MBA工商管理系列教材

运筹学

李荣钧　邝英强　编著

YUNCHOUXUE

华南理工大学出版社

内 容 简 介

与目前流行的运筹学教材不同，本书在内容和表述方式上都作了较大的改进，略去了常见的非线性规划、动态规划、排队论和系统模拟理论等内容，而根据需要对线性规划、整数规划、图论与网络分析、对策论和决策论等基本内容作了适当的扩充。如线性规划的常规-对偶算法、整数规划的混合型整数切割方程、网络分析的 Floyd 算法、对策论的二人非零和对策及多人对策、决策论的现代效用理论等。并增加了 20 世纪 80 年代以后迅速发展起来的多准则决策分析，包括多属性决策、多属性群决策、多目标决策和 De Novo 系统设计等内容。这些内容难度不大，但反映了国际运筹学界在运筹学理论与方法上的新观念和新观点，对开拓工商管理学本科学生和 MBA 学生的思维与视野大有裨益。

本书论述深入浅出，在注重基本原理的同时，更强调分析方法和应用，可作为工商管理学院各专业和 MBA 学生的运筹学教材，也可以作为其他相关专业高年级本科生或研究生的参考教材，或作为从事管理科学或系统科学理论研究及应用实践的各方面专业人员的工具书和重要参考资料。

图书在版编目（CIP）数据

运筹学/李荣钧，邝英强编著.—广州：华南理工大学出版社，2002.9
（MBA 工商管理系列教材）
ISBN 7-5623-1869-7

Ⅰ.运… Ⅱ.①李… ②邝… Ⅲ.运筹学-研究生-教材 Ⅳ.O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 061181 号

总 发 行：华南理工大学出版社（广州五山华南理工大学 17 号楼，邮编 510640）
发行部电话：020-87113487　87111048（传真）
E-mail：scut202@scut.edu.cn　　http://www2.scut.edu.cn/press
责任编辑：罗月花
印 刷 者：中山市新华印刷厂有限公司
开　　本：787×1092　1/16　**印张**：19.125　**字数**：478 千
版　　次：2002 年 9 月第 1 版第 1 次印刷
印　　数：1～3000 册
定　　价：32.00 元

前　言

运筹学是用定量分析技术为管理决策提供科学依据的一门新兴学科，它是MBA学生的学位课程，也被我国多数理工科院校列为经济管理或系统工程专业的必修课程。

国内目前流行的运筹学教材很多，但内容和表述方式都大同小异，且存在以下两方面的基本问题。一是由于我国早期的运筹学工作者大多来自数学专业，故编写的运筹学教材侧重于数学原理和方法的论述，不太适宜工科院校学生尤其是工商管理专业学生和MBA学生的特点与要求。二是教材的内容比较陈旧，虽然部分教材已经作了修订，但知识更新的速度较慢，跟不上新兴学科的发展步伐。为此，我们在参考美国多种最新版运筹学教材的基础上编著了本书。它在内容上和表叙方式上都作了较大程度的改进，可作为工商管理学院各专业和MBA学生的运筹学教材，也可以作为其他相关专业高年级本科生或研究生的参考教材，或作为从事管理科学或系统科学理论研究及应用实践的各方面专业人员的工具书和重要参考资料。

与目前流行的运筹学教材不同，本书一方面略去了常见的非线性规划、排队论和系统模拟理论等内容。这些内容都相对较难，且自成体系，已经超出了工商管理专业学生的正常学习范畴。如果需要的话，应作为选修课程单独讲授，而不宜混编在运筹学基础教材中。此外，动态规划因“无后效性”和“维数障碍”两方面的原因，在实际应用中有较大的局限性，故也未列入本教材的内容。另一方面，本书根据需要对线性规划、整数规划、图论与网络分析、对策论和决策论等基本内容作了适当的扩充，如线性规划的常规-对偶算法、整数规划的混合型整数切割方程、网络分析的Floyd算法、对策论的二人非零和对策及多人对策、决策论的现代效用理论等。同时，鉴于现行运筹学教材对作为运筹学核心内容的现代决策理论与方法介绍甚少，一般只涉及单一准则的决策分析。为此，增加了20世纪80年代以后迅速发展起来的多准则决策分析，包括多属性决策、多属性群决策、多目标决策和De Novo系统设计等内容。这些内容难度不大，但反映了国际运筹学界在运筹学理论与方法上的新观念和新观点，对开拓工商管理学本科学生和MBA学生的思维与视野都大有裨益。考虑到运筹学方法的计算比较繁琐，在实际应用中离不开计算机的辅助设计与支持。虽然这方面的专业软件在国际上早已商品化，但在国内能够见到的运筹学应用软件为数不多。鉴于Excel是视窗系统中最常用的数据处理程序，我们特以附录的形式

