SHEYING JIHE JICHU 高等学校教学参考书

许志群 吴海霞 编

射影几何基础

高等教育出版社

本书是编者在中国人民解放军空军工程学院讲授“射影几何”课程的讲稿基础上，经过总结教学经验编写而成的。

为了密切结合在工程图学中的应用，本书采用综合法来阐述射影几何的基本内容。全书共分九章，每章末均附有一定数量的练习题。

本书可供工科高等院校作为“射影几何”选修课教材，也可供从事工程图学教学工作的教师参考。

高等学校教学参考书

射影几何基础

许志群　吴海霞　编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

二二〇七工厂印装

开本 787×1092 1/16　*　印张 17 字数 390 000

1987 年 9 月第 1 版　1987 年 9 月第 1 次印刷

印数 00 001— 4,59

ISBN 7-04-000038-5/O·21

书号 13010·01436　定价 3.20 元

前　言

本书是编者在中国人民解放军空军工程学院讲授"射影几何"课程的教学实践基础上，参考国内外有关教材与文献资料，于一九八二年编出初稿，经内部使用又作了三次较大修改而成，一九八五年由原工科画法几何及工程制图教材编审委员会评审，推荐作为教学参考书出版。

为了使射影几何的基本理论与在工程图学方面的应用相联系，以适合工程图学工作者及有关科技人员阅读，采用综合法阐述射影几何基本内容。因此，用由平面到空间、由仿射到透射、由同素变换到异素变换的体系进行叙述；力图使基本理论与应用实例紧密结合，突出介绍了用射影几何理论解决画法几何、轴测图、透视图及体视投影等问题的解题思路和作图方法。从而使读者对射影几何在工程图学方面的应用有所了解，并有所启迪。为了精选内容、减少篇幅，解题步骤方法的叙述，前几章较为详细，后几章较为简略。在每一章之后，均附有练习题，作为读者复习巩固所学的基本理论与方法之用。

本书可作为高等工业学校学生选修或研究生学习射影几何的教学参考书，亦可供工程图学教学工作者及有关科技人员阅读。

本书经中国纺织大学朱辉副教授和北京工业学院张云鹤副教授审阅。在编写过程中，我们还采纳了关心和使用过本书初稿的兄弟院校老师的意见和建议。同时，我们还得到空军工程学院有关领导的关怀与支持，机械教研室王峤、赵学纯、蒋日清、庞国华、郦乐源、解德盛、张永何等同志协助抄写和描图，并对本书提出不少宝贵意见。谨在此一并表示深切谢意。

由于我们水平有限，错误与不足之处在所难免，恳请读者批评指正。

编者

一九八六年二月

目　录

第一章　平面场的亲似变换与仿射变换

本章从平行投影与亲似对应的关系开始，阐述平面场的亲似对应与亲似变换的建立、性质、作图方法，以及在画法几何中的应用。然后阐述更为一般的平面场的仿射对应与仿射变换。本章和第二章同作为从欧氏几何到射影几何的桥梁。

第一节　平面场的亲似对应与亲似变换

一、平行投影与亲似对应

如图1-1所示，已知平面ω与ω'，它们的交线为ss，直线l与这两个平面都相交。过平面ω上点A、B、C、……作与直线l平行的投射线，这些投射线交平面ω'于点A'、B'、C'、……，则点A'，B'、C'、……为点A、B、C、……在平面ω'上的投影。这样的投影叫做平行投影。

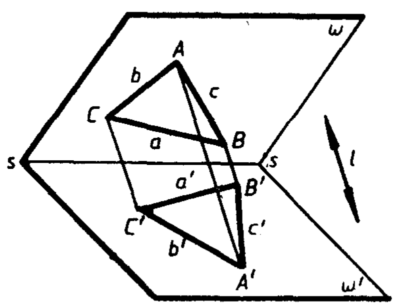


图　1-1

从平行投影的作法可知，点A、B、C、……也可看作是点A'、B'、C'、……在平面ω上的投影。因此，平行投影对于平面ω与ω'来说，地位是一样的。平面ω上的每个点能完全决定平面ω'上唯一的对应点，反过来也一样。这样，就在平面ω与ω'之间建立起一一对应的关系，即平面ω上每个点对应平面ω'上的唯一点。反之亦然。

利用平行投影所建立的平面ω与ω'的一一对应关系叫做亲似对应或透视仿射对应。直线l的方向叫做亲似方向。交线ss叫做亲似对应轴，简称亲似轴。亲似轴上每个点的对应点与自身重合，叫做二重点；亲似轴ss的对应直线与自身重合，叫做二重直线。所以亲似轴可看作是亲似对应中二重点的轨迹。

显然，在平面ω上以A、B、C三点作为顶点的三角形与平面ω'上以点A'、B'、C'三点作为顶点的三角形相对应，其中直线a、b、c分别对应直线a'、b'、c'。我们把平面上所有点的集合叫做点场，所有直线的集合叫做线场。平面上所有点和所有线的集合叫做点线场或平面场。

从两平面的相对位置关系可知，当两平面相互平行时，则不存在亲似轴①，这时两平面之间的对应图形的大小和形状都相同，叫做合同图形。对于两相交平面，两对应图形就不是合同的。

①更确切地说，这时只是不存在由固有直线构成的亲似轴，而存在由非固有直线构成的亲似轴。"固有直线"、"非固有直线"的概念见本书第三章。

从两平面场的亲似对应关系可以看出，不仅一个场上的点对应另一个场上的唯一点，而且一个场上的直线与另一个场上的直线也一一对应。两条对应直线或交于亲似轴上一点，或与亲似轴平行。如图 1-2，直线 AB 与对应直线 $A'B'$ 交于亲似轴上一点 X，而直线 CD 与对应直线 $C'D'$ 则平行于亲似轴 ss。

