴力为

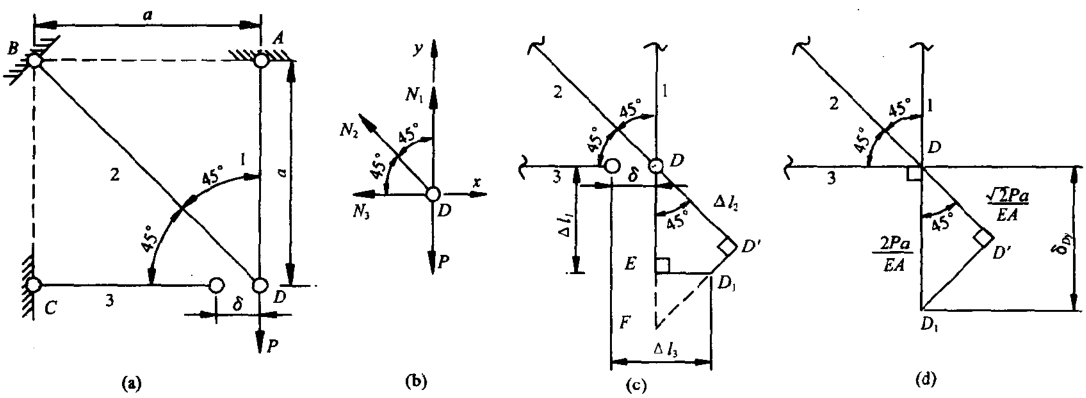
$$N(y)=\frac{1}{3}ky^3=\frac{1}{3}\frac{3P}{l^3}y^3=\frac{Py^3}{l^3}\quad（压力）$$

轴力图如图(d)所示。

(2) 求木桩的总缩短量

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N(y)\mathrm{d}y}{EA} = \int_0^l \frac{P}{EAl^3} y^3 \mathrm{d}y = \frac{Pl}{4EA}$$
$$= \frac{400\times10^3\times10\times10^3}{4\times10\times10^3\times70\ 000} = 1.43\ \mathrm{mm}$$

1—9 图(a)所示 1、2、3 杆的横截面面积均为 A，弹性模量均为 E，3 杆由于制造误差短了 δ，且 $\delta=\frac{Pa}{EA}$。装配后温度升高 t 度，且在 D 点受集中力 P。已知各杆的线膨胀系数均为 α，且 $\alpha t=\frac{P}{EA}$。试求 D 点的位移。



题 1—9 图

解 该题是求在装配、温度和载荷共同作用下超静定结构的位移。

D 点的受力图如图(b)所示，由平衡方程，得

$$N_2=-\sqrt{2}N_3 \tag{1}$$

$$N_1=P-\frac{\sqrt{2}}{2}N_2 \tag{2}$$

由 D 点的位移图〔图(c)〕，得变形的几何方程为

$$\sqrt{2}\Delta l_2=\Delta l_1+(\Delta l_3-\delta) \tag{3}$$

其中，
$$\left.\begin{aligned}&\Delta l_1=\frac{N_1 a}{EA}+\alpha ta,\ \Delta l_2=\frac{N_2\sqrt{2}a}{EA}+\alpha t\sqrt{2}a\\&\Delta l_3=\frac{N_3 a}{EA}+\alpha ta\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

把(4)式代入(3)式，并注意到 $\delta=\frac{Pa}{EA}$，得

$$N_1-2N_2+N_3=P \tag{5}$$

(1)、(2)两式和(5)式联立求解，得

$$N_1=P,N_2=0,N_3=0 \tag{6}$$

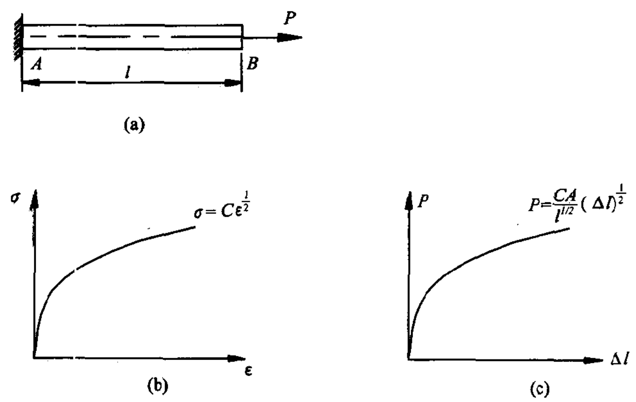
把(6)式代入(4)式，并注意到 $\alpha ta=\frac{Pa}{EA}$，得各杆的变形分别为

