

高等学校测绘类系列教材

# 大地测量学基础

孔祥元 郭际明 刘宗泉 编

武汉大学出版社



P22  
K-897

高等学校测绘类系列教材

# 大地测量学基础

孔祥元 郭际明 刘宗泉 编

武汉大学出版社

## 图书在版编目(CIP)数据

大地测量学基础/孔祥元,郭际明,刘宗泉编. —武汉:武汉大学出版社,  
2001.9

高等学校测绘类系列教材

ISBN 7-307-03332-1

I. 大… II. ①孔… ②郭… ③刘… III. 大地测量学 IV. P22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 058259 号

责任编辑:徐方      责任校对:叶效      版式设计:支笛

---

出版:武汉大学出版社 (430072 武昌 珞珈山)

(电子邮件:wdp4@whu.edu.cn 网址:www.wdp.whu.edu.cn)

发行:新华书店湖北发行所

印刷:华中科技大学印刷厂

开本:787×1092 1/16      印张:17.125      字数:409千字

版次:2001年9月第1版      2001年9月第1次印刷

ISBN 7-307-03332-1/P·23      定价:26.00元

---

版权所有,不得翻印;凡购我社的图书,如有缺页、倒页、脱页等质量问题者,请与当地图书销售部门联系调换。

## 内 容 提 要

本书系统而扼要地介绍了大地测量学的基本概念、基本理论以及基本的技术与方法。全书共五章，内容包括：大地测量学的现代发展，地球重力场及地球形状的基本理论，地球椭球及其数学投影变换，大地测量参考系以及大地测量的基本技术与方法等。本书内容宽厚，体系完整，不仅概述了大地测量学的基本经典理论，而且也反映了现代发展成就。

本书是高等学校测绘工程专业本科教材，也可供相关专业师生及从事科研与生产的技术人员参考。

# 前 言

本书是根据全国测绘教学指导委员会关于编写测绘工程专业系列基础教材计划和武汉大学测绘科学与技术学院测绘工程专业现行教学大纲和教学计划，专门为测绘工程专业本科学生编写的教材，也可作为相关专业本科教学用书。可供从事测绘及相关专业工作的科学技术人员参考。

大地测量学是地球科学的重要分支，是测绘科学的基础学科。在测绘专业的课程设置中占有重要的地位和作用。它的主要内容是研究地球形状、大小和外部重力场以及地面点的精确定位。本书以现代大地测量学的成就和发展为着眼点，着重阐述了关于大地测量学的基本概念、理论体系和具体方法。全书共五章。第一章侧重于阐述大地测量学中的基本概念，其中包括大地测量学的定义、体系、内容、发展简史及对未来的展望。第二、三、四章侧重于论述大地测量学的基本理论，其中包括地球重力场的基本原理；地球椭球的数学性质及其数学投影变换；大地坐标系的建立及其相互变换等。第五章侧重于叙述现代大地测量学的基本技术与方法。

本书是依据大地测量学的基本体系和内容，参考了现有的多本科学著作和教材，并吸收最新的科学技术成就编写而成的，力争在加强基础的同时，反映现代的新发展。

本书由孔祥元主编，参加编写的有郭际明、刘宗泉等。

本教材在编写过程中始终得到宁津生院士的直接指导和全国测绘教学指导委员会的关注，得到许多老师的热情帮助，他们提出了许多宝贵的意见和建议。在此谨致以衷心的感谢。对书中可能存在的错误和不足之处，恳请读者予以指正。

作 者

2001年6月于武汉

# 目 录

<b>第一章 绪 论</b> .....	1
§ 1 大地测量学的定义和作用 .....	1
§ 2 大地测量学的基本体系和内容 .....	3
§ 3 大地测量学的发展简史及展望 .....	4
<b>第二章 地球重力场及地球形状的基本理论</b> .....	15
§ 4 地球重力场的基本原理 .....	15
§ 5 水准面 大地水准面 似大地水准面 地球椭球 .....	28
§ 6 大地测量常用坐标系 .....	30
§ 7 高程系统 .....	41
§ 8 天文测量的基本知识 .....	48
§ 9 关于测定垂线偏差和大地水准面差距的基本概念 .....	52
§ 10 关于确定地球形状的基本概念 .....	57
<b>第三章 地球椭球及其数学投影变换的基本理论</b> .....	64
§ 11 地球椭球的数学性质 .....	64
§ 12 将地面观测值归算至椭球面 .....	78
§ 13 大地测量主题解算概述 .....	83
§ 14 地图数学投影变换的基本概念 .....	103
§ 15 高斯平面直角坐标系 .....	109
§ 16 通用横轴墨卡托投影 (UTM) 和高斯投影簇的概念 .....	145
§ 17 兰勃脱投影概述 .....	150
<b>第四章 大地坐标系建立及坐标换算基础</b> .....	158
§ 18 椭球定位和定向概念 .....	158
§ 19 坐标系统的类型 .....	158
§ 20 地球参心坐标系 .....	159
§ 21 地心地固坐标系 .....	164
§ 22 站心坐标系 .....	168
§ 23 坐标系换算 .....	170