给出了关于规划求解的 Excel 上机手册，相信对使用本教材的读者会提供某些方便。

在表述方式上，本书力求深入浅出，尽可能采用通俗的语言说明模型的基本原理，强调运筹思想、分析方法和实际应用，而不追求严格的数学证明，以适应工商管理专业本科学生和 MBA 学生的特点与要求。

全书共分 13 章和 1 个附录，除第 7 章（存储论）和附录（规划求解 Excel 上机手册）由邝英强编写外，其余各章均由李荣钧编写，并由李荣钧统编定稿。

在本书编著过程中，得到了华南理工大学工商管理学院和华南理工大学出版社等有关方面的支持和协助，作者谨在此表示由衷的谢意。

李荣钧

2002 年 6 月

目　　录

第1章 绪　言

1.1　运筹学的产生与发展

运筹学在商业活动与行政事务中的早期应用可追溯到几个世纪以前，但是系统的运筹学理论则起源于第二次世界大战期间。最初是英国军方为了最大限度地利用已经十分短缺的战争资源，召集了一批科学家与工程技术人员共同筹划作战物资的分配问题。英国军方的这一举动很快引起了美国军方的重视，类似的研究小组在美国三军机构中相继成立，并开发出一套相对完整的新技术，用以指导协约国方面在战略上和战术上的各种军事行动。许多诺贝尔奖金获得者都为运筹学的建立与发展做出过重要的贡献。其中，最早投入运筹学研究的诺贝尔奖金获得者是美国物理学家 Blackett。他领导了第一个以运筹学命名的研究小组。由于该小组的成员来自各个方面，既有物理学家，也有经济学家、数学家、社会学家和心理学家，因而被人们戏称为 Blackett 马戏团。由此可见，运筹学是一门应用性极强的交叉科学。

由于运筹学技术在第二次世界大战中的成功运用，它与许许多多受战争推动而产生的其他科学技术一样，在战争结束后立即引起了民间组织和商业机构的浓厚兴趣。因为随着社会工业化程度的逐步提高，各种生产组织和商业机构变得越来越大，与之相关的管理决策问题也变得越来越复杂。过去那种凭直观、凭感觉、凭经验决策的方式已几乎不再可能。企业家们迫切需要一种定量分析的技术来帮助他们正确处理日益复杂的经济决策问题。于是运筹学技术很快被运用到了民间组织和商业机构的管理决策当中，且由于其影响之大、应用之广，以至于在民间应用的特定环境中，运筹学这一带有军事色彩的专业术语被代之以管理科学这一颇具现代气息的新名词。

1.2　运筹学的科学性与艺术性

运筹学理论和方法建立在人类认识和人类活动的基础之上，反映了人类分析和处理事物的思辩过程。因此，运筹学既是一门科学，又是一门艺术。

作为科学，运筹学必须在科学方法论的指导下进行科学探索。其工作步骤包括：

(1)确定问题。目标、约束、变量和参数。

(2)建立模型。目标、约束、变量和参数之间的关系。

(3)求解模型。最优解、有效解和满意解。

(4)解的检验。正确性、有效性和稳定性。

(5)解的控制。灵敏度分析。

(6)解的实施。解释、培训和监测。

作为艺术,运筹学涉及决策者的社会环境、心理作用、主观意愿和工作经验等多方面的因素,而这些因素又大都具有模糊特征与动态性质。为了有效地应用运筹学,前英国运筹学学会会长托姆林森提出以下原则:

