运动稳定性的一般问题讲义

秦元勳编

科学出版社

运动稳定性的一般問題講义

秦 元 勳 編

科 学 出 版 社

1958年8月

內 容 提 要

运动稳定性是常微分方程与自动控制理論中的重大問題，它的理論是傑出的俄罗斯学者李雅普諾夫所奠基的.

本書完整地表述李雅普諾夫第一方法、第二方法以及李雅普諾夫在常系数和周期系数第一临界情形及第二临界情形的全部結果.

本書深入淺出全面無遺地把李雅普諾夫运动稳定性理論从几何拓扑观点来重新考虑，使問題由复杂变成簡易.

运动稳定性的一般問題講义

秦元勳編

*

科学出版社出版（北京朝陽門大街117号）

北京市書刊出版業營業許可証出字第 061 号

中国科学院印刷厂印刷　新华書店总經售

*

1958年8月第一版　書号：1317　印張：14 5/16

1958年9月第二次印刷　开本：850×1168 1/32

（京）1,001—3,164　字数：352,000

定价：(10) 2.40元

为紀念俄罗斯杰出学者

亞力山大·米哈依罗維奇·李雅普諾夫

誕生一百周年及逝世四十周年而編寫

序　言

本書是我於1957—1958年在数学研究所講授运动稳定性的講稿。

运动稳定性是俄罗斯傑出学者李雅普諾夫(А. М. Ляпунов)所奠基的。在常微分方程理論方面和在自动控制技术方面运动稳定性的重要性已經是众所周知的。在苏联李雅普諾夫所开創的这一方向已形成龐大的学派，並正日益發展着。

本書企圖达到兩点：第一点，全面無遺地闡述李雅普諾夫在“运动稳定性的一般問題”中的所有的內容。据我所知，目前各国关於运动稳定性的書籍都只敍述了李雅普諾夫的上述一書的部分結果。第二点，大量地补进計算，及加入若干插圖，使得学習者对困难的問題容易理解。特別使学習者对临界情形的拓扑性質了若指掌。希望本書对数学、力学、自动控制及工程技术工作者能有所帮助，並欢迎讀者批評与指正。

本書承吳松林、王慕秋、刘永清、王联、董金柱、岳明进、王明淑、陈祖浩諸同志繕校並提供了宝貴的修正意見，在同志們的集体劳动下得以躍进为“七一”献礼，这是值得特別感謝的。

承科学出版社和印刷厂的同志大力支持，使得本書能在七月底出版，及时供应了1958年暑期講習班之用，深为感謝。

秦 元 勳

1958年7月1日於数学研究所

目　录

序　言

第一篇　問題与解法

第一章　問題的提法……………………………………………………(1)
§1. 問題的提法. 稳定性的定义……………………………………(1)
§2. 例題……………………………………………………………(4)
§3. 問題的进一步提法………………………………………………(16)
第二章　第一方法……………………………………………………(21)
§1. 形式級数解的公式………………………………………………(21)
§2. 形式級数对有限时間及足够小的初值的收斂性………………(24)
§3. 函数的李雅普諾夫示性数………………………………………(32)
§4. 綫性方程的解的李雅普諾夫示性数……………………………(44)
§5. 正規解組…………………………………………………………(49)
§6. 正常系統与非正常系統…………………………………………(57)
§7. 可約系統…………………………………………………………(68)
§8. 另一种形式級数解………………………………………………(73)
§9. 收斂性定理………………………………………………………(80)
§10. 由收斂性定理导出有关稳定性的結論…………………………(95)
第三章　第二方法……………………………………………………(99)
§1. 若干定义…………………………………………………………(99)
§2. 第二方法的基本定理……………………………………………(101)
§3. 李雅普諾夫函数之作法. 派生行列式之根……………………(111)
§4. 李雅普諾夫函数之作法(續)……………………………………(118)
§5. 李雅普諾夫函数之作法(再續)…………………………………(121)

第二篇　駐定运动之研究

第一章　一般情形……………………………………………………(125)
§1. 特征方程. 解算…………………………………………………(125)