<b>第五章 大地测量基本技术与方法</b> .....	176
§ 24 国家平面大地控制网建立的基本原理 .....	176
§ 25 国家高程控制网建立的基本原理 .....	195
§ 26 工程测量控制网建立的基本原理 .....	202
§ 27 大地测量的基本方法 .....	206
§ 28 大地测量数据库简介 .....	263
<b>主要参考文献</b> .....	265

# 第一章 绪 论

## §1 大地测量学的定义和作用

### 1.1 大地测量学的定义

大地测量学是一门古老而年轻的科学。它属于地球科学中的一个分支，而且是发展最活跃，最具有重要地位的一个分支。它的主要任务是测量和描绘地球并监测其变化，为人类活动提供关于地球的空间信息。因此，从本质上讲，它是一门地球信息学科，既是基础学科，又是应用学科。

经典大地测量学是把地球假设为刚体不变，均匀旋转的球体或椭球体，并在一定范围内测绘地球和研究其形状、大小及外部重力场。在这方面，经典大地测量学在理论和技术上均取得了巨大的成就，奠定了几何大地测量及物理大地测量的理论基础和实用方法，为人类社会经济发展作出了重大贡献。但从辩证唯物论的观点来看，这些都还有受时代影响的局限性，还不够完全和完善。因为无论是地球表面及外部空间，还是地球内部构造及演化，都在每时每刻地运动着和发展变化着。这种运动和变化不仅在地区和局域性范围内发生着，而且还在洲际乃至全球范围内进行着。其积累和突变将给人类赖以生存的环境空间带来巨大的影响，甚至直接涉及到社会和人类生存的安危。显然，经典大地测量技术很不适应监测地球这种动态变化的要求。直到近 30 年来，以人造地球卫星及其他空间探测器为代表的先进的空间测绘技术的发展及应用，才把传统的大地测量学推进到以空间大地测量为主要标志的现代大地测量学的新时期。现代大地测量学在许多方面发挥着重大作用。

### 1.2 大地测量学的地位和作用

1.2.1 大地测量学在国民经济各项建设和社会发展中发挥着基础先行性的重要保证作用

国民经济蓬勃发展的各项事业，比如交通运输事业（铁路、公路、航海、航空等），资源开发事业（石油、天然气、钢铁、煤炭、矿藏等），水利水电工程事业（大坝、水库、电站、堤防等），工业企业建设事业（工厂、矿山等），农业生产规划和土地管理，城市建设发展及社会信息管理等，都需要地形图作为规划、设计和发展的依据。可以说，地形图是一切经济建设规划和发展必需的基础性资料。为测制地形图首先要布设全国范围内及局域性的大地测量控制网，为取得大地点的精确坐标，必须要建立合理的大地测量坐标系以及确定地球的形状、大小及重力场参数。因此可以说，大地测量学是一切测绘科学技术的基础，在国民经济建设和社会发展中发挥着决定性的基础保证作用。



### 1.2.2 大地测量学在防灾, 减灾, 救灾及环境监测、评价与保护中发挥着独具风貌的特殊作用

地震、洪水和强热带风暴等自然灾害给人类社会带来巨大灾难和损失。地震大多数发生在板块消减带及板块内活动断裂带, 地震具有周期性, 是地球板块运动中能量积累和释放的有机过程。在我国以及日本、美国等国家都在地震带区域内建立了密集的大地测量形变监测系统, 利用 GPS 和固定及流动的甚长基线干涉 (VLBI), 激光测卫 (SLR) 站等现代大地测量手段进行自动连续监测。随着监测数据的积累和完善, 地震预报理论及技术可望有新的突破, 为人类预防地震造福。大地测量还可在山体滑坡、泥石流及雪崩等灾害监测中发挥作用。世界每年都发生各种灾难事件, 如空难、海难、陆上交通事故、恶劣环境的围困等, 国际组织已建立了救援系统, 其关键是利用 GPS 快速准确定位及卫星通讯技术, 将难事的地点及情况通告救援组织以便及时采取救援行动。

温室效应等又是人类关注的全球环境问题。对此, 科学界正密切关注海水面上升, 关注平均气温的变化, 关注对农、林业等带来的影响, 其中监测海水面变化的最有效的手段就是利用 GPS 技术将全球验潮站联测到 VLBI 及 SLR 站上, 以便根据长期监测结果, 分析海水面变化, 进而分析带来的影响。另外, 为监测沙漠、森林、洪水等, 主要的措施是发展遥感卫星, 建立动态地理信息系统 (GIS)。这也必须由大地测量来支持, 因为发射近地卫星需要精密的地球重力场模型, 发射站及跟踪站需要有准确的地心坐标, 发展地理信息系统也需要有足够的大地测量控制点作保证。

