高等學校教學用書

高等數學教程

第三卷　第一分册

В. И. СМИРНОВ 著

北京大學數學力學系代數教研室譯

高等教育出版社

高等學校教學用書

高等數學教程

第三卷　第一分册

B. И. 斯米爾諾夫著
北京大學數學力學系代數教研室譯

高等教育出版社

本書係根據國立技術理論書籍出版社(Государственное издательство технико—теоретической литературы)出版的斯米爾諾夫(В. И. Смирнов)著"高等數學教程"(Курс высшей математики)第三卷第一分册1951年第二版譯出。原書經蘇聯高等教育部審定為綜合大學數理系教學參考書。

本書由北京大學數學力學系代數教研室負責翻譯。

本書第一卷第一、二分册；第二卷第一、二、三分册；第三卷第二、三分册由商務印書館出版，第三卷第一分册改由本社出版。

高 等 數 學 教 程

第三卷 第一分册 書號66(課62)

斯 米 爾 諾 夫 著

北京大學數學力學系代數教研室譯

高 等 教 育 出 版 社 出 版

北京琉璃廠一七〇號

(北京市書刊出版業營業許可證出字第〇五四號)

新 華 書 店 總 經 售

商 務 印 書 館 印 刷 廠 印 刷

上海天通庵路一九〇號

開本787×1092 1/25 印張11 3.5/12.5 字數 279,000

一九五四年九月上海第一版 印數1—10,000

一九五四年九月上海第一次印刷 定價¥13,100

第四版序言

在這一版中，由於補充了新的材料，第三卷分成兩部份。第一部份包括全部關於線性代數，二次型理論和羣論的材料。在這一部份中主要的補充是關於羣論的。在編寫這些補充材料的過程中，Л.К.法捷耶夫給了我很大的幫助。特別是關於轉動羣與勞倫次羣單純性的闡明，按結構常數來建立羣與羣上的積分[70, 81, 87, 88, 89, 90]這些部份的材料的說明是屬於他的。對於他在這本書的準備工作中所給予的幫助我表示極大的謝意。

В.И. 斯米爾諾夫

第一分册目次

高等數學教程

第一章　行列式與方程組的解法

§1．行列式及其性質

1．行列式的概念　我們從解一個簡單的代數問題，即從解一次方程組的問題來開始這一節。由於對這種問題的研究，我們獲得了行列式的重要概念。

讓我們從研究一些最簡單的特殊情形來開始。先取具有兩個未知數的兩個方程所成的方程組：

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1,$$

$$a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2。$$

未知數的係數 a_{ik} 帶有兩個指標，第一個指標說明這個係數出現在那一個方程中，而第二個說明它是那一個未知數的係數。

大家知道，這方程組的解具有下面的形式：

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}。$$

再看由具有三個未知數的三個方程所成的方程組：

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1,$$

$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2,$$

$$a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3,$$

這裏我們仍用上面的關於係數的標記法，將頭兩個方程改寫成下列形式：

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1-a_{13}x_3,$$

$$a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2-a_{23}x_3。$$

按上面的公式,由這兩個方程解未知數 x_1 與 x_2, 卽得

$$x_1=\frac{(b_1-a_{13}x_3)a_{22}-a_{12}(b_2-a_{23}x_3)}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},$$

$$x_2=\frac{a_{11}(b_2-a_{23}x_3)-(b_1-a_{13}x_3)a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}。$$

把這兩個表達式代入方程組的最後一個方程中,卽得一個僅含未知數 x_3 的方程。最後解這個方程,卽得 x_3 的最終表達式:

(1)

$$x_3=\frac{a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-a_{11}b_2a_{32}-a_{12}a_{21}b_3-b_1a_{22}a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}}。$$

我們來詳細地研究一下這表達式的結構。首先看到,將分母中的關於所要確定的未知數 x_3 的所有係數 a_{i3} 各用常數項 b_i 替換卽得分子。這樣,還待闡明的只是組成分母的規律了。分母不含有常數項而是純粹由方程組的係數組成的。先讓我們把這些係數按它們在原來方程組中的位置寫成一個正方形的表:

(2)

$$\left\|\begin{matrix}a_{11}, & a_{12}, & a_{13}\\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}\\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}\end{matrix}\right\|。$$

這個表含有三行與三列。a_{ik} 這些數叫做它的元素。a_{ik} 的第一個指標表示它所在的行的序數而第二個則表示它所在的列的序數。現在寫出(1)式的分母:

(3)

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}。$$

我們看到,它是由六項組成的,其中每一項是(2)中的三個元素的乘積,而且每個乘積含有每一行和每一列的元素。實際上,這些乘積具有下面的形式:

(4)

$$a_{1p}a_{2q}a_{3r},$$

其中 p, q, r 是整數 1, 2, 3 的某一個一定的排列。如此，正如幾個第一個指標一樣，幾個第二個指標也正是整數 1, 2, 3 的全體，因而乘積(4)確實含有每行和每列的一個元素。爲要得到(3)式中的所有的項，只需要在乘積(4)中就第二個指標 p, q, r 取所有可能的不同的排列。第二個指標的所有可能的排列顯然有以下六種：

(5)　1, 2, 3;　2, 3, 1;　3, 1, 2;　1, 3, 2;　2, 1, 3;　3, 2, 1。

由是，我們卽得(3)式的六項。但是我們看到，乘積(4)在(3)式中出現時，有一些帶有正號，而另一些則帶有負號。於是只剩下要說明選擇符號所依據的法則了。如我們所見，帶有正號出現的那些乘積(4)的第二個指標形成下列的排列：

(5_1)　1, 2, 3;　2, 3, 1;　3, 1, 2。

而帶有負號出現的那些乘積的第二個指標形成下列排列：

(5_2)　1, 3, 2;　2, 1, 3;　3, 2, 1。

現在來說明排列(5_1)與排列(5_2)的區別。在一個排列中，比較每一對數，如果大的在小的前面，則叫做一個逆序。我們來計算(5_1)中諸排列的逆序個數。其中第一個排列沒有逆序，就是說逆序的個數爲零。再看第二個排列，逐次比較每一數與其後各數的大小，我們看出，這裏有兩個逆序。卽一個是 2 在 1 前面，一個是 3 在 1 前面。同樣，不難看到，(5_1)中的第三個排列含有兩個逆序。總之，可以說在(5_1)中的所有排列都含有偶數個逆序。用完全同樣方法來研究(5_2)中的排列，我們看到，它們都含有奇數個逆序。現在，我們可以把表達式(3)中的符號法則述敍如下：乘積(4)中，凡是第二指標形成的排列中逆序數是偶數的，出現在表達式(3)中時，沒有任何改變。凡是第二指標形成的排列中逆序數爲奇數的，出現在表達式(3)中時，冠以負號。表達式(3)叫做對應於數表(2)的三級行列式。現在不難把它推廣到任意級行列式的情形。

假定有 n^2 個數被安排在一個 n 行 n 列的正方形的表內：

$$(6)\qquad \left\|\begin{matrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \cdots, & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \cdots, & a_{nn} \end{matrix}\right\|。$$

這個表內的元素 a_{ik} 是給定的複數，而 i 與 k 分別表示元素 a_{ik} 所在的行與列的序數。從數表（6）組成所有可能的這樣的乘積，使得這些乘積恰好含有每行和每列的一個元素，這些乘積具有下面的形式：

$$(7)\qquad a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

其中 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 是數 $1, 2, \cdots, n$ 的某一個排列。爲了要得到所有可能的形式(7)的乘積，我們需要取第二個指標的所有可能的排列。從初等代數得知，這樣的排列的總數等於整數 n 的階乘：

