电动力学

王明达　王秀江　编

吉林大学出版社

电 动 力 学

王明达 王秀江 编

吉林大学出版社

电 动 力 学

王明达　王秀江

吉林大学出版社出版　　长春市第 印刷厂印刷
吉林省新华书店发行

850×1168　大32开　16.25印张　400 000字
1988年3月第1版　1988年3月第1次印刷
印数：1—1 600册

ISBN 7-5601-0085-6/O·17
定价：2.80元

绪 论

人们为了更好地进行生产活动，首先就应对物质世界有较好的认识。人们认识物质，就是认识物质的运动形式。物理学中包含了物质的一些最简单运动形式，如机械运动、热运动、电磁运动、微观运动等。电动力学研究的对象是电磁运动形式，电磁运动形式包含带电粒子的运动和电磁场的运动。在经典范围内，带电粒子的运动可由力学规律来描述；电磁场的运动却必须用新的规律来描述。因此电动力学的主要内容是研究电磁场的基本性质及其运动规律，以及电磁场和带电物质之间的相互作用。

人类对电磁运动形式的认识早在古代的生产实践中就开始了，但对它进行系统的、深入的研究还是在18世纪以后。由于当时生产发展的推动，人们在研究电磁现象的科学实验中先后总结出了一些重要的实验定律，这就是关于静止电荷相互作用的库仑定律（1785年），关于计算电流磁场的毕奥-萨伐尔定律（1822年），关于电磁场和电流相互作用的安培定律（1822年），以及法拉弟电磁感应定律（1831年）。这些定律是在局部的范围内总结出来的，在19世纪前半期人们还没有更深刻地理解这些实验定律的内在联系。随着电工技术在生产中的应用，人们对电磁现象的认识也不断发展。在1862年到1865年期间，麦克斯韦在分析前人得到的实验规律的基础上，总结出了描述电磁运动的普遍规律，建立起了完整的电磁场理论，从而使人类对电磁现象的认识发生了一次重大飞跃。

但是人们对电磁现象的认识过程到此并没有完结，一方面

电磁运动规律的正确性尚待实践检验，另一方面还需要用普遍规律去指导生产实践。麦克斯韦电磁理论预言的一个重要结论是存在电磁波，1888年赫兹从实验上证实了这一结论。后来人们把这一理论广泛用于生产实践，获得了极其巨大的成就。现在生产技术和科学研究的许多领域都需要应用电磁场理论，例如电力工业技术，现代广播、通讯、雷达技术，电磁探矿、电磁测井技术，粒子加速器技术，电子光学技术，等离子体物理等等，都有许多电磁场理论问题。现在在宏观领域内的一切电磁现象都和麦克斯韦电磁场理论的结论相符。

这些事实说明，对于在宏观领域内的电磁现象这样一个具体问题来说，人们的认识是相对地完成了，然而不能认为对于整个电磁现象的认识已经完成，因为随着人类实践活动的发展，人们的认识也一定要发展。

在19世纪末宏观电磁理论获得极大成功的时候，人们对电磁场的本质并没有认识清楚。当时普遍认为电磁波是充满宇宙的“以太”物质的一种振动方式，电磁运动规律只是对固定于“以太”中的绝对参考系才是正确的，电磁理论不服从相对性原理。生产技术的发展，使人们有可能对电磁现象进行更精确的科学实验，结果表明上述观点是错误的。在此基础上出现了狭义相对论，它使人类的认识又产生了一次新的飞跃。现代生产技术提供了研究微观带电粒子的电磁相互作用的有利条件。实践证明，经典电磁理论完全不适用于微观领域内的电磁现象，由此又产生了量子电动力学。虽然现在直到很小的线度（10^{-16}cm）内还没有发现量子电动力学和实验的差别，但也不能认为量子电动力学是微观电磁现象的最终理论。随着实践的深入发展，电磁理论也一定会继续发展。