### 1.2.3 大地测量是发展空间技术和国防建设的重要保障

空间科学技术发展水平是当今衡量一个国家综合科技水平和综合国力的重要指标, 同时也是评估一个国家国防能力的重要标志。卫星、导弹、航天飞机以及其他宇宙空间探测器的发射、制导、跟踪以及返回等都必须在大地测量保障下才能得以实现。这种保障主要体现在, 要有一个精确的地球参考框架 (指惯性坐标系及地心地固坐标系) 及一个精密的全球重力场模型。前者用于描述空间飞行器在参考框架内的相对运动, 后者用于对地球表面及其外空间一切飞行体的分析及设计力学行为的先验重力场约束。地球参考框架主要是由一定量的已知精确坐标的基准点及由四个基本参数 (长半轴  $a$ , 地球重力场二阶正常带谐系数  $J_2$ , 地球自转角速度  $\omega$  及地球引力常数与其质量乘积  $GM$ ) 决定的正常地球椭球, 并实现它的定位和定向。地球重力场模型位展开系数是卫星轨道动力学方程中的决定性参数。从古代战争到现代战争以及未来战争, 都需要相应的军事测绘作保障, 这主要表现在超前储备保障和动态实时保障。比如战争区域的电子地图, 数字地图或数字地形信息库, 打击目标的精确三维坐标及区域场景的数字影像地图等, 都是现代战争必不可少的测绘文件。而这些测绘资料都是依赖于大地测量技术直接或间接参与而取得的。大地测量历来都与军事结有不解之缘, 是现代战争赢得首战必胜的重要技术保障。

### 1.2.4 大地测量在当代地球科学研究中的地位显得越来越重要

利用卫星测高和重力测量数据结合地球物理资料, 更精确地查清了许多海地板块边界分布情况, 监测海平面变化和以更高的分辨率确定海面地形; 利用卫星重力测量及陆、海的大规模的重力测量提供更准确的重力场模型; VLBI 及 SLR 能以  $1\text{mm/a}$  的速度分辨率精确测定板块相对运动, 能以前所未有的空间分辨率和时间分辨率测定全球、区域或局部的地壳运动, 为解释板块内的断裂作用、地震活动以及其他构造过程提供依据等。总之, 大

地测量能以其本身的独特的理论体系和测量手段,提供有关地球动力过程中时空度量上的定量和定性信息,与其他地学学科一起,共同揭示地球的奥秘。

此外,大地测量学是测绘学科的各分支学科(其中包括大地测量,工程测量,海洋测量,矿山测量,航空摄影测量与遥感,制图及地理信息等)的基础科学,大地测量学的基础理论、手段和方法为测绘学科的发展奠定了坚实的基础,提供了先决条件。大地测量学的发展极大地影响和规定着测绘科学学科的发展。因此,凡从事测绘及相关工作的科技人员都应具备坚实的大地测量学基本知识。

## § 2 大地测量学的基本体系和内容

### 2.1 大地测量学的基本体系

很久以来,人们把测量学划分为两个分支:测量学和大地测量学。测量学研究范围是不大的地球表面,以至于在这个范围内把地球表面认为是平面且不损害测量精度,计算时也认为在该范围内的铅垂线彼此是平行的。大地测量学是研究全球或相当大范围内的地球,在该范围内,铅垂线被认为彼此不平行,同时必须顾及地球的形状及重力场。之所以顾及地球重力场是因为地球重力对研究地球形状,对高精度测量及其数据处理都起到不可忽略的重要作用。

常规大地测量学经过不断发展和完善,已形成了完整的体系。主要包括:以研究建立国家大地测量控制网为中心内容的应用大地测量学;以研究坐标系建立及地球椭球性质以及投影数学变换为主要内容的椭球大地测量学;以研究测量天文经度、纬度及天文方位角为中心内容的大地天文测量学;以研究重力场及重力测量方法为中心内容的大地重力测量学,以及以研究大地测量控制网平差计算为主要内容的测量平差等。

大地测量学的发展还与一系列相关学科的发展有着密切的关系。特别是电子学和空间科学的发展,电子计算机、人造地球卫星以及声纳等先进科学技术的出现,使得大地测量学同其他学科相结合出现了许多新的研究方向和分支,极大地发展和丰富了常规大地测量的内容和体系。比如,大地测量学同无线电电子学相结合产生了电磁波测距大地测量学;与天体力学及天文学结合产生了宇宙大地测量学,其中包括月球及行星大地测量学;与海洋地质学及海洋导航学结合形成了海洋大地测量学;与地球物理、海洋地质学及地质学相结合形成了地球动力学;与人造地球卫星学及天体力学相结合形成了卫星大地测量学;以惯性原理为基础,利用加速度计测量运动物体某方向加速度,通过计算机积分计算而得到运动物体空间位置的惯性大地测量学;与线性代数、矩阵、概率统计及优化设计、数值计算方法等相结合形成现代大地测量数据处理学等。以上这些新的方向和分支充分地说明了大地测量学已从传统的大地测量学进入到现代大地测量学的新时期。

综上所述,我们可把现代大地测量学归纳为由以下三个基本分支为主所构成的基本体系。这三个基本分支是:几何大地测量学、物理大地测量学及空间大地测量学。

几何大地测量学亦即天文大地测量学。它的基本任务是确定地球的形状和大小及确定地面点的几何位置。主要内容是关于国家大地测量控制网(包括平面控制网和高程控制网)建立的基本原理和方法,精密角度测量,距离测量,水准测量;地球椭球数学性质,椭

球面上测量计算，椭球数学投影变换以及地球椭球几何参数的数学模型等。

物理大地测量学也有称为理论大地测量学。它的基本任务是用物理方法（重力测量）确定地球形状及其外部重力场。主要内容包括位理论，地球重力场，重力测量及其归算，推求地球形状及外部重力场的理论与方法等。