亲似对应中，点对应点、直线对应直线，这种性质，叫做“同素性”。同时，由于直线的平行投影是该线上所有点投影的轨迹，因而直线上的每一个点对应着它的对应直线上一个对应的点。如图 1-2 中，点 E 属于直线 AB，它的对应点 E' 属于 AB 的对应直线 $A'B'$。反之，直线 AB 属于点 E，它的对应直线 $A'B'$ 属于点 E'。这就是说，点与直线的从属关系在亲似对应中亦保持不变，这一性质叫做“从属性”。

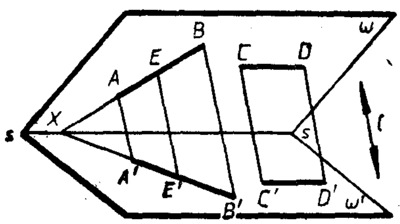


图 1-2

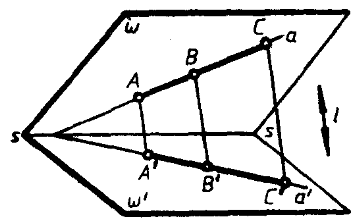


图 1-3

在亲似对应中，两对应直线上三对对应点间存在如下的等比关系：

如图 1-3 所示，直线 a 上有 A、B、C 三个点，我们把线段 AC 与 BC 的长度之比叫做简比，用符号表示为 (ABC)，即

$$(ABC)=\frac{AC}{BC}。$$

点 A、B 叫做基础点或底点，点 C 叫做分点。如果点 C 在 AB 之外，则叫做外分；由于 BC、AC 两条线段的方向相同，故简比为正、若点 C 在 AB 之内，则叫做内分；由于 BC、AC 两条线段的方向相反，因而简比为负。

直线 a 对应直线 a'，点 A、B、C 分别对应点 A'、B'、C'。因为投射线 AA'、BB'、CC' 互相平行，故有

$$\frac{AC}{BC}=\frac{A'C'}{B'C'},$$

即

$$(ABC)=(A'B'C')。$$

这就是说，在亲似对应中，一个平面内的一条直线上三个点的简比等于对应平面上三个对应点的简比。亲似对应的这一性质叫做“简比不变性”。

同素性、从属性与简比不变性是亲似对应的三个基本性质，亦是利用平行投影所建立的对应的基本性质。本书后面还将介绍，同素性与从属性也是利用中心投影建立的对应的基本性质。

在本书里，对平面上的点常用大写字母 A、B、C、……表示，直线常用小写字母 a、b、c、……表示，平面则常用 ω、α、β、……表示。其对应平面上的对应几何元素，则用相应的字母并在字母的右上角加一撇表示，如点用 A'、B'、C'、……等。

二、两平面场处于同一平面上的亲似对应——亲似变换

假设在平面ω和ω'之间已建立了一个亲似对应，它的亲似轴为ss，如图1-4所示。现将平面ω'固定不动，令平面ω绕轴ss旋转，直至与平面ω'重合，平面ω与ω'即处于同一平面上。此时，两平面场的亲似对应的三个基本性质仍然保持不变。并且新的对应点A、A'，B、B'，C、C'的连线AA'、BB'、CC'仍保持平行。这是因为这些投射线中的任意两条如AA'与BB'是对应直线AB与$A'B'$上对应点的连线，AB与$A'B'$交于亲似轴上一点X，并根据简比不变性有$(ABX)=(A'B'X)$。对于$\angle CXC'$，AA'与BB'将它的两边截成比例线段，故得$AA' \parallel BB'$。同理可证，投射线CC'与AA'或BB'将$\angle CXC'$的两边截成比例线段，故$CC' \parallel AA' \parallel BB'$。由此可见，两平面场处于同一平面上的亲似对应是亲似对应的一种特殊情况。但是，应当注意，亲似对应轴不再是两平面的交线，而只保留二重点轨迹这一性质。

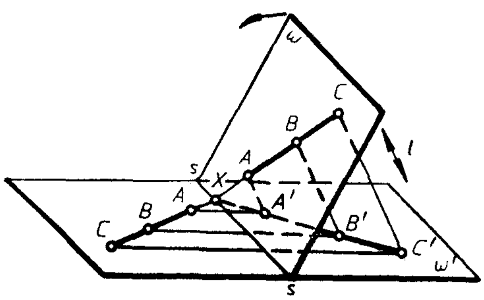


图 1-4

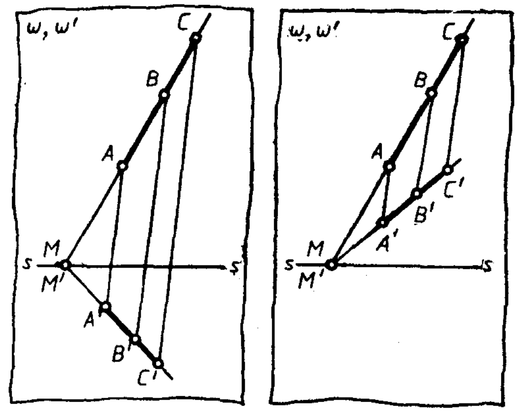


图 1-5

根据旋转方向不同，各对对应点可分别位于亲似对应轴ss的两侧或在亲似对应轴的同侧，如图1-5所示。

由于两平面场处于同一平面上，故平面上的每一个点，既可当作场ω的，也可当作场ω'的。这种平面到它自身的亲似对应，叫做亲似变换。ω表示变换前的平面场，ω'表示变换后的平面场。如果把平面场ω到ω'的变换看作是正的，则由平面场ω'到ω的变换叫做逆变换。由于亲似对应在画法几何中的应用主要是在同一平面上，因此我们对于亲似变换将更感兴趣。