从教学要求来看，电动力学是物理学中的一门基础理论课，它主要包括三个部分：宏观电磁场理论，即宏观电荷电流分布在各种情况下产生的电磁场；微观带电粒子在各种运动

情况下产生的电磁场，以及带电粒子和电磁场的相互作用；狭义相对论。通过学习这些内容我们希望达到的目的是：了解电磁运动的基本规律，加深对电磁场性质的理解；了解狭义相对论时空观及有关的基本概念；获得在本门课程领域内分析和处理一些基本问题的初步能力，为学习后继课程和独立解决实际工作中的有关问题打下必要的基础。在我国物理类专业的教学计划中，研究电磁运动的课程有两门，即普通物理的电磁学和电动力学。这两门课的差别主要在于研究的深度和广度以及研究的方法上。电磁学重点是研究与时间无关的静止或稳定情况，即使是随时间变化的情况也主要是研究缓慢变化的情况；电动力学研究的重点是随时间迅速变化的电磁现象，即使是对静电和稳定情况，电动力学研究的问题也比电磁学要广泛和深入。在研究方法上，电磁学更多地着眼于实验现象的描述，电动力学则从普遍的电磁场方程出发，重点讨论在各种具体情况下，求解电磁场方程的方法。

前　　言

本书是根据编者在吉林大学物理系授课的讲义整理而成的。全书共分九章，第一章是数学准备，第二章至第六章介绍宏观电磁场的基本理论。从电磁现象的基本规律出发，阐述了静电场、稳定电磁场、似稳电磁场、辐射和传播的主要内容，强调在各种条件下，如何从基本方程出发去计算和分析电磁场。第七章介绍狭义相对论。第八、九两章，介绍带电粒子和电磁场的相互作用及电磁场的量子化，是进一步学习微观量子理论的基础。

有一些理论，如磁单极子理论、超光速粒子理论等，目前还只能认为仅是理论上的探索，尚未得到实验的肯定，故在本教材中未作介绍。关于物质电磁性质的微观理论，如介质的极化和磁化、超导理论等，因在固体物理教材中已有详细介绍，为避免重复，在本书中也就不涉及了。

编者力求将电动力学的基本概念和理论叙述得清楚易懂，公式推导尽可能详细，对基本方法，尽可能多举一些典型例题加以说明。每章后面都有复习思考题和习题供读者参考。限于编者水平，缺点、错误之处在所难免，请读者批评指正。

编　者

1[illegible]年1月

目　录

第一章　矢量分析和场论基础

电动力学的主要任务是计算电磁场的分布，因此，必然要遇到场的概念。“场”是什么？场有些什么特点？如何从数学上描述它们？这些都是首先应弄清楚的问题。

许多物理领域所研究的物质对象连续地分布在一定的空间范围，空间各点处的物理性质、运动状态以及相互作用一般是不相同的，描述这些性质、状态和作用的所有物理量都是空间各点的函数。一定物理量的空间分布称为场，如描述物质温度分布的温度场，描述流体速度分布的速度场，描述引力作用的引力场，描述电磁作用的电磁场等等。从物理观点看，要了解一个场的运动规律，就是要知道相应的物理量在空间各点的分布和随时间变化的情况。

与质点或刚体力学的情况不同，因为质点和刚体的自由度是有限的，而电磁场的自由度是无限的，因此需要应用新的数学工具。从数学观点看，一个场就是指一个空间坐标函数。各种场都由相应物理量的空间坐标函数来表示，这些空间坐标函数称为场函数。不管物理量的具体性质，研究它们共同的空间分布特性和数量关系，这是数学场论的任务。如果场函数是空间坐标的标量函数

$$\phi=\phi(x,y,z) \tag{1}$$

就称为标量场。如果场函数是空间坐标的矢量函数

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(x,y,z)=A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k} \tag{2}$$

就称为矢量场。不随时间变化的场称为稳定场。如果场函数还是时间的函数，则称为变化场。研究场的运动规律，就是研究相应场函数随空间和时间的变化关系。这一章介绍数学场论的