(1)合伙原则。运筹学工作者与管理工作者相结合。

(2)催化原则。多学科协作,打破常规。

(3)渗透原则。跨部门、跨行业联合。

(4)独立原则。不受某人或某部门的特殊政策所左右。

(5)宽容原则。广开思路,兼容并蓄。

(6)平衡原则。平衡矛盾,平衡关系。

1.3 运筹学的方法论

模型是运筹学研究客观现实的工具和手段。常见的模型有以下 3 种基本形式。

(1)思维模型。它是研究者对于某种事物的想象或者概念性的描述,譬如公司主管头脑中对于公司未来市场的规划。这虽然不是一种精确、具体、可见的形式,但通常是其他模型的渊源。

(2)物理模型。它可以是一个与实物同等尺寸、或者被放大、或者被缩小、或者被简化的几何模型,用以形象地表现和演示被研究的对象;它也可以是一些图表,用以说明事物的流程。

(3)数学模型。它是采用数学符号来精确描述实际事物中的变动因素和因素间的相互关系。

构造模型是一种创造性劳动,成功的模型往往是科学和艺术的结晶。建模的方法和思路有以下 4 种。

(1)直接分析法。根据研究者对问题内在机理的认识直接构造模型,并利用已知的算法对问题求解与分析。如线性规划模型、动态规划模型、排队模型、存储模型和决策与对策模型等等。

(2)类比法。模仿类似问题的结构性质建立模型并进行类比分析。如物理系统、化学系统、信息系统和经济系统之间都有某些相通的地方,因而可互相借鉴。

(3)统计分析法。尽管机理未明,但可根据历史资料或实验结果运用统计分析方法建模。

(4)逻辑推理法。利用知识和经验对事物的变化过程进行逻辑推理来构造模型。

1.4　数学模型与定量分析

数学模型是3种常见模型中最抽象、最复杂的模型，它反映的是事物的本质。数学模型的一般形式可以写为：

$$\text{目标的评价准则} \quad U = f(x_i, y_j, \xi_k)$$
$$\text{约束条件} \quad g(x_i, y_j, \xi_k) \geqslant 0$$

式中：x_i 为可控变量；y_j 为已知参数；ξ_k 为不确定性因素。

目标的评价准则一般要求达到最佳(最大或最小)、适中、满意等。准则可以是单一的，也可以是多个的。约束条件可以有许多，也可以一个没有。如果 g 为等式，即为平衡条件。当模型中没有不确定性因素时，称之为确定性模型；如果不确定性因素是随机因素，则为随机模型；如果是模糊因素，则为模糊模型；如果既有随机因素又有模糊因素，则为模糊随机模型。

在建立了问题的数学模型之后，如何求解模型是运筹学的另一个关键所在。运筹学的进步有赖于定量分析技术的应用与发展，尤其是近年来计算机技术的迅速提高，各种管理决策方面的应用性软件相继推出，使决策者得以借助于计算机对复杂的实际问题进行定量分析，大大改进了定量技术的有效性。

必须指出的是，在应用数学模型和定量分析技术的时候应该十分小心。因为实际问题通常是复杂的，它包含着许许多多数字的和非数字的有用信息。在数学模型的量化与抽象过程中，很容易由于理想化而偏离实际情况并失去代表性。

第2章 线性规划

线性规划(Linear Programming, 简记 LP)是运筹学的一个重要分支。自 1947 年美国数学家 G.B.Dantzig 提出了求解一般线性规划问题的单纯形方法之后,已被广泛应用于现代工业、农业、交通运输、军事和经济等各种决策领域,成为科学管理的重要手段之一。

2.1 线性规划的数学模型

本节用一些具体例子来说明线性规划研究的对象,并给出线性规划的一般数学模式。

例 2.1(生产计划问题) 某化工厂在计划期内拟安排生产Ⅰ、Ⅱ两种产品,已知其市场需求量和单位利润及原材料的消耗量如表 2-1 所示。问应如何安排生产计划以使该工厂的获利最多?