空间大地测量学主要研究以人造地球卫星及其他空间探测器为代表的空间大地测量的理论、技术与方法。

现代大地测量学同传统大地测量学之间没有严格界限。但现代大地测量学确实具有许多新的特征。首先，现代大地测量的测量范围大，它可在国家、国际、洲际、海洋及陆上、全球，乃至月球及太阳行星系等广大宇宙空间进行。第二，已从静态测量发展到动态测量，已从地球表面测绘发展到深入地球内部构造及动力过程的研究，即研究的对象和范围不断地深入、全面和精细。第三，观测的精度高，长距离相对定位精度达  $10^{-8} \sim 10^{-9}$ ，绝对精度达毫米级，有的达亚毫米级；角度测量精度在零点几秒，高程测量精度是亚毫米，重力测量精度是微伽级等，高质量的观测资料必将对本学科的发展和其他相关学科的发展带来深刻的影响。最后，现代大地测量的测量周期短也是区别传统大地测量学的重要标志。

## 2.2 大地测量学的基本内容

综上所述，可把现代大地测量学的基本科学技术内容归纳如下：

1. 确定地球形状及外部重力场及其随时间的变化，建立统一的大地测量坐标系，研究地壳形变（包括地壳垂直升降及水平位移），测定极移以及海洋水面地形及其变化等。
2. 研究月球及太阳系行星的形状及重力场。
3. 建立和维持具有高科技水平的国家和全球的天文大地水平控制网和精密水准网以及海洋大地控制网，以满足国民经济和国防建设的需要。
4. 研究为获得高精度测量成果的仪器和方法等。
5. 研究地球表面向椭球面或平面的投影数学变换及有关的大地测量计算。
6. 研究大规模、高精度和多类别的地面网、空间网及其联合网的数学处理的理论和方法，测量数据库建立及应用等。

以上概述了一般意义下的现代大地测量学的各个领域和方面。本书的内容是依据其基本体系和基本内容，系统地介绍现代大地测量的基本理论、技术和方法，为后续课程的学习和今后从事测绘科技工作打下坚实的基础。

## § 3 大地测量学的发展简史及展望

### 3.1 大地测量学的发展简史

探讨人类赖以生存的地球形状和大小的问题，是最复杂的科学问题之一，人们从远古至现代都在孜孜求索。回顾这一科学发展历程，大致可划分为四个阶段：1) 从远古至 17 世纪末，此期间人们把地球认为是圆球。2) 从 17 世纪末至 19 世纪下半叶，在这将近 200 年期间，人们把地球作为圆球的认识推进到向两极略扁的椭球。3) 从 19 世纪下半叶至 20 世纪 40 年代，人们将对椭球的认识发展到是大地水准面包围的大地体。4) 从 20 世纪 40 年

代至今，人们认为地球是由其自然表面包围的复杂形体。大地测量学整个发展历史就是伴随着人类认识地球的不断深化而逐渐产生、形成和发展起来的科学史。

### 3.1.1 第一阶段：地球圆球阶段

在远古时代，我国劳动人民就提出“天圆地方”的说法。公元前6世纪后半叶，毕达哥拉斯(Pythagoras)提出了地球是圆球的说法。公元前3世纪，亚历山大学者埃拉托色尼(Eratosthenes)首次用子午圈弧长测量法来估算地球半径。他认为，亚历山大城(Alexanaria)和赛尼(Syene)城(埃及)位于同一子午线上。他发现，在夏至(6月21日)这一天正午，日光正直射赛尼城的井底，即太阳的天顶距为零(太阳高度为 $90^\circ$ )；同日正午在亚历山大城，日光与垂线方向的夹角是圆周的 $1/50$ ，即日光南偏 $7^\circ 12'$ (即太阳高度为 $82^\circ 48'$ )，又认为这两束阳光彼此平行，故可认为两城的纬度差 $\Delta\varphi=7^\circ 12'$ ，他由埃及地图估计这两城的距离为5000古埃及尺(Stadia)，利用这些数据估算出地球半径(与现代数据比较，误差大约在100km左右)，这是人类应用弧度测量概念对地球大小的第一次估算。从上可见，用这种方法解决地球大小问题分为两种测量：一是属于天文部分：子午圈弧长两端点的纬度差；一是属于大地部分：两端点间的子午圈弧长。以这些观测为基础，用天文大地测量方法确定地球大小的基本原则，时至今日仍在使用。

最早一次对地球大小实测是在我国唐朝开元期间(713~741年)，在高僧一行(683~727，俗名张遂)指导下进行的。这次重要成果是由一行派太史监南宫说在河南平原上进行弧度测量取得的。他选择了地面平坦无障碍且大致位于同一子午线上的滑州白马(今滑县附近)、浚仪(今开封西北)、扶沟和上蔡等四地作为台站。用“复矩”测量北极高度，用圭表测定日影长度，用测绳实地丈量四站中间的三段距离(将近300km)，从而推算北极星每差一度相应的地面长度。在《旧唐书·天文志》中载记了其结果：“……然大率五百二十六里二百七十步而北极差一度半，三百五十一里八十步而差一度)，按现代计量单位折算，可得这段子午线上纬度差一度地面相距约132km，比现代值110.95km约长21km。