$$\left.\begin{aligned}\Delta l_1&=\frac{Pa}{EA}+\frac{Pa}{EA}=\frac{2Pa}{EA}\\ \Delta l_2&=\frac{\sqrt{2}Pa}{EA}\\ \Delta l_3&=\frac{Pa}{EA}=\delta\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

D 点的位移图如图(d)所示，D 点的位移为

$$\delta_{Dx}=0,\qquad \delta_{Dy}=\frac{2Pa}{EA}\qquad (\downarrow)$$

1—10　图(a)所示拉杆的横截面面积为 A，应力和应变之间的关系为 $\sigma=C\epsilon^{\frac{1}{2}}$〔图(b)〕，$C$ 为已知的常数。试求 P 力所做的功 W。



题 1—10 图

解　因为应力和应变是非线性关系，求拉杆变形 Δl 的胡克定律已不成立。

拉杆的总伸长量为

$$\Delta l=\varepsilon l=\frac{\sigma^2}{C^2}l$$

根据平面假设，拉杆横截面上的正应力为

$$\sigma=\frac{P}{A}$$

于是

$$\Delta l=\frac{P^2}{C^2A^2}l$$

得

$$P=\frac{CA}{l^{1/2}}(\Delta l)^{\frac{1}{2}}$$

P 和 Δl 的关系曲线如图(c)所示。可得 P 力所做的功为

$$W=\int_0^{\Delta l}P\,\mathrm{d}(\Delta l)=\int_0^{\Delta l}\frac{CA}{l^{1/2}}(\Delta l)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}(\Delta l)=\frac{2P^3l}{3C^2A^2}$$

该题也可以根据外力功在数值上等于应变能的原理求解。根据图(b)得拉杆的比能为

$$u=\int_0^{\epsilon}\sigma\mathrm{d}\epsilon=\int_0^{\epsilon}C\epsilon^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\epsilon=\frac{2}{3}C\epsilon^{\frac{3}{2}}=\frac{2P^3}{3C^2A^3}$$

拉杆的应变能为

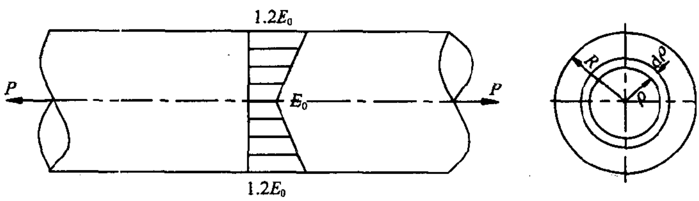
$$U=\int_V u\,\mathrm{d}V=\int_0^l uA\,\mathrm{d}l=\int_0^l\frac{2P^3}{3C^2A^2}\mathrm{d}l=\frac{2P^3l}{3C^2A^2}$$

故
$$W=U=\frac{2P^3 l}{3C^2A^2}$$

1—11　图示圆截面直杆的半径为 R，材料的弹性模量由中心至边缘按线性规律变化，设中心处的弹性模量为 E_0，边缘处的弹性模量为 $1.2E_0$。杆受轴向拉力 P 作用。试导出横截面上的正应力公式。

解　半径为 ρ 处的弹性模量为

$$E(\rho)=\left(1+\frac{0.2}{R}\rho\right)E_0=\frac{5R+\rho}{5R}E_0 \tag{1}$$



题 1—11 图

设该杆轴向拉伸时平面假设仍然成立，即同一横截面上的纵向线应变 ε 为常量，所以半径为 ρ 处的正应力为

$$\sigma(\rho)=E(\rho)\varepsilon=\frac{5R+\rho}{5R}E_0\varepsilon \tag{2}$$

由平衡方程

$$P=\int_A\sigma(\rho)\mathrm{d}A=\int_0^R\left(\frac{5R+\rho}{5R}E_0\varepsilon\right)(2\pi\rho)\mathrm{d}\rho=\frac{17}{15}E_0\varepsilon A$$