表 2-1

		原材料消耗/t			产品利润/(千元·t^{-1})	产品需求量/t
		A	B	C		
产品	Ⅰ	10	6	8	5	≤30
	Ⅱ	5	20	15	7	≥10
原材料最大供应量/t		600	500	800		

解 该问题可以用以下的数学模型来描述:设 x_1、x_2 分别表示产品Ⅰ、Ⅱ的产量,则工厂追求的目标(Objective)可写成利润函数:

$$Z = 5x_1 + 7x_2 \rightarrow \max$$

式中:符号 max 表示对利润函数 Z 求极大值。目标追求所受到的限制(Restrict)来自原材料供应和产品需求两个方面,分别表示为:

$$\begin{aligned} 10x_1 + 5x_2 &\leqslant 600 \\ 6x_1 + 20x_2 &\leqslant 500 \\ 8x_1 + 15x_2 &\leqslant 800 \end{aligned} \quad \text{和} \quad \begin{aligned} x_1 &\leqslant 30 \\ x_2 &\geqslant 10 \end{aligned}$$

以上 5 个约束条件被称为显式约束条件(Explicit Constraints)。此外,考虑到变量 x_1, x_2 分别表示产品Ⅰ、Ⅱ的产量,取值范围应满足 $x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0$ 的要求,否则没有意义。这一类公理性的约束条件被称为隐式约束条件(Implicit Constraints)。综上所述,该问题的数学模型可写为:

$$\max Z = 5x_1 + 7x_2$$
$$\begin{aligned} \text{s.t. } & 10x_1 + 5x_2 \leqslant 600 \\ & 6x_1 + 20x_2 \leqslant 500 \\ & 8x_1 + 15x_2 \leqslant 800 \\ & x_1 \leqslant 30 \\ & x_2 \geqslant 10 \\ & x_1 \geqslant 0 \end{aligned}$$

由于以上数学模型解决的是规划问题，且涉及的目标函数与约束条件均为线性表示式，故被称为线性规划。

例 2.2(边角余料问题) 某纸厂生产纸卷的标准宽度为 20m。现有 3 宗订单，所要求的纸卷的宽度分别为 5、7、9m，需求量分别为 150、200、300 卷。厂家需从标准宽度的纸卷上进行切割以满足顾客的订货要求。问应如何切割以满足顾客的订购需求且使废弃的边角余料最少?

解 该问题中纸卷的可能切割方式一共有以下 6 种(见图 2-1)。

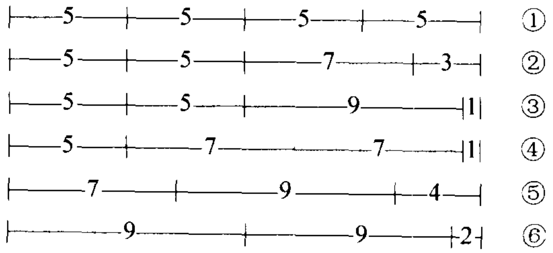

图 2-1

设 x_1、x_2、x_3、x_4、x_5、x_6 分别代表上述切割方式所采用的次数，则边角余料的总量为：

$$W = 3x_2 + x_3 + x_4 + 4x_5 + 2x_6 \rightarrow \min$$

式中：符号 min 表示对余料函数 W 求极小值。前提应满足顾客的订货要求，即

$$4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \geqslant 150$$
$$x_2 + 2x_4 + x_5 \geqslant 200$$
$$x_3 + x_5 + 2x_6 \geqslant 300$$

同时，所有变量均应大于或等于零且为整数，否则没有意义。故其线性规划的数学模型为：

$$\min W = 3x_2 + x_3 + x_4 + 4x_5 + 2x_6$$
$$\begin{aligned} \text{s.t. } & 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \geqslant 150 \\ & x_2 + 2x_4 + x_5 \geqslant 200 \\ & x_3 + x_5 + 2x_6 \geqslant 300 \\ & x_i \geqslant 0 \text{ 且为整数}, \forall i \end{aligned}$$

例 2.3(连续投资问题) 某公司考虑两种可能的连续投资计划 A 和 B。其中，计划 A 的每元投资每年可赢利 1 元；计划 B 的每元投资每 2 年可赢利 3 元。设公司在第 1 年年初拟用于投资的金额为 10 万元，问应如何安排投资计划可使该公司在第 3 年年底所收回的资金最多?