§2．独立积分……………………………………………………（129）
§3．第一方法之应用．羃級数解之收斂……………………（134）
§4．收斂定理……………………………………………………（140）
§5．第一方法关於稳定性的結論……………………………（145）
§6．第一方法的应用．存在力函数的平衡态的不稳定性条件……（149）
§7．第二方法关於稳定性的結論……………………………（153）
§8．第二方法的应用．临界性之証明………………………（155）
§9．第二方法的应用．存在力函数的平衡态的不稳定性条件……（161）
§10．正則系統……………………………………………………（164）
第二章　第一临界情形…………………………………………（177）
§1．說明問題全貌之例…………………………………………（177）
§2．問題之分类…………………………………………………（179）
§3．一般情形稳定性之判定……………………………………（182）
§4．特殊情形稳定性判定的几何意义…………………………（191）
§5．輔助定理……………………………………………………（195）
§6．特殊情形稳定性之証明……………………………………（203）
§7．方法总結．例題……………………………………………（215）
第三章　第二临界情形…………………………………………（220）
§1．概括問題全貌之例…………………………………………（220）
§2．問題化为法式………………………………………………（222）
§3．問題的分类…………………………………………………（230）
§4．一般情形稳定性之判定……………………………………（241）
§5．特殊情形之拓扑性質．級数之收斂性……………………（246）
§6．特殊情形稳定性之証明……………………………………（254）
§7．周期解之計算．稳定性之又一判定法……………………（258）
§8．与 t 無关的正則积分之存在性．稳定性問題之又一判定法…（269）
§9．若干簡捷判定法．有限級数判定法則……………………（292）
§10．例題…………………………………………………………（302）
第四章　周期解之若干定理……………………………………（316）
§1．一类周期解之存在性………………………………………（316）
§2．以初值作参数定义之周期解………………………………（323）
§3．正則积分存在之情形………………………………………（326）

§4. 正則方程之周期解……………………………………………… (330)

第三篇 周期运动之研究

第一章 一般情形………………………………………………… (344)
§1. 特征方程. 对应於單根及重根的解的类型. 解族…………… (344)
§2. 将具周期系数之方程化为具常系数之方程……………………… (354)
§3. 被扰动运动微分方程之研究…………………………………… (357)
§4. 有关稳定性之結論……………………………………………… (362)
第二章 临界情形………………………………………………… (364)
第一临界情形………………………………………………………… (364)
§1. 化为典型方程. 方程分类……………………………………… (364)
§2. 一般情形稳定性之判定………………………………………… (367)
§3. 特殊情形稳定性之証明………………………………………… (373)
§4. 方法之綜述. 例題……………………………………………… (374)
第二临界情形………………………………………………………… (378)
§5. 化为典型方程…………………………………………………… (378)
§6. 問題的分类……………………………………………………… (380)
§7. 一般情形稳定性之判定………………………………………… (385)
§8. 方法之綜述. 例題……………………………………………… (389)
§9. 特别情形的困难所在. 二阶正則系統的情形…………………… (400)
§10. 若干推广………………………………………………………… (404)
第三章 特征方程………………………………………………… (412)
§1. 将不变量展为某些小参数之幂級数的一般定理………………… (413)
§2. 对一个二阶方程的应用………………………………………… (415)
§3. 由微分方程系数的某些泛函关系来决定特征方程之形式…… (426)
§4. 可直接从方程式的形式得出不变量 A_i 之間的关系………… (436)
§5. 特征指数的估計………………………………………………… (440)
§6. 复平面上的計算………………………………………………… (445)

第一篇 問題与解法

第一章 問題的提法

§1. 問題的提法．稳定性的定义

我們研究具有 k 个自由度的物質系統．設

$$q_1(t),\ q_2(t),\ \cdots,\ q_k(t)$$

是 k 个独立变量，它們是时間 t 的函数，並决定了这个物質系統的位置．这組变量对 t 之微分用

$$q_1'(t),\ q_2'(t),\cdots,\ q_k'(t)$$

記之．在一般的力学問題中我們得到 k 个二阶方程

$$\frac{d^2q_i}{dt^2}=\Phi_i\,(q_1,\ \cdots,\ q_k,\ q_1',\ \cdots,\ q_k',t) \tag{1·1}$$