得
$$\varepsilon=\frac{15}{17}\frac{P}{E_0A} \tag{3}$$

将(3)式代入(2)式得

$$\sigma(\rho)=\frac{5R+\rho}{5R}E_0\times\frac{15}{17}\frac{P}{E_0A}=\frac{3(5R+\rho)}{17R}\frac{P}{A}$$

1—12　厚度为 t，左、右两端的高度分别为 h_1 和 h_2 的楔形薄板，受轴向拉力 P 作用〔图(a)〕。假设横截面上的正应力均匀分布，试用材料力学方法求横截面上剪应力的分布规律。

解　在图(a)所示楔形薄板中，截取 $\mathrm{d}x$ 微段如图(b)所示。设其两侧横截面上的正应力均匀分布，分别为 $\sigma(x)$ 及 $\sigma(x)+\mathrm{d}\sigma(x)$，再用距中央纵截面为 y 的纵截面从 $\mathrm{d}x$ 微段上截取一分离体〔图(c)〕。若要保持分离体的平衡，则顶部纵截面上应有剪应力 τ'，并设 τ' 沿厚度 t 均匀分布。

x 截面的高度和正应力分别为

$$h(x)=h_1+\frac{h_2-h_1}{l}x$$

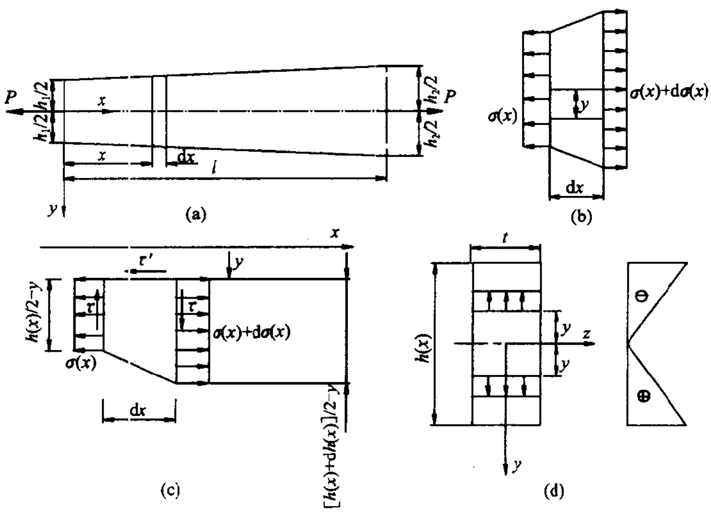
$$\sigma(x)=\frac{P}{A(x)}=\frac{P}{th(x)}$$

其微分为

$$\mathrm{d}\sigma(x)=\sigma'(x)\mathrm{d}x=-\frac{P}{th^2(x)}h'(x)\mathrm{d}x=-\sigma(x)\frac{h_2-h_1}{h(x)l}\mathrm{d}x$$

$(x+\mathrm{d}x)$横截面上的正应力为

$$\sigma(x)+\mathrm{d}\sigma(x)=\sigma(x)-\sigma(x)\frac{h_2-h_1}{h(x)l}\mathrm{d}x=\sigma(x)\left[1-\frac{h_2-h_1}{h(x)l}\mathrm{d}x\right]$$



题 1—12 图

由分离体〔图(c)〕的平衡方程 $\Sigma X=0$,有

$$[\sigma(x)+\mathrm{d}\sigma(x)]\left(\frac{h(x)+\mathrm{d}h(x)}{2}-y\right)t-\sigma(x)\left(\frac{h(x)}{2}-y\right)t-\tau' t\mathrm{d}x=0$$

化简并略去高阶微量得

$$\tau'=\frac{P(h_2-h_1)l}{[h_1l+(h_2-h_1)x]^2t}y$$

根据剪应力互等定理,则横截面上的剪应力为

$$\tau=\frac{P(h_2-h_1)l}{[h_1l+(h_2-h_1)x]^2t}y$$

可见 x 横截面上的剪应力沿截面高度呈线性规律变化,如图(d)所示。$y=\frac{h(x)}{2}$时,τ 达最大值,为

$$\tau_{\max}=\frac{P(h_2-h_1)}{2[h_1l+(h_2-h_1)x]t}$$

1—13 边长为 a 的正方形桁架,受力如图(a)所示。各杆的材料相同,许用应力$[\sigma]=120$ MPa,弹性模量 $E=200$ GPa,$P=60$ kN,$a=200$ mm。