公元827年在阿拉伯回教教主阿尔曼孟(AL Mamun)领导下也进行过一次有意义的弧度测量。测区选在伊拉克巴格达西北，两支测量队从北纬 $35^\circ$ 的同一点沿同一子午线分别向北、向南测量恒星高度到 $1^\circ$ 为止，距离用木杆以古阿拉伯尺为单位丈量。推算出纬度 $35^\circ$ 处的 $1^\circ$ 子午线弧长等于111.8km，比正确值110.95km只大1%。

大约从公元6世纪开始，欧洲在宗教桎梏下，科学技术处于极度低迷状态。直到15~16世纪文艺复兴浪潮席卷欧洲的时候，以哥白尼、伽里略及牛顿等为代表的一批科学家摆脱宗教枷锁之后，才在自然科学方面获得一系列的惊人发明和创造。在这种大环境之下，也促进了大地测量学的萌芽和形成。

### 3.1.2 第二阶段：地球椭球阶段

在17世纪初，1615年荷兰人斯涅耳(W. Snell)首创三角测量法，这不但结束了粗略艰难的实地距离丈量的历史，而且在方法上，大大推进了大地测量的发展。此后，望远镜、游标尺，十字丝，测微器等相继出现，在测量工具方面也促进了大地测量的发展。

天文学和物理学在地球形状、重力场及其空间位置等方面也都提出了崭新的观念。比如波兰的哥白尼(N. Copernicus)，于1543年在其著作《关于天体的圆运动》中，创立了日心说，确定了地球在太阳系中的空间位置；德国的开普勒(J. Kepler)于1619年发表了行星运动遵循的三大定律；意大利的伽里略(G. Galileo)于1590年根据自由落体原理进

行了第一次重力测量；荷兰的惠更斯 (C. Huygens) 于 1673 年提出用摆进行重力测量的原理，并推导了数学摆公式。

研究地球形状和大小的新时期是由伟大的英国物理学家牛顿 (L. Newton, 1642~1727 年) 开创的。牛顿于 1687 年在其著作《自然哲学的数学原理》中，根据他建立的万有引力定律，并假设地球是均质流体，经论证认为：①在引力定律下，并绕一轴旋转的均质流体物质的均衡形状，是两极扁平的旋转椭球，其扁率  $\alpha = \frac{a-b}{a}$  ( $a, b$  分别是椭球长、短半轴) 等于  $1/230$ ；②重力加速度由赤道向两极与  $\sin^2\varphi$  ( $\varphi$ ——地理纬度) 成比例地增加。惠更斯在其著作《关于重力的起因》中，也推导了地球的扁率。所不同的是，他是把地球质量集中在球心，而牛顿则是将地球看成一个均质球体。惠更斯推导的扁率  $\alpha = 1/578$ ，它等于赤道处离心力与引力之比的一半。从而人类进入了认识地球为旋转椭球的新阶段，几何大地测量学得到形成和发展，物理大地测量学开始奠定基础。

我国清康熙 (47~55) 年间 (1708~1716 年)，为测制“皇舆全览图”，进行了大量的天文大地测量工作。其中最有意义的是 1710 年当法国神父雷考思 (Pere Regis) 和杜德美 (Pere Jarteux) 自齐齐哈尔南归时，曾在纬度  $47^\circ \sim 41^\circ$  之间，用测绳实地丈量每度的弧长，发现这些弧长值随纬度不同而不同，由南向北增加，在这  $6^\circ$  之间共差 258 尺 (1 尺 = 0.3085m)，这为地球非球而近于椭球之说提供了资料。而最后证明这一学说的乃是由法国科学院组织的两个测量队，于 1735 年分赴北欧的拉普兰和科鲁的两次用三角测量法所进行的弧度测量结果。其中北欧队的观测结果是，拉普兰 (纬度  $66^\circ$ ) 的子午圈 1 度弧长是 111.92km，比波卡于 1669~1670 年间在法国巴黎 (纬度约  $49^\circ$ ) 测得子午圈上的弧长 111.21km 大了很多。秘鲁队在戈丁弧测量中，得出赤道附近 1 度弧长是 110.60km。以上这些天文大地测量工作结果，直接有力地证明了认为地球是椭球的学说是正确的。

在这个阶段，几何大地测量在验证了牛顿的万有引力定律和证实地球为椭球学说之后，开始走向成熟发展的道路，取得的成绩主要体现在以下几方面：

1. 长度单位的建立。法国利用新的更精确的弧度测量结果，于 1799 年计算了一个新的椭球参数 (称为 1800 年德兰勃尔椭球)： $a = 6\,375\,653\text{m}$ ， $\alpha = 1/334$ ，取其子午圈弧长的四千万分之一作为长度单位，称为 1m。从而在大地测量中有了明确的长度单位。

2. 最小二乘法的提出。法国的勒让德 (A. M. Legendre) 于 1806 年首次发表了最小二乘法理论。事实上德国的高斯 (C. F. Gauss) 于 1794 年已经应用这一理论推算了谷神星的轨道，但在 1809 年，才在他的著作《天体运行论》中导出最小二乘法原理，并把这一原理用到后来的大地测量平差中。这一理论中心内容是利用具有观测误差的多余观测的数列求定待定参数最佳估值及其精度。