$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ k).$$

任取这組方程之一組特解

$$q_1=f_1(t),\ q_2=f_2(t),\ \cdots,\ q_k=f_k(t).$$

此地 $f_s(t)$ 是 t 之实函数，$-\infty<t<\infty$，或 $t\geqslant t_0$，或 $t\leqslant t_0$．

这組特解表述了这个力学系統的某一特定的运动．服从於同一力学規律但由於不同的初始条件我們得到不同的运动．对於其它运动而言，这个特定的运动我們称之为"未被扰动的运动"；对於这个特定的运动而言，我們称其它的运动为"被扰动的运动"．

用 t_0 表示某个已給定的时間．記

$$q_j\big|_{t=t_0}=q_{j0},\quad q_j'\big|_{t=t_0}=q_{j0}'\quad (j=1,2,\ \cdots,k).$$

即表示 q_j 与 q_j' 在 $t=t_0$ 时之初始値．又設

$$q_{10}=f_1(t_0)+\varepsilon_1,\ q_{20}=f_2(t_0)+\varepsilon_2,\ \cdots,\ q_{k0}=f_k(t_0)+\varepsilon_k;$$

$$q_{10}'=f_1'(t_0)+\varepsilon_1',\ q_{20}'=f_2'(t_0)+\varepsilon_2',\ \cdots,\ q_{k0}'=f_k'(t_0)+\varepsilon',$$

这里 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_k,\varepsilon_1',\cdots,\varepsilon_k'$ 是 $2k$ 个任意实常数，我們称之为“扰动”，或更准确地說，称之为“初始扰动”。任意給定这些扰动量，則初值 $q_{10},\cdots,q_{k0},q_{10}',\cdots,q_{k0}'$ 便确定了，再由微分方程便确定了被扰动运动

$$q_1(t),\ q_2(t),\ \cdots,\ q_k(t).$$

我們將只考慮这些扰动量 $\varepsilon_1,\ \cdots,\varepsilon_k,\ \varepsilon_1',\ \cdots,\ \varepsilon_k'$ 的絕对值相当小的情形，以及由此而决定的被扰动运动。以后我們說到“接近於未被扰动运动的被扰动运动”卽指由絕对值相当小的初始扰动所决定的这些被扰动运动而言。

設

$$\begin{gathered}Q_s=\psi_s(q_1,q_2,\cdots,q_k,q_1',q_2',\cdots,q_k')=\\=\psi_s(q_1(t),q_2(t),\cdots,q_k(t),q_1'(t),q_2'(t),\cdots,q_k'(t))\\(s=1,2,\cdots,n)\end{gathered}$$

是 $q_1,q_2,\cdots,q_k,q_1',q_2',\cdots,q_k'$ 的已給实函数，也可看作函数 $q_1(t)$, $q_2(t),\cdots,q_k(t),q_1'(t),q_2'(t),\cdots,q_k'(t)$ 之汎函，或者看作 t 之函数。卽对於运动的汎函。特别对於未被扰动运动

$$q_1(t)=f_1(t),\cdots,q_k(t)=f_k(t),q_1'(t)=f_1'(t),\cdots,q_k'(t)=f_k'(t)$$

而言，这些量化为

$$\begin{gathered}F_i(t)\equiv\psi_i(f_1(t),f_2(t),\cdots,f_k(t),f_1'(t),f_2'(t),\cdots,f_k'(t))\\(i=1,2,\cdots,n),\end{gathered}$$

它們为 t 之已知函数。

对於其他的被扰动运动而言，$q_i(t),q_i'(t)$ 与初始值 q_{j0},q_{j0}' 有关，而这些初始值又与初始扰动 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_k,\varepsilon_1',\cdots,\varepsilon_k'$ 有关，故 $q_i(t)$, $q_i'(t)$ 是 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_k,\varepsilon_1',\cdots,\varepsilon_k'$ 之函数。將此关系代入 ψ_i 中，則有

$$\begin{gathered}Q_i(t)\equiv\psi_i(q_j(t,\varepsilon_l,\varepsilon_l'),q_j'(t,\varepsilon_l,\varepsilon_l'))\equiv\\\equiv Q_i(t;\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_k,\varepsilon_1',\cdots,\varepsilon_k')\\(i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,k;\ l=1,2,\cdots,k).\end{gathered}$$