三、亲似对应与亲似变换的不变性与不变量

亲似对应的不变性和不变量是指亲似对应图形中保持不变的性质和不变的量。它们是进行图形变换的作图依据。除前面介绍的三个基本性质以外，还可推出下面的一些性质，概括如下。

（一）平行性

一对平行直线的亲似对应图形仍为一对平行直线，这个性质叫做平行性。

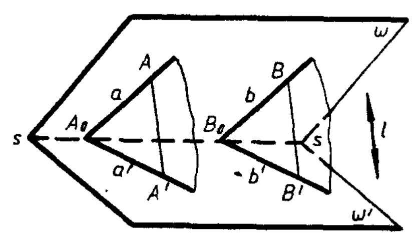


图 1-6

如图1-6所示，平面ω上的平行直线a和b，沿已知亲似方向l投射到ω'上。投射线AA'、BB'

分别与直线 a、b 确定两个投射平面。由于两投射平面含有的直线 $a \parallel b$ 和 $AA' \parallel BB'$，故两投射平面互相平行。投影 a' 和 b' 是这两个平行面在平面 ω' 上的迹线，因此也互相平行。

（二）定比性

1. 长度比

(1) 两个平行线段长度之比，为亲似对应的不变量。

如图 1-7 所示，线段 AB 与线段 CD 平行。设 $\frac{AB}{CD}=k$，对应直线 $\frac{A'B'}{C'D'}=k'$。可以证明：

$$k=k'。$$

连接 BD，并作 $AE \parallel BD$，作出点 E 的对应点 E'，则在平面 ω 上得平行四边形 $ABDE$。在平面 ω' 上，与它对应的是平行四边形 $A'B'D'E'$。

由于直线上三点的简比在亲似变换中是个不变量，故有：

$$\frac{AB}{CD}=\frac{ED}{CD}=\frac{E'D'}{C'D'}=\frac{A'B'}{C'D'},$$

$$k=k'。$$

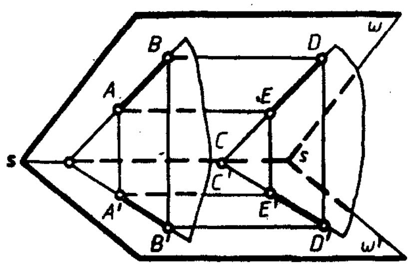


图 1-7

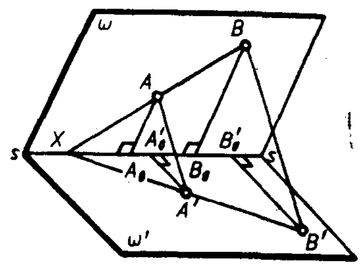


图 1-8

(2) 任意两个对应点到亲似轴的距离之比为亲似对应的不变量。

如图 1-8 所示，设平面场 ω 与 ω' 成为亲似对应，点 A、A' 与 B、B' 为两对对应点。从这些点分别引直线垂直于亲似轴，得垂足 A_0、A_0'、B_0、B_0'。连直线 AB 与 $A'B'$ 必交于亲似轴上一点 X，则可得

$$\frac{AA_0}{BB_0}=\frac{XA}{XB}, \qquad \frac{A'A_0'}{B'B_0'}=\frac{XA'}{XB'}。$$

又因对应点连线互相平行，即 $AA' \parallel BB'$，则 $\triangle AA'X \backsim \triangle BB'X$，故

$$\frac{XA}{XB}=\frac{XA'}{XB'}。$$

因而

$$\frac{AA_0}{BB_0}=\frac{A'A_0'}{B'B_0'},$$

即

$$\frac{AA_0}{A'A_0'}=\frac{BB_0}{B'B_0'}=\text{常数}。$$

2. 面积比

任意两个对应平面图形面积之比为亲似对应的不变量。这一命题的证明，可分为下面各种

情况：

(1) 在亲似轴 ss 上有公共边的两个对应三角形。

如图 1-9 所示，$\triangle ABC$ 对应于$\triangle A'B'C'$。过点 A、A' 分别向亲似轴引垂线，交轴于点 A_0、A_0'。设上述两个三角形的面积比为

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\frac{CB\cdot AA_0}{C'B'\cdot A'A_0'}=k。$$

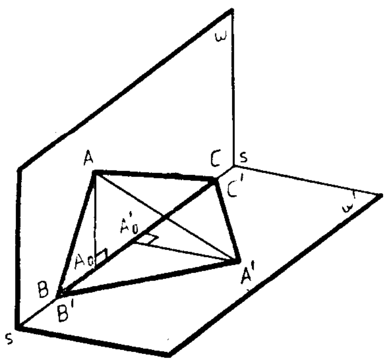


图 1-9

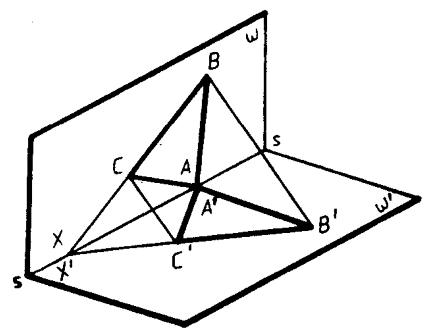


图 1-10

(2) 在亲似轴 ss 上有公共顶点的两个对应三角形。

如图 1-10 所示，$\triangle ABC$ 对应于 $\triangle A'B'C'$。它们的对应边交于亲似轴 ss，如 BC、$B'C'$ 交于 $X(X')$。这样$\triangle ABC$ 和$\triangle A'B'C'$ 的面积比可化为上述情况(1)来分析，即

$$\frac{\triangle BAX}{\triangle B'A'X'}=k,\qquad \frac{\triangle ACX}{\triangle A'C'X'}=k。$$