$$1\cdot2\cdot3\cdots n=n!$$

每個這樣的排列，與基本排列

$$1, 2, 3, \cdots, n$$

來比較，就有一些逆序。

所有那些乘積(7)，如果由它們的第二指標所成的排列含有偶數個逆序，則不加任何改變，而所有那些乘積（7），如由它們的第二指標所成的排列含有奇數個逆序，則加上一個負號。這樣得到的所有乘積的和就叫做對應於表(6)的 n-級行列式。這個和顯然含有 $n!$ 項。我們不難將這個定義用公式表出來。爲此須引進一些符號。令 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 爲數 $1, 2, \cdots, n$ 的某一個排列。用符號

$$[p_1, p_2, \cdots, p_n]$$

來記這個排列所含的逆序的個數。

於是，以上所給的對應於表（6）的行列式的定義可寫成下面的公式，我們把表（6）用兩根豎線夾起來作爲行列式的記號：

$$(8)\qquad \left|\begin{matrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \cdots, & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \cdots, & a_{nn} \end{matrix}\right| = \sum_{(p_1, p_2, \cdots, p_n)} (-1)^{[p_1, p_2, \cdots, p_n]} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}。$$

等式右端要對第二個指標的所有可能的排列取和，也就是對所有可能的排列$(p_1, p_2, \cdots, p_n)$取和。如果我們只談表的本身，而不是講由它構成的行列式，就把這表寫在兩雙豎線之間。

須注意到，在（3）式中的每個乘積中我們是把它的因子就這樣的次序安排的，使得第一個指標恆組成基本排列 1，2，3，因此所有我們的考慮都祇涉及到由第二個指標所形成的排列。與此相反，我們也可以把每個乘積中的因子重新安排，使得第二個指標都按上昇的次序；此時，（3）式可換寫成下面的形式：

（9）$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{31}a_{12}a_{23}+a_{21}a_{32}a_{13}-a_{11}a_{32}a_{23}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{31}a_{22}a_{13}$。

這裏第一個指標取所有可能的排列p、q、r，而且容易驗證，(9)式各項的符號法則可用與前面完全同樣的說法表述出來，只不過就第一個指標來說罷了。這就引導我們與和（8）同時來考察下面這個類似的和：

(10)
$$\sum_{(p_1, p_2, \cdots, p_n)} (-1)^{[p_1, p_2, \cdots, p_n]} a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}。$$

顯然，這個和是由與（8）同樣的那些項所組成。以後我們會看到，它的項的符號法則也是與在和（8）中相同的。那就是說，與$n=3$的情形一樣，和(10)與和（8）是全同的。

最後，再回到$n=2$的情形。此時表取形式

$$\begin{Vmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{Vmatrix}$$

並且公式（8）給予一個與此表對應的二級行列式的表達式：

(11)
$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}。$$

由上面直接可知，為要闡明行列式的性質，必須對排列的性質有較深的認識。我們立即轉向這個問題。

2. 排列　假設有任意的n個元素，把它們按一定的次序排列起

來,我們把這叫做由這 n 個元素形成的一個排列。首先我們來證明,這樣的不同的排列恰有 $n!$ 個。當 $n=2$ 時,這是顯然的,因爲兩個元素可以形成兩個不同的排列。當 $n=3$ 時,這只要數一下排列(5)的個數卽可直接推知,那裏的數 1, 2, 3 就是元素。不難知道,(5)已給出了由三個元素而成的所有可能的排列。現在用歸納法來證明我們的論斷對於任何的正整數 n 總是對的。假定我們的論斷對某一個 n 成立,由此來證明它對於 $n+1$ 個元素也成立。就是說,假定 n 個元素產生 $n!$ 個排列,讓我們來考慮任何的 $n+1$ 個元素產生的排列,把這 $n+1$ 個元素記作:

$$C_1,\ C_2,\cdots,\ C_{n+1}\,。$$

首先注意第一個元素爲 C_1 的那些排列。爲了要得到所有可能的這樣的排列,應當把 C_1 放在第一個位置,然後寫下其餘 n 個元素的所有可能的排列。按照假定這樣的排列的個數是 $n!$。因此,由 $C_1, C_2,\cdots, C_{n+1}$ 形成的以元素 C_1 爲首的排列總數是 $n!$。完全一樣,由 $C_1, C_2,\cdots, C_{n+1}$ 形成的以元素 C_2 爲首的排列總數也是 $n!$。總的說來,$C_1, C_2,\cdots, C_{n+1}$ 的不同排列總數等於

$$n!(n+1)=1\cdot2\cdots n\cdot(n+1)=(n+1)!,$$

這樣,就證明了以上的論斷。

當然,我們可以把從 1 開始的一些整數取作元素,以後我們就這樣來做。在一個排列中對調兩個元素的位置,這樣一個動作就叫做一個對換。顯然可直接看出,由某一個排列經過一些對換可以得到任何一個其他的排列。例如,取四個元素的兩個排列

$$1, 3, 4, 2;\quad 2, 4, 1, 3\,。$$

由這裏第一個排列經下列一串對換就得到第二個排列:

$$1, 3, 4, 2\rightarrow2, 3, 4, 1\rightarrow2, 4, 3, 1\rightarrow2, 4, 1, 3\,。$$

爲了把第一個排列變成第二個排列,這裏我們用了三個對換。如果我們換個方式來施行對換,也可能由其他的方法利用對換把第一個排

列變成第二個排列，換句話說，就是把第一個排列變成第二個排列所需要的對換的個數並不是一個確定的數。雖然可以用不同數目的對換把一個排列變成另一個排列。但是對我們重要的是可以證明，對於兩個給定的排列。這些不同的數目或者全是偶數或者全是奇數。這也就是說這些數目總是有同一的奇偶性，爲了說明這一點，我們引進在前一小節用過的逆序的概念。試看由 n 個元素 $1, 2, \cdots, n$ 形成的排列。按照遞昇的次序排列起來的排列

$$(12)\qquad 1, 2, \cdots, n,$$

叫做基本排列。如果一個排列中的兩個元素的相互次序是與它們在基本排列(12)中的相互次序相反就是說大的在小的左邊，這就叫做該排列中的一個逆序。凡逆序的數目爲偶數的排列叫做第一類排列，而逆序數目爲奇數的排列叫做第二類排列。下面這個定理對以下的論述來講是基本的。

由一個對換而引起的逆序數目的改變是一個奇數。

取定某一個排列

$$(13)\qquad a, b, \cdots, k, \cdots, p, \cdots, s,$$

並且假設，我們把 k 與 p 的對換施於這個排列，就是說對調這兩個元素相互的位置。經過這樣的對換之後，元素 k 與 p 對於在 k 之左或在 p 之右的元素的相互位置保持不變。只有這排列中介於 k 與 p 之間的那些元素與 k, p 的相互位置有所改變，當然 k 與 p 的彼此相互位置也有所改變。我們來計算逆序改變的總數。假設在排列(13)中 k 與 p 之間總共有 m 個元素，並且設這些中間元素與 k 比較得到 α 個順序與 β 個逆序，又設它們與 p 比較得到 α_1 個順序與 β_1 個逆序，顯然有

$$(14)\qquad \alpha+\beta=\alpha_1+\beta_2=m。$$

施行對換的結果，順序變成逆序而且逆序變成順序。更確切地說，如果元素 k 與某一個中間元素在對換前它是順序，則在對換後就變成逆序，而且反過來也對，對於元素 p 也是一樣。因此，k 與 p 對於中間

元素的逆序數目在施用對換之前總共是 $\beta+\beta_1$ 而在對換之後，總共是 $\alpha+\alpha_1$，就是説逆序數的改變是

$$\gamma=(\alpha+\alpha_1)-(\beta+\beta_1)。$$

利用(14)，這個數目可改寫成

$$\gamma=(\alpha+\alpha_1)-(m-\alpha+m-\alpha_1)=2(\alpha+\alpha_1-m),$$

由此直接推出，這個數 γ 是一個偶數。現在來看元素 k 與 p 的相互位置。如果在對換之前它們作成一個順序，則在對換之後它們作成一個逆序，而且反過來也對，這就是說，這裏的逆序數的改變等於 1。因此，由於對換而引起的逆序改變的總數是一個奇數。