卽 Q_i 是 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_k,\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_k'$ 之函数。

特别当

$$\varepsilon_1=\varepsilon_2=\cdots=\varepsilon_k=\varepsilon_1'=\varepsilon_2'=\cdots=\varepsilon_k'=0$$

时，則有

$$q_j(t, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_k, \varepsilon_1', \cdots, \varepsilon_k') = f_j(t),$$

$$q_j'(t, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_k, \varepsilon_1', \cdots, \varepsilon_k') = f_j'(t).$$

由此有

$$Q_j(t) = F_j(t) \quad (j=1,2,\cdots,n).$$

也卽是說，当 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \cdots = \varepsilon_k = \varepsilon_1' = \varepsilon_2' = \cdots = \varepsilon_k' = 0$ 时，对所有的实数 t

$$Q_1(t) - F_1(t) \equiv Q_2(t) - F_2(t) \equiv \cdots \equiv Q_n(t) - F_n(t) \equiv 0.$$

現在的問題是：当 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_k, \varepsilon_1', \varepsilon_2', \cdots, \varepsilon_k'$ 不全为零时，是否諸量 $|Q_i(t) - F_i(t)|$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ 对所有的 $t > t_0$ 均不超过某个給定的值.

这个問題牽涉到下面几方面的关系：

（甲）方程組

$$\frac{d^2 q_i}{dt^2} = \phi_i(q_j, q_j', t) \qquad (i, j=1, 2, \cdots, k).$$

（乙）未被扰动运动

$$f_1(t), f_2(t), \cdots, f_k(t).$$

（丙）函数組

$$Q_1, Q_2, \cdots, Q_n.$$

（丁）初始值 t_0.

以后將看到一般情形 t_0 之选取与問題是無关的.

下面是这个問題的数学提法：

設 $L_1, L_2, \cdots, L_n$ 是任意取定的正数. 如果不論 $L_1, L_2, \cdots, L_n$ 之数值取得如何小，只要取定后，一定可以找到一組正数

$$E_1, E_2, \cdots, E_k, E_1', E_2', \cdots, E_k',$$

使得对於滿足条件

$$|\varepsilon_j| \leqslant E_j, \quad |\varepsilon_j'| \leqslant E_j' \quad (j=1, 2, \cdots, k)$$

的所有实数組 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_k, \varepsilon_1', \varepsilon_2', \cdots, \varepsilon_k'$ 以及所有的 $t \geqslant t_0$，都有下面的不等式

$$|Q_s(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n, \varepsilon_1', \varepsilon_2', \cdots, \varepsilon_n') - F_s(t)| < L_s$$
$$(s=1, 2, \cdots, n),$$

則称未被扰动运动

$$f_1(t), f_2(t), \cdots, f_k(t)$$

关於变量

$$Q_s(q_1, q_2, \cdots, q_k, q_1', q_2', \cdots, q_k') \qquad (s=1, 2, \cdots, n)$$

是“稳定的”。

如果上述之 $E_1, E_2, \cdots, E_k, E_1', E_2', \cdots, E_k'$ 不可能取得使之满足上述不等式，則称未被扰动运动 $f_l(t)$ 关於 Q_s 是“不稳定的”。

§2. 例題

研究万有引力場下的二体問題，設为一个平面运动。在直角坐标下，方程式可写为

$$\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= -K\frac{mM}{x^2+y^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= -K\frac{mM}{x^2+y^2}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \end{aligned} \qquad (2\cdot1)$$

此地 m, M 表示这兩体的質量，K 为万有引力常数。並且有 $m>0$，$M>0$，$K>0$。这个方程的坐标原点卽具質量 M 之質点所在地。要研究具質量 m 之質点之运动。

这个方程表示一个具有二个自由度的物質系統。只要命 $q_1=x, q_2=y$ 卽可得到§1中之方程的形式。

其次任取一組特解

$$x=r_0\cos(\omega_0 t+\delta_0), \qquad y=r_0\sin(\omega_0 t+\delta_0), \qquad (2\cdot2)$$