解 令 x_{ij} 表示公司在第 i 年年初投资于计划 j 中的金额，则今后 3 年可能的投资情况如表 2-2 所示。

表 2-2

时间	年初可用金额/万元	投资计划		年底收回金额/万元
		A	B	
第 1 年	10	x_{1A}	x_{1B}	$2x_{1A}$
第 2 年	$2x_{1A}$	x_{2A}	x_{2B}	$2x_{2A}+4x_{1B}$
第 3 年	$2x_{2A}+4x_{1B}$	x_{3A}		$2x_{3A}+4x_{2B}$

故该投资问题的线性规划模型为：

$$
\begin{aligned}
\max Z &= 2x_{3A} + 4x_{2B} \\
\text{s.t. } & x_{1A} + x_{1B} \leqslant 10 \\
& x_{2A} + x_{2B} \leqslant 2x_{1A} \\
& x_{3A} \leqslant 2x_{2A} + 4x_{1B} \\
& x_{ij} \geqslant 0, \forall\, i, j
\end{aligned}
$$

从以上的例题分析可以看出，建立线性规划的数学模型要求决策者必须回答 3 个问题：①变量是什么？②目标函数是什么？③约束条件是什么？其中，变量是线性规划建模的关键与基础。如果变量设计合理，便容易回答后面的两个问题；否则不易找到目标函数与约束条件的表示形式，即使勉强完成了建模，也难以理解模型的物理意义。

建立线性规划的数学模型既是学习线性规划的重点，也是学习线性规划的难点。在实际工作中，线性规划的求解过程和分析过程都可以借助于计算机来完成，但线性规划的建模过程计算机却无能为力，必须由决策者自己来完成。只有正确理解线性规划的基本原理和方法，并掌握一定的建模技巧，才能充分胜任这项工作。

一般来说，线性规划的数学模型可以写成下面的表示形式：

$$
\begin{aligned}
\max|\min Z &= c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
\text{s.t. } & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n * b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n * b_2 \\
& \qquad\vdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n * b_m \\
& x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \cdots, x_n \geqslant 0
\end{aligned}
$$

或写成缩写形式：

$$
\begin{aligned}
\max|\min Z &= \sum_{j=1}^{n} c_jx_j \\
\text{s.t. } & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j * b_i, i = 1,2,\cdots,m \\
& x_j \geqslant 0, j = 1,2,\cdots,n
\end{aligned}
$$

式中：符号 max|min 表示对目标函数求极大值或极小值，符号 * 表示算符≤，或≥，或＝，或＜，或＞。

练　　习

1. 某货轮分前、中、后3个舱位，其结构参数见表2-3。拟装运3种货物，其性能参数见表2-4。为了航运安全，要求前舱与中舱和后舱与中舱之间载重比例的偏差分别不超过15%，而前舱与后舱之间载重比例的偏差不超过10%，以保持船体的平衡。现欲制订货物的装运方案使此运输的收益达到最大，问应如何建立该问题的线性规划模型？

表 2-3

	前舱	中舱	后舱
最大载重量/t	2 000	3 000	1 500
最大容积/m^3	4 000	5 400	1 500

表 2-4

货物	数量(件)	体积/(m^3·件$^{-1}$)	重量/(t·件$^{-1}$)	运价/(元·件$^{-1}$)
A	600	10	8	1 000
B	1 000	5	6	700
C	800	7	5	600

2. 某饲养场饲养的动物每天至少需蛋白质700g，矿物质30g和维生素100mg。现有5种饲料可供选择。各种饲料每公斤营养成分含量及单价如表2-5所示。

表 2-5

饲料	蛋白质/g	矿物质/g	维生素/mg	价格/(元·kg^{-1})
1	3	1	0.5	0.2
2	2	0.3	1	0.7
3	1	0.2	0.2	0.4
4	6	2	2	0.3
5	18	0.5	0.8	0.8