基础，重点讨论矢量场，分析它的性质和结构。

§1 矢量代数的基本公式

在直角坐标系中，三个单位矢量

$$\begin{aligned} \boldsymbol{i} &= \boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{j} &= \boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{k} &= \boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_3 \end{aligned} \tag{1.1}$$

是互相垂直的常矢量．任一矢量$\boldsymbol{A}$可用沿坐标轴的三个分量表示，即

$$\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k} = \sum_{i=1}^{3} A_i\boldsymbol{e}_i \tag{1.2}$$

它的数值为

$$A = (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)^{1/2} \tag{1.3}$$

它的方向由三个方向余弦确定

$$\cos\alpha = \frac{A_x}{A},\ \cos\beta = \frac{A_y}{A},\ \cos\gamma = \frac{A_z}{A} \tag{1.4}$$

两个矢量相加，只要相应分量相加即可

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = (A_x + B_x)\boldsymbol{i} + (A_y + B_y)\boldsymbol{j} + (A_z + B_z)\boldsymbol{k} \tag{1.5}$$

两个矢量相乘有三类乘积：标量积、矢量积和张量积。

标量积是一个标量，等于两个矢量的数值相乘，再乘以夹角的余弦

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = AB\cos\theta \tag{1.6}$$

标量积满足交换律

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} \tag{1.7}$$

和分配律

$$\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C} \tag{1.8}$$

按照标量积的定义可知

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \tag{1.9}$$

所以

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \sum_i A_i \boldsymbol{e}_i \cdot \sum_j B_j \boldsymbol{e}_j = \sum_{i,j} A_i B_j \delta_{ij} = \sum_i A_i B_i$$

即

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \tag{1.10}$$

矢量积是一个矢量，它的数值是两个矢量的数值相乘，再乘以夹角的正弦；它的方向与两个矢量所在平面垂直，沿着从第一个矢量转向第二个矢量的右手螺旋前进的方向。

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = AB \sin\theta \, \boldsymbol{e}_n \tag{1.11}$$

其中 $\boldsymbol{e}_n$ 是从 $\boldsymbol{A}$ 转向 $\boldsymbol{B}$ 的右手螺旋前进方向的单位矢量。

矢量积不满足交换律，因为

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = -(\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}) \tag{1.12}$$

但满足分配律

$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{C} \tag{1.13}$$

按照矢量积的定义可知

$$\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j = \sum_k \varepsilon_{ijk} \boldsymbol{e}_k \tag{1.14}$$

其中勒维-齐维塔（Levi-Civita）记号 ε_{ijk} 定义如下：

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & ijk\text{是123的偶排列} \\ -1 & ijk\text{是123的奇排列} \\ 0 & \text{任意二个指标相同} \end{cases} \tag{1.15}$$

因此

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} &= \sum_i A_i \boldsymbol{e}_i \times \sum_j B_j \boldsymbol{e}_j \\ &= \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} A_i B_j \boldsymbol{e}_k \\ &= (A_y B_z - A_z B_y)\boldsymbol{i} + (A_z B_x - A_x B_z)\boldsymbol{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\boldsymbol{k} \\ &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{1.16}$$

利用标量积和矢量积的定义，可以证明两个很有用的公式：

三个矢量的混合积

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})=\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) \tag{1.17}$$

双重矢量积

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) \tag{1.18}$$

先证明混合积公式。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})&=\boldsymbol{A}\cdot\sum_{ijk}\varepsilon_{ijk}B_jC_k\boldsymbol{e}_i\\&=\sum_{ijk}\varepsilon_{ijk}A_iB_jC_k\\&=\begin{vmatrix}A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\\ C_x & C_y & C_z\end{vmatrix}\end{aligned} \tag{1.19}$$

由行列式可看出混合积对 A,B,C 具有轮换对称性。

其次，证明双重矢量积公式。这要用到关于勒维-齐维塔记号的一个重要等式

$$\sum_k\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnk}=\delta_{im}\delta_{jn}-\delta_{in}\delta_{jm} \tag{1.20}$$