3. 椭球大地测量学的形成，解决了椭球数学性质，椭球面上测量计算，以及将椭球面投影到平面的正形投影方法。在这个领域，高斯、勒让德及贝塞尔 (F. W. Bessel) 作出了巨大贡献。

4. 弧度测量大规模展开。由于带有测微机构的经纬仪，精确长度杆尺及基线尺，纬度及天文方位角观测方法等新技术的出现和使用，促进了弧度测量的发展。在这期间主要有以英、法、西班牙为代表的西欧弧度测量，以及德国、俄国、美国等为代表的三角测量。

5. 推算了不同的地球椭球参数。最著名的有：贝塞尔推算的椭球参数：

长半轴:  $a = 6\,377\,397\text{m} \pm 210\text{m}$ , 扁率:  $\alpha = 1 : 299.1 \pm 4.7$ 。

对此称为 1841 年贝赛尔椭球。克拉克 (A. R. Clarke) 推算的椭球参数:

$$a = 6\,378\,249\text{m}, \quad \alpha = 1 : 293.5$$

对此称为 1840 年克拉克椭球。

这两个椭球曾得到广泛应用。

在这个阶段为物理大地测量学奠定了基础理论, 主要体现在以下几方面:

1. 克莱罗定理的提出。法国学者克莱罗 (A. C. Clairaut), 即不像牛顿那样认为地球是均质流体的均衡体, 也不像惠更斯那样认为地球质量集中在地心, 而是假设地球是由许多密度不同的均匀物质层圈组成的椭球体。这些椭球面都是重力等位面 (即水准面), 且各层密度由地心向外逐层按一定法则减少, 则该椭球面上纬度  $\varphi$  的一点的重力加速度按下式计算:

$$\gamma_{\varphi} = \gamma_c (1 + \beta \cdot \sin^2 \varphi) \quad (3-1)$$

而

$$\beta = \frac{5}{2}q - \alpha \quad (3-2)$$

此称之为克莱罗定理, 式中  $\gamma_{\varphi}$ 、 $\gamma_c$  分别为纬度  $\varphi$  的点及赤道上的重力加速度;  $q$  为赤道上的离心力和赤道上重力加速度之比:

$$q = \frac{\omega^2 a}{\gamma_c} = \frac{1}{288}$$

式中  $a$ ——椭球长半轴,  $\omega$ ——旋转椭球的角速度。

当将  $\varphi = 90^\circ$  代入 (3-1) 式, 则得极点处的重力加速度

$$\gamma_p = \gamma_c (1 + \beta) \quad (3-3)$$

由此得

$$\beta = \frac{\gamma_p - \gamma_c}{\gamma_c} \quad (3-4)$$

由此可见, 系数  $\beta$  表达了重力从两极向赤道相对的变化率, 称之为重力扁率。

由 (3-2) 式可得椭球扁率

$$\alpha = \frac{5}{2}q - \beta \quad (3-5)$$

克莱罗定理具有极其重要的意义。首先它论证了正常重力的计算公式, 只要知道点的位置 (即纬度  $\varphi$ ), 那么就可按此公式计算出该点的正常重力  $\gamma_{\varphi}$ , 如果再用几何大地测量和天文测量方法分别测得了  $a$  和  $\omega$ , 即可按 (3-5) 式计算出地球扁率  $\alpha$ 。因此 (3-5) 式是按重力方法求定地球形状的基本公式。

2. 重力位函数的提出, 为了确定重力与地球形状的关系, 法国的勒让德提出了位函数的概念。所谓位函数, 即是有这种性质的函数: 在一个参考坐标系中, 引力位对被吸引点三个坐标方向的一阶导数等于引力在该方向上的分力。研究地球形状可借助于研究等位面, 研究重力场可借助于重力位的一阶导数。因此, 位函数把地球形状和重力场紧密地联系在一起了。

3. 地壳均衡学说的提出。英国的普拉特 (J. H. Pratt) 和艾黎 (G. B. Airy) 几乎在同时都提出了地壳均衡学说。虽然是两种不同的均衡模式, 但它们都论证了某一深度处的压力是相等的, 地球的外层在未受到侵蚀和沉积作用的扰动时处于均衡状态。根据地壳均

衡学说导出均衡重力异常以用于重力归算。

4. 重力测量有了进展。设计和生产了用于绝对重力测量的可倒摆以及用于相对重力测量的便携式摆仪。极大地推动了重力测量的发展。

在这一阶段,虽然大地测量学得到了很大发展,但将地球认为是椭球也暴露了许多矛盾,比如作为外业测量的参考基准线是铅垂线,而椭球面计算基准线则是法线;铅垂线方向是物理的重力方向,而法线方向则是几何的垂直方向。重力方向相对法线方向有偏差,即所谓垂线偏差,具有系统性质。地球表面每点的重力及其方向都不相同,因此给测量结果带来的影响也不同。另外,地球表面是极其复杂的自然地面,海底也不规则,因此地表不能用简单数学关系式来表达,只能用控制点坐标来逐点描绘。但海水面占全球表面大部分,且比较规则,在某种假设下,可认为海水面是重力等位面,并把它延伸到大陆下,得到一个遍及全球的等位面。德国的李斯廷(J. B. Listing)于1872年,把它命名为大地水准面。从而,人类认识地球形状又产生了一次飞跃,即将椭球面推进到大地水准面的新阶段。