而

$$\triangle ABC=\triangle BAX-\triangle ACX,$$

$$\triangle A'B'C'=\triangle B'A'X'-\triangle A'C'X',$$

则

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\frac{\triangle BAX-\triangle ACX}{\triangle B'A'X'-\triangle A'C'X'}=\frac{k(\triangle B'A'X'-\triangle A'C'X')}{(\triangle B'A'X'-\triangle A'C'X')}=k。$$

(3) 两个对应三角形的一般情况

如图 1-11 所示，三角形 ABC 对应于三角形 $A'B'C'$。这两个三角形面积可表示成如下形式：

$$\triangle ABC=\triangle YXA-\triangle YBC-\triangle YCX,$$

$$\triangle A'B'C'=\triangle Y'X'A'-\triangle Y'B'C'-\triangle Y'C'X',$$

式中的

$$\frac{\triangle YXA}{\triangle Y'X'A'}=k,$$

$$\frac{\triangle YBC}{\triangle Y'B'C'}=k,$$

$$\frac{\triangle YCX}{\triangle Y'C'X'}=k。$$

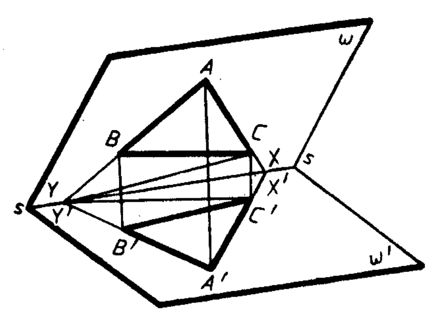


图 1-11

属于上述(1)、(2)情况。

因此

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\frac{\triangle YXA-\triangle YBC-\triangle YCX}{\triangle Y'X'A'-\triangle Y'B'C'-\triangle Y'C'X'}$$

$$=\frac{k(\triangle Y'X'A'-\triangle Y'B'C'-\triangle Y'C'X')}{(\triangle Y'X'A'-\triangle Y'B'C'-\triangle Y'C'X')}=k。$$

（4）两个对应的多角形

因为每个多角形可分为若干个三角形，且多角形的面积可以用组成它的三角形面积来表示。这样，如果用S 和S' 表示多角形面积，σ_i 和 σ'_i 表示分成的对应三角形的面积，则有

$$S=\Sigma\sigma_i;S'=\Sigma\sigma'_i。$$

由于对应三角形面积 $\sigma_i=k\sigma'_i$，因此有

$$S=\Sigma\sigma_i=\Sigma k\sigma'_i=k\Sigma\sigma'_i=kS',$$

即

$$\frac{S}{S'}=k。$$

（5）两个任意形状的对应图形

对于任意形状的图形可作图形的内接多边形。当多边形的边数趋于无限，而每边长趋于零的情况下，多边形面积即为图形的面积。此时，对应多边形面积之比 即对应图形面积之比为定值。

上述亲似对应中的不变性质，是亲似对应的作图依据，掌握这些就可以顺利地作出几何元素的亲似对应图形。两平面场处于同一平面的亲似变换，是亲似对应的一种，因此，上述亲似对应的不变性和不变量同样适用于亲似变换。下面举亲似变换的实例来说明这些性质的应用。

［**例 1**］ 已知亲似轴 ss 和线段 AB，求作线段 $A'B'$ 与 AB 对应，且令 $A'B'$ 等于已知长度 l'，并平行于l'(图 1-12，a)。

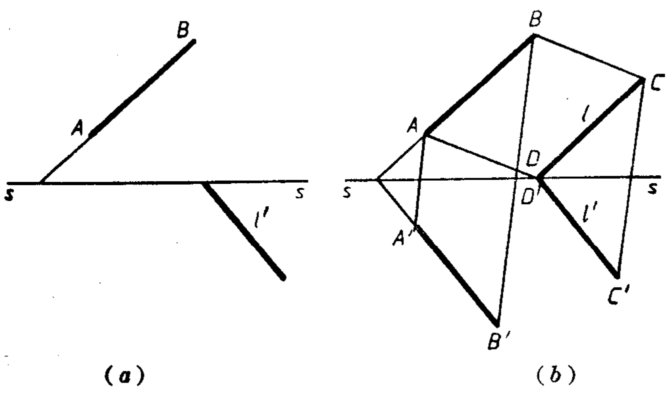


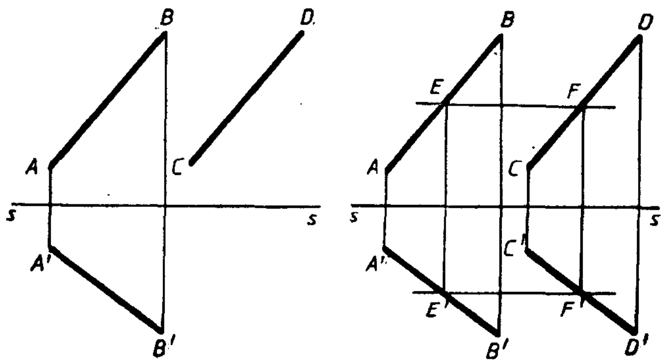
图 1-12

分析： 设 l' 的两端点为 D'、C'(图1-12，b)，D' 在轴 ss 上是二重点，故 D' 与D重合。根据平行性和平行线段之比为不变量的性质，可知 l' 的对应直线 $l(DC)\,/\!/\,AB$，且 $l=AB$。由此，可得出直线 l' 的对应直线 $l(DC)$，从而得出点 C' 的对应点C， 也就确定了亲似方向（由CC' 的连