(1) 求各杆所需要的横截面面积;

(2) 求 A、B 两结点的竖直位移。

解 (1)由结点 B 的平衡条件〔图(b)〕得

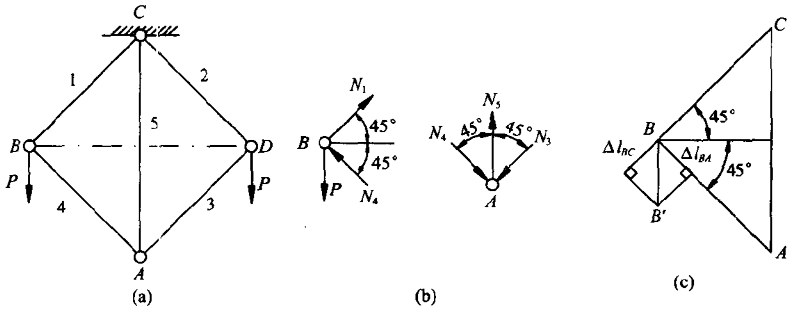
$$N_1=\frac{\sqrt{2}}{2}P=42.4\ \text{kN(拉)},\qquad N_4=\frac{\sqrt{2}}{2}P=42.4\ \text{kN(压)}$$

根据对称条件得

$$N_2=N_1=42.4\ \text{kN(拉)},\qquad N_3=N_4=42.4\ \text{kN(压)}$$

由结点 A 的平衡条件得

$$N_5 = P = 60\ \text{kN}(拉)$$



题1—13图

AB、BC、CD、DA 四杆轴力的绝对值相等，故它们的横截面面积相等，由强度条件得四杆的横截面面积为

$$A_1 \geqslant \frac{N_1}{[\sigma]} = \frac{42.4\times10^3}{120} = 353.3\ \text{mm}^2$$

AC 杆的横截面面积为

$$A_2 \geqslant \frac{N_5}{[\sigma]} = \frac{60\times10^3}{120} = 500\ \text{mm}^2$$

(2) 结点 A 的竖直位移在数值上等于 AC 杆的伸长量，即

$$\delta_{Ay} = \Delta l_{AC} = \frac{N_5\sqrt{2}a}{EA_2} = \frac{60\times10^3\times\sqrt{2}\times200}{200\times10^3\times500} = 0.17\ \text{mm}\quad(\downarrow)$$

可用几何法或能量法求结点 B 的竖直位移。用几何法时，先设 AC 杆为刚性杆，其变形图如图(c)所示。由 BC、AB 杆的变形所产生的 B 点在竖直方向的位移为

$$\delta'_{By} = \sqrt{2}\Delta l_{BC} = \sqrt{2}\frac{N_1 a}{EA_1} = \frac{\sqrt{2}\times42.4\times10^3\times200}{200\times10^3\times353.3} = 0.17\ \text{mm}$$

由 AC 杆的伸长，产生的 B 点在竖直方向的位移为

$$\delta''_{By} = \frac{1}{2}\times\Delta l_{AC} = \frac{1}{2}\times0.17 = 0.085\ \text{mm}$$

所以，B 点沿竖直方向的位移为

$$\delta_{By} = \delta'_{By} + \delta''_{By} = 0.17 + 0.085 = 0.255\ \text{mm}\quad(\downarrow)$$