現在來敍述從這定理所得到的一些推論。

系 I. 如果寫出全部 $n!$ 個排列，並且對於每一個排列施以兩個固定元素的對換，例如 1 與 3 的對換，則全部第一類排列都變成第二類排列，反過來也是如此，總的說來，我們仍然得到 $n!$ 個排列的全體。由此直接推出，第一類與第二類排列的數目相等。

系 II. 任何一個排列都可以由基本排列經過一些對換得到。從上面定理直接推出，凡由基本排列可用偶數個對換得到的那些排列作成第一類，而凡由基本排列可用奇數個對換得到的那些排列則作成第二類。

系 III. 基本排列的選擇完全可以任意。不用排列(12)而用其他任何一個排列作爲基本排列都是可以的，在這情況下，規定逆序時，自然就應當以該排列與這個基本排列比較，就是說，應當以元素在基本排列中的次序爲根據。不難看出，如果我們取第一類中任何一個排列以代替排列(12)作爲基本排列，則原來屬於第一類的排列現在依然屬於第一類，而原來屬於第二類的現在依然屬於第二類。反之，如果我們取第二類中任何一個排列作爲基本排列，則原來第二類的排列成爲現在的第一類的排列而第一類的排列成爲第二類的排列。

例如，在元素 1, 2, 3 的六個排列中，我們可以取排列 2, 1, 3 作爲

基本排列，則下列排列是第一類排列：

$$2,1,3;\quad 1,3,2;\quad 3,2,1。$$

其中的第二個排列有兩個逆序；1在2前與3在2前，而在基本排列中2在1前且2在3前。下列的排列是第二類排列：

$$1,2,3;\quad 2,3,1;\quad 3,1,2。$$

其中的第一個排列與基本排列2，1，3比較有一個逆序，即1在2前。

根據以上所講的，我們可以把表達式（8）中的符號法則敍述如下：如果一個乘積的因子的第二個指標所作成的排列屬於第一類，則在這乘積之前冠以正號，如果屬於第二類，則在它的前面冠以負號，這裏是把排列 $1,2,\cdots,n$ 作爲基本排列的。

現在我們來闡明行列式的一個基本性質。在給出行列式的那個表中將第一二兩列對調。原來用 a_{ik} 所記的數，調換後仍然用帶有同一指標的同一文字來表示。於是，從表（6）我們得到下面的表：

$$(15)\qquad \left\|\begin{matrix} a_{12}, & a_{11}, & a_{13},\cdots, a_{1n} \\ a_{22}, & a_{21}, & a_{23},\cdots, a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_{n2}, & a_{n1}, & a_{n3},\cdots, a_{nn} \end{matrix}\right\|。$$

根據由公式（8）所規定的行列式的定義，我們可以求得對應於表（15）的行列式。在這個表中的列的號碼排列如下：$2,1,3,\cdots,n$，於是我們應當把這個排列看作基本排列。它是由原來的基本排列用一個對換而得到的，因此，它原來是屬於第二類的。所以原來的第二類排列對於這個新的基本排列而言成了第一類的排列而且反過來也是如此。因此，對應於表（15）的行列式就是在公式（8）中出現的那些項的一個和，但是，由於剛才談到的第二指標所作成的排列的類的變更，這個新和的各項的符號與和（8）中相當項的符號相反，就是說，當兩列對調時，行列式的值改號。對一二兩列對調的情形我們已經證明了這個性質。對於任意兩列對調的情形上述的證明也仍然適用，例如，下面的等式成立：

$$\begin{vmatrix}1, & 0, & 3\\2, & 7, & 6\\5, & 3, & 0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1, & 3, & 0\\2, & 6, & 7\\5, & 0, & 3\end{vmatrix}。$$