### 3.1.3 第三阶段:大地水准面阶段

几何大地测量学在这阶段的进展主要体现在以下几方面:

1. 天文大地网的布设有了重大发展。当时全球有三个大规模天文大地网:1) 1800~1900年间施测的印度天文大地网,该一等三角锁总长超过2万km,其中有由4个基本锁构成的长约6000km的基本锁,平均边长约45km,基线间距700~1200km。但天文点稀疏,没有拉普拉斯点可供使用,后来不得不加补测。2) 1911~1935年间施测的美国天文大地网,进行全长约7万km新一等三角锁,基线平均间距400km,天文点间平均间距150km,拉普拉斯点平均间距250km。3) 1924~1950年间施测的苏联天文大地网,其中包含一等三角锁7.5万km,在一等锁交叉处都测量起始边及天文经度、纬度及方位角。这些天文大地控制网为完成本身的科学技术任务做出重要贡献。

2. 因瓦基线尺出现,带平行玻璃板测微器的水准仪及因瓦水准尺使用;将天文大地测量同重力测量相结合代替天文水准等方面也有较大进步。

物理大地测量理论研究和实践都取得了重大进展。主要体现是:

1. 大地测量边值问题理论的提出。克莱罗依据地球是椭球,并按不同密度的均匀物质层分布等假设提出了著名的克莱罗定理。依据此定理得出的地球形状是椭球的扁率及外部正常重力场,因此克莱罗是以椭球面为边界解决边值问题的。英国的斯托克司(G. G. Stokes)于1849年提出了一个定理,把真正的地球重力位分为正常重力位和扰动位两部分,实际的重力分为正常重力和重力异常两部分,在某些假定条件下进行简化,通过重力异常的积分,提出了以大地水准面为边界的扰动位计算公式和大地水准面起伏公式。后来,荷兰学者维宁·曼尼兹(F. A. Vening Meinesz)根据斯托克司公式推出了以大地水准面为参考面的垂线偏差公式。俄国学者莫洛金斯基(М. С. Молодченский)根据克拉索夫斯基的设想,于1945年提出了解决大地测量边值的一种方法。该法实质是通过地面上观测的重力值精确求定地面点的扰动位,但其边界不是大地水准面而是地球表面,即直接利用地面上的重力观测值求定地球形状和外部重力场,而不是通过大地水面求解。

2. 提出了新的椭球参数。这阶段椭球参数推求的特点主要体现在用重力测量资料推求椭球扁率。最著名的有赫尔默特椭球,海福特椭球和克拉索夫斯基椭球等及这些椭球的参数。

赫尔默特 (F. R. Helmert) 在 1880 年和 1884 年先后发表了名著《大地测量学的数学和物理学原理》第 1 卷和第 2 卷, 在书中给大地测量学第一次定下了明确定义: 大地测量学是测量地球表面的科学。同时着重论述了利用重力资料求定椭球扁率的原理和方法。他又于 1906 年提出了赫尔默特椭球参数:

$$a = 6\,378\,140\text{m}, \quad \alpha = 1 : 298.3$$

海福特 (F. Hayford) 利用普拉特的地壳均衡学说和美国 1909 年前的弧度测量数据, 推算了如下的椭球参数:

$$a = 6\,378\,388 \pm 35\text{m}, \alpha = 1 : 297.0 \pm 0.5$$

此称为海福特 1910 年椭球。

克拉索夫斯基 (Ф. Н. Красовский) 利用原苏联、美国、西欧等弧度测量数据, 推算了如下椭球参数:

$$a = 6\,378\,245\text{m} \quad \alpha = 1 : 298.3$$

除上述主要成就外, 对几何和物理大地测量有重大影响的测量数据处理和测量平差理论与实践方面也取得了重大进步。比如, 在平差计算之前, 首先应对测量数据进行归算, 此时方向及方位角观测值都应加上垂线偏差及照准点高程改正, 距离归化应加上大地水准面差距的影响等。其次, 1912 年马尔可夫 (A. A. Markov) 在高斯平差理论的基础上, 提出了高斯-马尔可夫的平差模型, 1946 年荷兰学者田斯特拉 (J. M. Tienstra) 首先完成了关于相关平差的理论, 这一理论把观测值的概念扩大了, 不只限于随机变量的独立观测值, 而且也适于随机相关的观测值及其函数。针对天文大地网的规模大、未知参数多的问题, 提出了分阶段、分区以及分组平差的理论与实践。此外矩阵及线性代数和数理统计等相关学科理论引入测量平差中也推进了测量平差发展的进程。

#### 3.1.4 第四阶段: 现代大地测量新时期

20 世纪下半叶, 以电磁波测距、人造地球卫星定位系统及甚长基线干涉测量等为代表的新的测量技术的出现, 给传统的大地测量带来了革命性的变革, 使大地测量定位、确定地球参数及重力场, 构筑数字地球等基本测绘任务都以崭新的理论和方法来进行。从此大地测量学进入了以空间测量技术为代表的现代大地测量发展的新时期。