线表示)。根据亲似方向和对应直线必交于亲似轴上一点的性质，就可以作出 AB 的对应直线 $A'B'$。

作图：如图 1-12, b 所示，按分析的顺序逐步作出，便可得出直线 $A'B'$。

［**例 2**］ 已知平面场 ω 和 ω' 上的一对对应直线 AB 和 $A'B'$，现有直线 CD 与直线 AB 平行，求作直线 CD 的对应直线 $C'D'$(图 1-13, a)。



(a)　　　　　　　(b)

图 1-13

分析：根据亲似变换的平行性，$AB \parallel CD$，则 $C'D'$ 必平行于 $A'B'$。过 AB 上的一点 E 作平行于轴 ss 的直线 EF，则它的对应直线 $E'F'$ 必平行于轴 ss。同时，根据从属性，点 E 的对应点 E' 必在直线 $A'B'$ 上，点 F 的对应点 F' 必在直线 $E'F'$ 上，故直线 $E'F'$ 可以画出。过点 F' 作直线 $C'D'$ 平行于直线 $A'B'$，即得 CD 的对应直线。

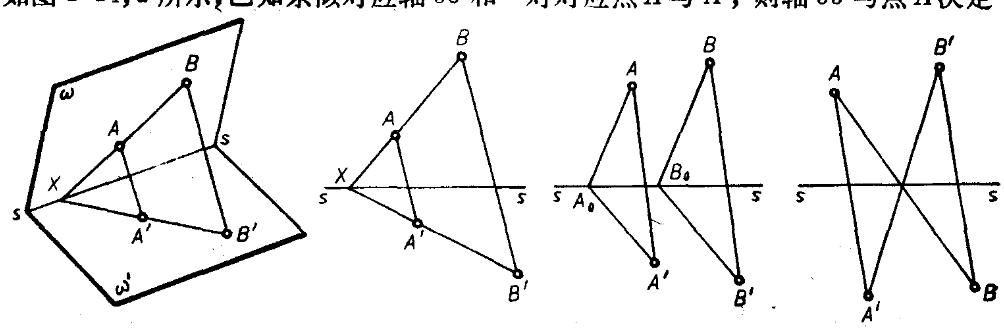
作图：如图 1-13, b 所示，按分析的顺序逐步作出。

四、确定两平面场亲似对应或亲似变换的条件

根据亲似对应的建立情况可知，由两个平面(不处于同一平面)及亲似方向就可确定这两个平面间的亲似对应。而亲似变换是亲似对应的一种，因此，确定亲似对应的条件同样适用于亲似变换。

如果给出亲似对应轴和一对对应点，则两个平面场的亲似对应关系或亲似变换就完全确定。

如图 1-14, a 所示，已知亲似对应轴 ss 和一对对应点 A 与 A'，则轴 ss 与点 A 决定一个平面



(a)　　　　(b)　　　　(c)　　　　(d)

图 1-14

ω；轴 ss 与点 A' 决定另一个平面 ω'。对应点连线 AA' 即为亲似方向。这样，平面场 ω 与 ω' 间的亲似对应关系就完全建立起来了。这时，对于平面场 ω 上任一点 B，总可以在 ω' 上作出唯一的对应点 B'。具体作法是：延长直线 AB，交轴 ss 于点 X；连直线 XA'；再过点 B 作直线 $BB' \parallel AA'$，直线 BB' 与直线 XA' 的交点 B' 即为点 B 的对应点。

当平面场 ω 与 ω' 重合时，即为亲似变换，如图 1-14，b 所示。此时的作图方法与图 1-14，a 一致，只是在同一平面上进行。若直线 AB 与轴 ss 在图纸范围内不相交，则可用另一种方法求对应点 B'。作法如图 1-14，c 所示，即在轴 ss 上任取一点 A_0，连直线 AA_0 与 $A'A_0$；过点 B 作直线平行于 AA_0，交轴 ss 于点 B_0；过点 B_0 作直线平行于 $A'A_0$；再过点 B 作直线平行于 AA'，则上面所作两直线的交点 B' 即为点 B 的对应点。上述后一种方法也叫做相似三角形法，因为 $\triangle AA_0A' \backsim \triangle BB_0B'$。如果把平面 ω 上的一点看作是平面场 ω' 的，标记为 B'，则类似地也可作出平面场 ω 上与其对应的唯一点 B，如图 1-14，d 所示。

运用亲似对应的定义及基本性质，还可以推出其它表达形式。例如：三对不共线的亲似对应点，两对相交的亲似对应直线，一对亲似对应点，一对亲似对应直线等。因为这些条件均相当于给出了两个平面及亲似方向。