在用卡氏定理求解时，应注意 $\dfrac{\partial U}{\partial P}$ 为 B、D 两点沿 P 方向位移之和，所以

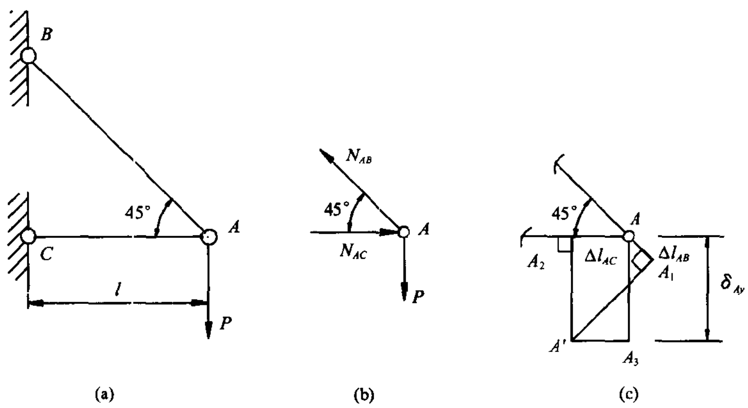
$$\begin{aligned}
\delta_{By} &= \frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial P} = \frac{1}{2}\times\left[\frac{1}{EA_1}\sum_{i=1}^{4}N_i\frac{\partial N_i}{\partial P}a + \frac{1}{EA_2}N_5\frac{\partial N_5}{\partial P}\sqrt{2}a\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{2Pa}{EA_1} + \frac{P\sqrt{2}a}{EA_2}\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{2\times60\times10^3\times200}{200\times10^3\times353.3} + \frac{\sqrt{2}\times60\times10^3\times200}{200\times10^3\times500}\right]\\
&= 0.255\ \text{mm}\quad(\downarrow)
\end{aligned}$$

1—14　如图(a)所示三角架，AB 杆材料的弹性模量为 E_1，应力和应变的关系为 $\sigma = E_1\varepsilon^{\frac{1}{2}}$；$AC$ 杆材料的弹性模量为 E_2，应力和应变的关系为 $\sigma = E_2\varepsilon$；两杆的横截面面积均为

A。求结点 A 的铅垂位移 δ_{Ay}。

解 由结点 A 的平衡条件〔图(b)〕得 AB、AC 杆的轴力分别为

$$N_{AB}=\sqrt{2}P(\text{拉力}),\qquad N_{AC}=P(\text{压力})$$



题 1—14 图

AB、AC 杆的应变分别为

$$\varepsilon_{AB}=\left(\frac{\sigma_{AB}}{E_1}\right)^2=\left(\frac{N_{AB}}{E_1A}\right)^2=\frac{2P^2}{(E_1A)^2}\quad(\text{伸长线应变})$$

$$\varepsilon_{AC}=\frac{N_{AC}}{E_2A}=\frac{P}{E_2A}\quad(\text{缩短线应变})$$

AB、AC 杆的变形分别为

$$\Delta l_{AB}=\varepsilon_{AB}l_{AB}=\varepsilon_{AB}\sqrt{2}l=\frac{2\sqrt{2}P^2l}{(E_1A)^2}\quad(\text{伸长})$$

$$\Delta l_{AC}=\varepsilon_{AC}l=\frac{Pl}{E_2A}\quad(\text{缩短})$$

由结构的变形图〔图(c)〕可知，A 点的铅垂位移为

$$\delta_{Ay}=AA_3=\sqrt{2}\Delta l_{AB}+\Delta l_{AC}=\frac{4P^2l}{(E_1A)^2}+\frac{Pl}{E_2A}\quad(\downarrow)$$

1—15 简单桁架的三根杆件均为钢材制成，$E=200$ GPa，横截面面积均为 $A=300\ \text{mm}^2$，$P=5$ kN。试求 C 点的水平及垂直位移。

解 1. 解析法

由图(a)的几何关系，得

$$l_2=1.803\ \text{m},\ l_3=1.25\ \text{m},\ \sin\alpha=\frac{0.75}{1.25}=0.6,\ \cos\alpha=\frac{1}{1.25}=0.8$$

$$\sin\beta=\frac{1.5}{1.803}=0.8319,\ \cos\beta=0.5546,\ \tan\alpha=\frac{0.75}{1}=0.75,\ \tan\beta=\frac{1.5}{1}=1.5$$

由节点 C 和 B 的平衡条件〔图(b)〕得

$$N_1=2.50\ \text{kN}\ (\text{拉力}),\ N_2=3.01\ \text{kN}\ (\text{压力}),\ N_3=4.17\ \text{kN}\ (\text{压力})$$

各杆的变形为

$$\Delta l_1=\frac{2.5\times10^3\times2.25\times10^3}{200\times10^3\times300}=0.094\ \text{mm}\quad(\text{伸长})$$