双重矢量积

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})&=(\sum_j A_j\boldsymbol{e}_j)\times(\sum_{mnk}\varepsilon_{mnk}B_mC_n\boldsymbol{e}_k)\\&=\sum_{ij}\sum_{mnk}C_{ijk}\varepsilon_{mnk}A_jB_mC_n\boldsymbol{e}_i\\&\sum_{ij}\sum_{mnk}(\delta_{im}\delta_{jn}-\delta_{in}\delta_{jm})A_jB_mC_n\boldsymbol{e}_i\\&=\sum_{ij}(A_jB_iC_j-C_iA_jB_j)\boldsymbol{e}_i\\&=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\end{aligned}$$

§2 张量与并矢及其运算规则

我们知道，一些物理量，像质量、电荷、温度等等，都是标量，只有一个数值；另一些物理量，像力、速度、加速度等

等，都是矢量，不仅具有数值，而且还有一定的方向．在直角坐标系中，每个矢量都有三个分量．在物理学中，还有一些物理量，其性质比矢量更复杂，例如弹性体中的应力和形变、各向异性晶体中的介电常数、磁导率等等．现以各向异性晶体中的电极化为例来说明．在电磁学中已熟悉各向同性介质的极化，在这种介质中电位移矢量 $\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{D}$ 与电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的方向一致，并与 $\boldsymbol{E}$ 成正比，介电常数 ε 是一个标量．但在各向异性介质中，$\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 的方向一般不相同，并且在介质的同一点上，介质的极化随 $\boldsymbol{E}$ 的方向而变化．对于各向异性介质，介电常数不再是一个标量．实验发现，当场强不太强时，$\boldsymbol{D}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 各分量仍保持线性关系，一般形式是

$$\begin{cases} D_x=\varepsilon_{11}E_x+\varepsilon_{12}E_y+\varepsilon_{13}E_z \\ D_y=\varepsilon_{21}E_x+\varepsilon_{22}E_y+\varepsilon_{23}E_z \\ D_z=\varepsilon_{31}E_x+\varepsilon_{32}E_y+\varepsilon_{33}E_z \end{cases} \tag{2.1}$$

由此可见，各向异性介质的介电常数在直角坐标系中一般有九个分量，这样的量称为二阶张量．一般的二阶张量可用矩阵表示如下：

$$\mathscr{T}=\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

为了统一名称，可把标量称为零阶张量，只有一个量；矢量可称为一阶张量，具有三个分量；二阶张量则具有九个分量，等等．

二阶张量也可由两个矢量的张量积构成．两个矢量的张量积称为并矢

$$\mathscr{T}=\boldsymbol{AB} \tag{2.3}$$

$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 直接并列，中间没有任何运算符号．矢量 $\boldsymbol{A}$ 称为并矢 $\mathscr{T}$ 的前项，矢量 $\boldsymbol{B}$ 称为并矢 $\mathscr{T}$ 的后项．将并矢用分量表示，立刻看到它有九个分量．

$$\mathscr{T}=\boldsymbol{AB}$$

$$
\begin{aligned}
&= (A_x \boldsymbol{i} + A_y \boldsymbol{j} + A_z \boldsymbol{k})(B_x \boldsymbol{i} + B_y \boldsymbol{j} + B_z \boldsymbol{k}) \\
&= A_x B_x \boldsymbol{ii} + A_x B_y \boldsymbol{ij} + A_x B_z \boldsymbol{ik} \\
&\quad + A_y B_x \boldsymbol{ji} + A_y B_y \boldsymbol{jj} + A_y B_z \boldsymbol{jk} \\
&\quad + A_z B_x \boldsymbol{ki} + A_z B_y \boldsymbol{kj} + A_z B_z \boldsymbol{kk} \\
&= \sum_{ij} A_i B_j \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j \qquad (i, j = 1, 2, 3)
\end{aligned} \tag{2.4}
$$