从上述可知，确定平面场的亲似对应或亲似变换的表达形式不仅一种，只要满足其中一种，其亲似对应或亲似变换就可确定。确定后，就可作出几何元素的对应图形。下面举例说明。

[例 1] 已知亲似变换的对应轴 ss 和一对对应点 A、A'，试求出直线 AB 的亲似对应直线 $A'B'$（图 1-15，a）。

分析： 根据给定的亲似对应条件，只要作出点 B 的对应点 B'，就可求得直线 $A'B'$。

作图： 如图 1-15，b 所示，延长直线 AB 交轴 ss 于点 X，连 XA' 并把它延长。作直线 BB' 平行于直线 AA'。直线 BB' 与 XA' 交于点 B'，点 B' 是点 B 的对应点。连直线 $A'B'$ 就是直线 AB 的对应直线。

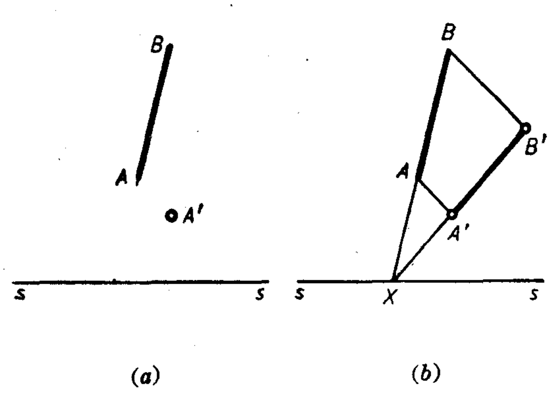


图 1-15

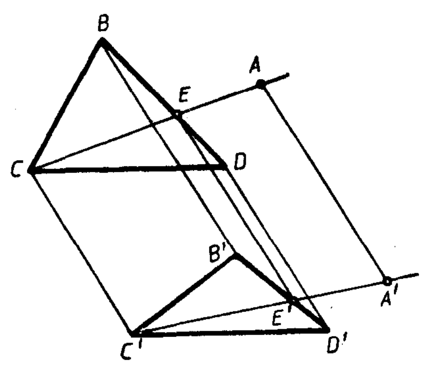


图 1-16

[例 2] 已知亲似变换由 $\triangle BCD$ 和 $\triangle B'C'D'$ 确定，试求点 A 的对应点 A'（图 1-16）。

分析： 根据亲似变换的对应关系和从属性，就可作出点 A 的对应点 A'。

作图： 过点 A 和点 C 的连线 CA 交直线 BD 于点 E。再求出 CE 的对应直线 $C'E'$。然后过点

A 作投射线 AA' 交直线 $C'E'$ 的延长线于点 A'，即为所求。

［**例 3**］ 已知亲似变换由两相交直线对 l_1、l_1' 和 l_2、l_2' 确定，试求 l_3 的对应直线 l_3'（图 1-17）。

分析： 根据亲似变换的性质可求出亲似轴和亲似方向，然后根据亲似变换的对应关系及从属性和平行性等性质，就可作出直线 l_3 的对应直线 l_3'。

作图：

方法一：如图 1-17 所示，由于两对直线 l_1、l_2 与 l_1'、l_2' 是亲似变换的对应元素，故可作出亲似轴 ss，交点 A 与 A' 的连线即为亲似方向。作出直线 l_3 与轴 ss 的交点 D_0，D_0 为二重点。过直线 l_3 上任一点 G 作直线与直线 l_1 和 l_2 分别交于点 E 和 F。求出点 E 和 F 的对应点 E' 和 F'。作出 EF 的对应直线 $E'F'$。最后，过点 G 作投射线 GG'，交直线 $E'F'$ 的延长线于点 G'。过点 D_0、G' 作直线 D_0G'，即为所求。

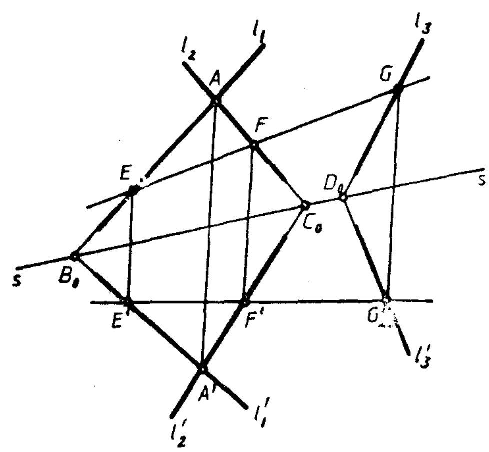


图 1-17

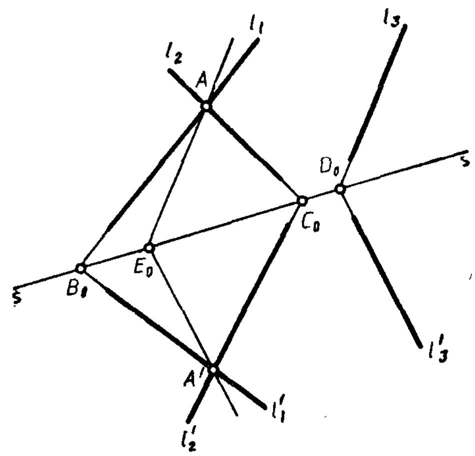


图 1-18

方法二：如图 1-18 所示，作出亲似轴 ss 和直线 l_3 的交点 D_0，过点 A 作 $AE_0 \parallel l_3$，AE_0 与轴 ss 交于 E_0。AE_0 对应于 $A'E_0$。根据平行性，从 D_0 作平行于 $A'E_0$ 的 l_3'，即为所求。