现欲确定既满足动物生长的营养需要，又使费用最省的饲料选用方案。试建立该问题的线性规划模型。

3. 某公司拟采用报纸、电台和电视3种广告形式来宣传其产品，广告经费以每月1万美元为限。根据广告的制作情况，已知在报纸上刊登广告每次收费10美元；电台广告每次收费50美元；电视广告每次收费1 000美元。经验表明，报纸、电台、电视3种广告的效果比为1:5:50。由于合同原因，电视广告每月不得少于3次；电台广告被限制在每月5次以内。试就广告计划的安排问题建立线性规划的数学模型以使广告的总效果达到最大。

2.2　双变量线性规划的图解方法

对于只有两个变量的线性规划问题，可以用作图的方法来求解。下面通过实例说明图

解法的具体过程，并借此介绍线性规划的一些基本性质。

例 2.4 考虑下面的线性规划问题：

$$\max Z = 3x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.t.}\ x_1 + 2x_2 \leqslant 6$$

$$2x_1 + x_2 \leqslant 8$$

$$-x_1 + x_2 \leqslant 1$$

$$x_2 \leqslant 2$$

$$x_1, x_2 \geqslant 0$$

解 图 2-2 表明：在以 x_1、x_2 为坐标轴的直角坐标系中，线性规划的每个约束条件都代表一个半平面。由所有约束条件交成的阴影部分被称为线性规划的可行域，记为 S。可行域中的每一个点都是这个线性规划问题的解，称为可行解。由可行域的顶点给出的解被称为可行基本解。目标函数 Z 在这个坐标平面上表示以 x 为参数的一族平行线，位于同一直线上的点都具有相同的目标函数值，因而被称为等值线。当 Z 值由小变大时，目标直线沿其法线方向向右上方移动。当移动到 C 点时，目标函数在可行域边界上实现最大化，故 C 点是对应问题的最优解。由于 C 点是约束直线①和②的交点，求解下面的二元一次方程组：

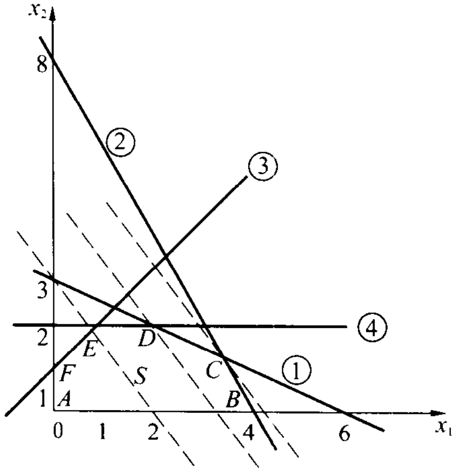

图 2-2

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 6 \\ 2x_1 + x_2 = 8 \end{cases}$$

可得：$x_1 = \dfrac{10}{3}, x_2 = \dfrac{4}{3}, Z = \dfrac{38}{3}$。

图解法虽然直观简便，但只适用于两个变量的情形。从上述图解过程中不难看出，当线性规划问题的可行域非空时，它是有界或无界凸多边形。如果线性规划问题存在最优解，它一定在可行域的某个顶点得到。由于顶点的数目是有限的，因此求解线性规划最朴素的方法便是所谓的穷举法，即比较全部顶点上目标函数的值，选出其中的最大者即为最优解。如例 2.4 的可行域中一共有 6 个顶点：A, B, C, D, E, F，对应的目标值分别为：0，12，38/12，10，7，2。显然，顶点 C 给出问题的最优解。

但是，穷举法只有理论上的意义，实际操作并不方便，当线性规划中变量的数目和约束条件的数目较大时，顶点的数目可能非常多，要逐个比较将变得相当困难。因此，有必要寻找一种既能脱开图形又能简化计算的代数方法，用以解决线性规划的一般问题。为此，在下一节先讨论线性规划的标准形式。