在一般情况下，一个并矢的前后项不能互相交换

$$\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA} \tag{2.5}$$

一般二阶张量也可写成并矢式

$$\mathscr{T} = \sum_{ij} T_{ij} \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j \qquad (i, j = 1, 2, 3) \tag{2.6}$$

因此并矢 $\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$ 可作为二阶张量的九个基。

一个特殊的并矢式

$$\mathscr{I} = \boldsymbol{ii} + \boldsymbol{jj} + \boldsymbol{kk} \tag{2.7}$$

$\mathscr{I}$称为单位张量，它的矩阵表示为

$$\mathscr{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

下面介绍张量和并矢的一些代数运算规则。熟悉并矢运算的关键在于牢记并矢的定义和并矢的前后项不能交换，然后将并矢中的前后项当成普通的矢量来运算。

两个同阶张量相加，就是将它们对应的分量相加，即

$$\mathscr{T} + \mathscr{V} = \sum_{ij} (T_{ij} + V_{ij}) \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j \tag{2.9}$$

标量与张量相乘，就是将标量与张量的每个分量逐项相乘，即

$$\phi \mathscr{T} = \sum_{ij} \phi T_{ij} \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j = \mathscr{T} \phi \tag{2.10}$$

并矢与矢量的点乘为

$$(\boldsymbol{AB}) \cdot \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C}) \tag{2.11}$$

$$\boldsymbol{C} \cdot (\boldsymbol{AB}) = (\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{A}) \boldsymbol{B} \tag{2.12}$$

并矢与矢量点乘，结果为矢量。需要注意矢量与并矢的前、后

项点乘结果是不同的，与前项点乘，其方向是后项矢量的方向；与后项点乘，则其方向为前项矢量的方向。故一般说来

$$(\boldsymbol{AB})\cdot\boldsymbol{C}\neq\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{AB}) \tag{2.13}$$

并矢与矢量的叉乘为

$$(\boldsymbol{AB})\times\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) \tag{2.14}$$

$$\boldsymbol{C}\times(\boldsymbol{AB})=(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}$$

并矢与矢量叉乘，结果仍为并矢。不被叉乘的矢量当作独立矢量，其余两个矢量按矢量积规则运算。一般说来

$$(\boldsymbol{AB})\times\boldsymbol{C}\neq\boldsymbol{C}\times(\boldsymbol{AB}) \tag{2.15}$$

并矢与并矢的一次点乘为

$$(\boldsymbol{AB})\cdot(\boldsymbol{CD})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{D}=(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{AD} \tag{2.16}$$

$$(\boldsymbol{CD})\cdot(\boldsymbol{AB})=\boldsymbol{C}(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{CB} \tag{2.17}$$

两个并矢点乘是将靠近的两个矢量点乘，其余未被点乘的两个矢量构成一个新的并矢；已经点乘的两个矢量变成标量，可以放在新并矢前后。一般说来

$$(\boldsymbol{AB})\cdot(\boldsymbol{CD})\neq(\boldsymbol{CD})\cdot(\boldsymbol{AB}) \tag{2.18}$$

并矢与并矢的二次点乘为

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{AB}):(\boldsymbol{CD})&=(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D})\\&=(\boldsymbol{CD}):(\boldsymbol{AB})\end{aligned} \tag{2.19}$$

先将靠近的两个矢量点乘，再将剩下的两个矢量点乘，两次点乘所得结果为一标量。其先后次序可以交换。

单位张量与任一矢量的点乘等于原矢量，与任一并矢的点乘等于原并矢。

$$\mathscr{I}\cdot\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}\cdot\mathscr{I}=\boldsymbol{C} \tag{2.20}$$

$$\mathscr{I}\cdot\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AB}\cdot\mathscr{I}=\boldsymbol{AB} \tag{2.21}$$

并有

$$\mathscr{I}:\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}:\mathscr{I} \tag{2.22}$$

上述并矢的方法可推广到任意个矢量的情形，例如由三个矢量的并矢，可构成一个三阶张量