除在已给定的亲似对应或亲似变换下进行作图外，有时还因所给条件的限制，需要先确定一个亲似对应或亲似变换，然后再作对应图形。

［**例 4**］ 已知 $\triangle ABC$ 及亲似轴 ss，试确定一个亲似变换，使 $\triangle ABC$ 的对应图形 $\triangle A'B'C'$ 为一等边三角形，并作出该三角形（图 1-19）。

分析： 根据题意，为确定所求亲似对应，必须在保证 $\triangle ABC$ 的对应图形 $\triangle A'B'C'$ 为等边三角形的前提下找出一对对应点。先作出等边三角形 $A'B'C'$（图 1-19，a）。点 C 和 C' 为所找的一对对应点。根据亲似变换的性质及解题要求，C' 的位置，可以这样确定：过点 C 的直线 CA 和 CB 的延长线，与过点 C' 的直线 $C'A'$ 和 $C'B'$ 的延长线应交于轴 ss 上的点 M 和 N，且 $\angle MCN$ 的对应角 $\angle MC'N$ 应等于 60°。若过 M、N、C' 三点作一圆，则 MN 为圆的弦，$\angle MC'N$ 为弦 MN 所对的圆周角。由此可知，可由 MN 确定出 C' 所在的一个圆。此外，若引直线 $CP \parallel AB$ 交轴 ss

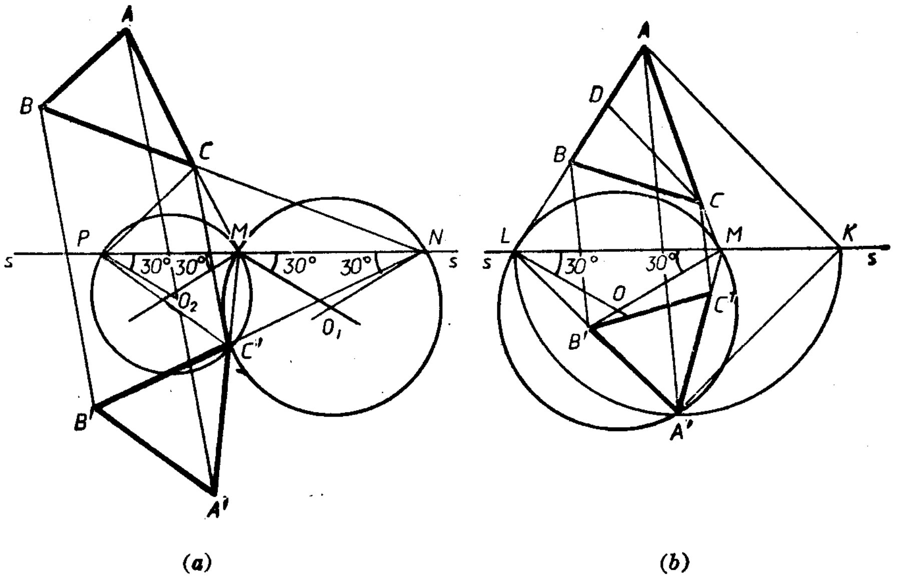


图 1-19

于点P，则$\angle PCM=\angle A$，其对应角$\angle PC'M$应等于60°，又可由PM确定出C'所在的另一个圆。两圆的交点C'即为点C的对应点。

再者，如图1-19,b所示，若过点C作AB边的中线CD，并过点A引直线$AK\parallel CD$，交轴ss于点K，则$\angle LAK$的对应角$\angle LA'K$应为90°，这又可由L、K确定出A'所在的一个圆。同时，还可利用L、M确定出A'所在的又一个圆。从而确定出A'的位置。

作图:

方法一：如图1-19,a所示，延长BC与AC，分别交轴ss于点N与M；过点N与M分别作30°角，得交点O_1；以O_1为圆心，O_1M为半径画圆；同样，还可过点P、M画圆O_2，从而求得点C'。已知亲似轴ss和一对对应点C和C'，就可求得A'、B'。

方法二：如图1-19,b所示，先与上述方法一类似，过点L、M作圆心为O的圆。然后自点C作AB边的中线CD；过点A作直线$AK\parallel CD$，交轴ss于点K。以LK为直径作圆。从而求得点A的对应点A'。再由一对对应点A、A'和轴ss所确定的亲似变换，作$\triangle ABC$的对应图形，即为所求等边$\triangle A'B'C'$。

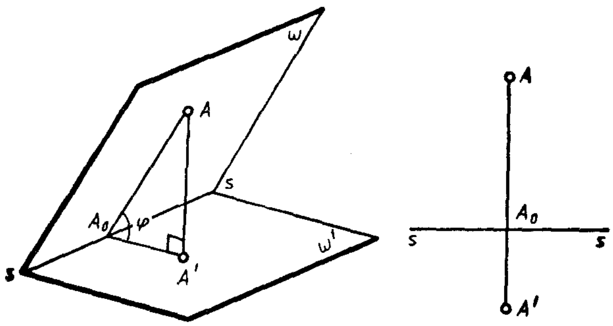
五、平面场亲似对应的特殊情况

一般的亲似对应，它的亲似方向与亲似轴的夹角成任意锐角。如果夹角不成锐角，则有如下的一些特殊情况。

（一）正亲似对应与正亲似变换

如图1-20,a所示，平面场ω与ω'成为亲似对应关系，A、A'为一对对应点。亲似方向AA'垂直（相错垂直）于亲似轴，此时的亲似对应叫做正亲似对应。

包含AA'并垂直于亲似轴的投射平面分别交平面ω和ω'于直线AA_0与$A'A_0$，显然AA_0与



(a)　　　　(b)