1948 年瑞典人贝尔斯特兰德 (E. Bergstrand) 首先研制成功世界上第一台光电测距仪, 60 年代又出现了激光测距仪; 1956 年南非人沃德利 (T. L. Waldley) 研制成功世界第一台微波测距仪, 70 年代德国首先研制成功测距、测角相结合的电子速测仪, 还有一些其他的精密测距定位系统也相继问世。这不但为传统大地测量测量基线长度创造了条件, 而且还使导线测量及测边网、测边测角网测量成为可能。

20 世纪 70 年代卫星多普勒技术, 海洋卫星雷达测高, 以及激光卫星测距 (SLR) 等都得到应用。特别是 80 年代, 美国全球卫星定位系统 (GPS) 得到全面发展, 并投入使用, 俄罗斯也有相应的定位系统——GLONASS。卫星导航定位系统具有高精度、全天候、高效率、多功能、操作简便以及应用广泛等优点。已被应用到建立全国性的大地测量控制网, 测定全球性的地球动态参数和精化重力场模型, 监测地球板块运动状态和地壳形变, 高精度海岛联测及海洋测绘, 用于海空导航、车辆引导、导弹制导、工程测量、城市及工程控制网建立、动态观测、设备安装、时间传递、速度测量等等。

利用空间探测器、卫星或空间飞行器, 在月球表面或其他行星表面建立大地控制网和



摄取像片,从而对月球或其他太阳系行星进行形状、大小及重力场模型的确定及地形图的测绘,由此形成了月球和行星大地测量学。

在此期间,我国及其他国家都建立了高精度的天文大地网。经过平差计算后,都建立了自己的大地参考基准。我国于1951~1975年,共25年间建成了全国天文大地网,包括:一等锁系:共5206个三角点,构成326个锁段,这些锁段共形成120个锁环,全长7.5万km;二等锁网及二等三角全面网共33478个点;青藏高原一等导线22条,全长约1.24万km,含426个导线点;二等导线48条,全长约6800km,含400个导线点;一、二等起始边467条,拉普拉斯方位角458个,用于推算垂线偏差的天文点2218个点,天文水准和天文重力水准线路全长6.4万km等。在1972~1982年间,进行了天文大地网的平差计算,同时建立了我国新的大地测量基准——1980年国家大地坐标系。此外,美国建立了横贯大陆导线,此时还联测了多普勒站,VLBI站及激光测卫站,重新定义和平差,建立了1983年北美大地基准,简称为NAD<sub>83</sub>。加拿大和澳大利亚也分别建立了大地控制网。

与此同时,我国和其他国家还分别建立了各自的大规模水准网。到1981年,我国共完成了全长约93360km的一等水准测量路线,构成100个闭合环,环线周长一般在800~1500km之间。1982年开始施测二等水准测量线路,总长13.7万km。于1985年完成了平差计算,并建立了“1985国家高程基准”。由美国、加拿大及墨西哥等国共同布设和重新进行北美水准网平差,其中美国重测了81160km的一等水准线路。平差工作于1991年完成,所得结果称为1988年北美高程基准,简称为NAVD<sub>88</sub>。此外,欧洲的芬兰、瑞典、英国等11个国家建立了统一欧洲水准网,最后平差结果称为1973年欧洲统一水准网,简称为UELN<sub>73</sub>。

在此期间,由于高精度绝对重力仪和相对重力仪的研究成功和使用,有些国家建立了自己的高精度重力网。大都是首先用绝对重力仪测量少数绝对重力点作为基准点,然后再用相对重力仪对网中基本重力点进行联测。我国曾于1957年建立一个属于波茨坦系统的重力网。其中包括21个基本点和82个一等点。但由于重力值是从波茨坦经前苏联辗转传递,系统误差积累较大,且后来国际上决定建立新的国际绝对重力基本网,因此这个重力网显然不适应现代国民经济建设和科学发展的要求,于是我国从1981年开始建立中国高精度重力基本网。首先用IMGC型绝对重力仪测定了11点的绝对重力点,从其中选6个点作为该网的基准点。1983~1984年间,用LCR-G型相对重力仪进行了6个基准点和46个基本点的联测,同时还同我国香港、日本等地共23个国际已知重力点联测。经过网的平差,单位权中误差为15 $\mu$ Gal,点重力值的中误差5~13 $\mu$ Gal,由此所得的重力网称为1985年国家重力基本网。此外,美国也建立了自己的国家重力网,欧洲建立了统一重力网。

大地控制网优化设计理论和最小二乘配置法的提出和应用,是这一时期的又一重要成就。20世纪60年代,荷兰学者巴尔达(W. Baarda)重新研究并提出了大地控制网质量标准问题,明确提出评价大地网质量的三项标准:精度、可靠性和经费。在精度标准中,提出准则矩阵的概念。在70年代,德国学者格拉法伦德(E. Grafarend)等对大地网的优化设计进行了广泛的理论研究,提出了人们公认的优化设计的四类分法及内容,系统地引进了数学规划的解法,并引进了准则矩阵的建立等问题。这一理论和方法,很快在大地网、工程测量控制网以及变形监测网等的优化设计中得到应用。虽然,由于GPS定位的特点,对它来说,并不再显得很重要,但在其他方面仍不失它的价值和作用。最小二乘配置法综合