第二個行列式是由第一個經二三兩列對調而得到的。

現在再說明行列式的一個性質。取定和(8)中的某一項

(16₁)　$$(-1)^{[p_1,p_2,\cdots,p_n]}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}。$$

祇要調換上面乘積中的因子,我們可以得到第二個指標的遞昇排列,這時第一個指標形成某個排列 $q_1, q_2, \cdots, q_n$,上式就可以寫成

(16₂)　$$(-1)^{[p_1,p_2,\cdots,p_n]}a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn}。$$

從(16₁)到(16₂)的過程可以藉一些因子間的對換來完成。每一個這樣的對換不僅是第一個指標所成的排列的對換同時也是第二個指標所成的排列的對換。如果從(16₁)過渡到(16₂)所需要的對換的個數是偶數,則由此可以推得,排列 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 屬於第一類。因為它既然可藉偶數個對換變成基本排列 $1, 2, \cdots, n$,顯然可知,它也可藉偶數個對換從基本排列得到。而且,此時排列 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 也屬於第一類,因為它是藉同樣的偶數個對換可從基本排列得到的。由同樣的理由,如果 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 屬於第二類,則 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 也屬於第二類。由此推出,

$$(-1)^{[p_1,p_2,\cdots,p_n]}=(-1)^{[q_1,q_2,\cdots,q_n]},$$

因此我們有

$$(-1)^{[p_1,p_2,\cdots,p_n]}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}=(-1)^{[q_1,q_2,\cdots,q_n]}a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn}。$$

總之,如果我們比較和(8)與和(10)的對應項,則可看出,這兩個和恰好全同,在和(10)中行所起的作用正如在和(8)中列所起的作用。由我們的討論直接推得,如果在表中所有的行用列代替而且所有的列用行代替,但不改變它們的次序,則此表的行列式的值不變。

例如,下列兩個三級行列式相等:

$$\begin{vmatrix}2, & 3, & 5\\7, & 0, & 1\\2, & 1, & 6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2, & 7, & 2\\3, & 0, & 1\\5, & 1, & 6\end{vmatrix}。$$

3. 行列式的基本性質　I. 首先敍述剛才證明過的性質——當用列替代行時，行列式的值不變。以後凡對於列已經證明了的一切結果對於行都也適用而且反過來也對。

II. 在前一小節中我們看出，兩列互換祇改變行列式的符號。這對於行也是一樣，就是說，兩行(列)互換，行列式的值祇改變它的符號。

III. 如果行列式具有兩相同的行，則當它們互換之後，一方面行列式沒有什麽改變，另一方面，根據 II，行列式改變符號，那就是說，如用 Δ 表行列式的值，遂有 $\Delta=-\Delta$ 卽 $\Delta=0$。總之，如果行列式有兩行(或列)相同，則它的值等於零。

IV. 變數 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的沒有常數項的一次多項式叫做這些變數的線性齊次函數，就是說它可以表成下面的形式：

$$\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n,$$

其中係數 a_i 與 x_s 無關。這樣的函數具有下面兩個很明顯的性質：

$$\varphi(kx_1, kx_2, \cdots, kx_n)=k\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

$$\varphi(x_1+y_1, x_2+y_2, \cdots, x_n+y_n)=\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)+\varphi(y_1, y_2, \cdots, y_n)。$$

後一個性質對於任意多組變數的和也成立。現在回到公式(8)，我們看到，和式(8)中每一項恰好含有每一行的一個元素作爲它的因子。由此得出，行列式是任何一行(或任何一列)的元素的線性齊次函數。

因此，如果某一行(列)的所有元素含有一個公共因子，則可把它提到行列式的記號之外。

對應於表(6)的行列式的值常常記作如我們已經提到過的形式：

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \cdots, & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \cdots, & a_{nn} \end{vmatrix}$$

或者簡記作：

$$|a_{ik}| \qquad (i, k=1, 2, \cdots, n)。$$

上述的性質對於特殊情形可寫成，例如，下面的形式