图　1-20

$A'A_0$ 是互相对应的直线，同时均与亲似轴垂直。

在特殊情况下，投影线 AA' 不仅垂直于亲似轴 ss，而且垂直于平面场 ω'。这样在直角三角形 AA_0A' 中，$\angle AA'A_0=90°$，$\angle AA_0A'=\varphi$，则可得

$$\frac{A'A_0}{AA_0}=\cos\varphi,\ A'A_0=AA_0\cos\varphi。$$

将两平面之一绕轴 ss 旋转，使两平面重合，则得到图 1-20，b 的情况，即平面到它自身的正亲似对应，叫做正亲似变换。显然，此时的亲似方向仍垂直于亲似轴 ss。

（二）伸缩

伸缩是正亲似变换的特殊情况（例如图 1-21 所示）。当对应点处于亲似轴的一侧，此时的正亲似变换叫做伸缩。

设一对对应点到亲似轴的距离之比为

$$\frac{A'X}{AX}=\lambda,$$

（A 是变换前的点，A' 是变换后的点）这个常数 λ 叫做伸缩比。

当 $\lambda>1$ 时的亲似变换叫做拉伸变换；

当 $\lambda<1$ 时的亲似变换叫做压缩变换。

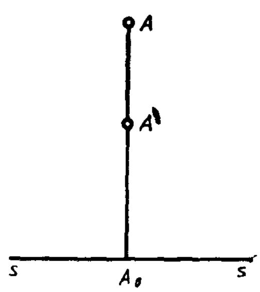
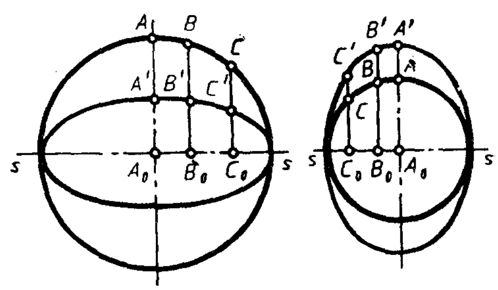


图　1-21



(a)　　　　(b)

图　1-22

利用伸缩变换，我们既可把圆压缩为椭圆（图1-22，a）又可把圆拉伸成椭圆（图 1-22，b）。

(三) 反射

反射是正亲似变换的又一种特殊情况(例如图 1-23 所示)。当对应点处于亲似轴的两侧,且对应点到亲似轴的距离相等,此时的正亲似变换叫做镜面反射(简称反射)或轴对称。成反射对应关系的一对图形是以亲似轴为对称轴 的对称图形,它们的旋 向相反(它们的各 自旋向如图 1-23 所示)。

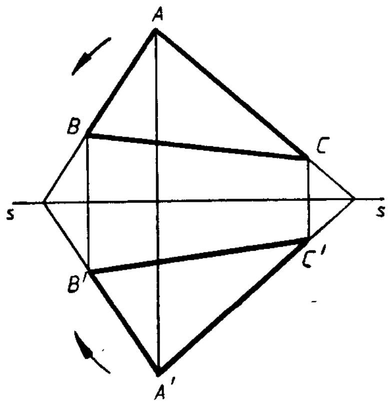


图 1-23

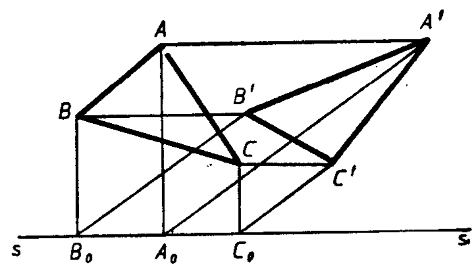


图 1-24

(四) 切移

如果亲似变换的对应方向平行于亲似轴(图 1-24),这种亲似变换叫做切移(或叫 做滑动)。

切移有以下特点:

1. 由于 AA' 与轴 ss 交于无穷远点 $A_{0\infty}$,故比值为

$$\frac{AA_{0\infty}}{A'A_{0\infty}}=1。$$

2. 由于上述原因,从前面亲似变换的性质中关于面积比的结论可以推出, 成切移变换的两对应图形的面积相等。

为了体会特殊情况下的亲似变换在作图中的应用,现举例说明如下。

[例 1] 如图 1-25 所示,已知椭圆的长轴 AB 和短轴 CD,及椭圆外一点 P, 过点 P 作椭圆的切线。

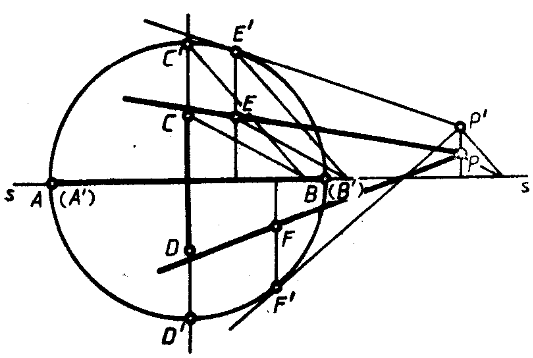


图 1-25

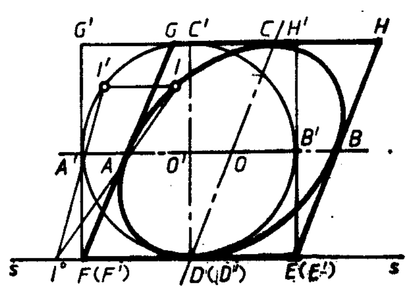


图 1-26