此地 r_0, ω_0, δ_0 是常数，$r_0>0$。这是一个圓运动。將它看成未被扰动运动来加以研究。

对於 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$ 我們目前分别研究 $n=1$, $Q=x$, $Q=y$, $Q=r=\sqrt{x^2+y^2}$，或 $Q=v=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$ 之各种情形。

我們將分别証明：未被扰动运动(2·2)关於 x 是不稳定的，关於 y 也是不稳定的；而关於 r 則是稳定的，关於 v 也是稳定的。

首先証明 (2·2) 关於 x 是不稳定的.

將 (2·2) 代入 (2·1) 即有

$$-mr_0\omega_0^2\cos(\omega_0 t+\delta_0)=-K\frac{mM}{r_0^2}\cos(\omega_0 t+\delta_0),$$

$$-mr_0\omega_0^2\sin(\omega_0 t+\delta_0)=-K\frac{mM}{r_0^2}\sin(\omega_0 t+\delta_0),$$

亦即

$$r_0^3\,\omega_0^2=KM. \tag{2·3}$$

这是克普勒 (Kepler) 行星运动第三定律的特例. 利用这个頻率与半徑的关系便足以証明 (2·2) 关於 x 是不稳定的.

取定 $L=\frac{r_0}{2}>0$. 不論对於任何 $E>0$, 取定 E 之后一定有实数 η, 它滿足下面的不等式

(i) $|\eta|<E$.

(ii) $\left|\sqrt{\frac{KM}{r_0+\eta}}-\sqrt{\frac{KM}{r_0}}\right|<E$.

(iii) $0<\left|\left(\frac{r_0}{r_0+\eta}\right)^{\frac{3}{2}}\right|-1<\frac{1}{2}$.

这种 η 是存在的,只要取 $\eta<0$, $|\eta|$ 足够小即可.

不妨取初始时刻 $t_0=0$, 則圓运动 (2·2) 之初始条件是

$$x_0=r_0\cos\delta_0,\quad x_0'=-\omega_0 r_0\sin\delta_0=-\sqrt{\frac{KM}{r_0}}\sin\delta_0;$$

$$y_0=r_0\sin\delta_0,\quad y_0'=+\omega_0 r_0\cos\delta_0=\sqrt{\frac{KM}{r_0}}\cos\delta_0.$$

在这个圓运动附近再取一个圓运动:

$$\bar{x}=(r_0+\eta)\cos(\overline{\omega}t+\delta_0),\qquad \bar{y}=(r_0+\eta)\sin(\overline{\omega}t+\delta_0), \tag{2·4}$$

此地频率 $\overline{\omega}_0$ 与半徑 $(r_0+\eta)$ 之关系是

$$\overline{\omega}_0^2(r_0+\eta)^3=KM. \tag{2·3}'$$

这个圓运动 (2·4) 对於未被扰动运动 (2·2) 而言是一个扰动运

动，在 $t_0=0$ 之初始值是

$$\bar{x}_0=(r_0+\eta)\cos\delta_0,\qquad \bar{x}_0'=-\overline{\omega}_0(r_0+\eta)\sin\delta_0=-\sqrt{\frac{KM}{r_0+\eta}}\sin\delta_0;$$

$$\bar{y}_0=(r_0+\eta)\sin\delta_0,\qquad \bar{y}_0'=\overline{\omega}_0(r_0+\eta)\cos\delta_0=\sqrt{\frac{KM}{r_0+\eta}}\cos\delta_0.$$

現將运动 (2·2) 与 (2·4) 相比較，則初始扰动满足不等式

$$|\varepsilon_1|=|x_0-\bar{x}_0|=|r_0\cos\delta_0-(r_0+\eta)\cos\delta_0|\leqslant|\eta|<E\quad(\text{由(i)}),$$

$$|\varepsilon_2|=|y_0-\bar{y}_0|=|r_0\sin\delta_0-(r_0+\eta)\sin\delta_0|\leqslant|\eta|<E\quad(\text{由(i)}),$$

$$|\varepsilon_1'|=|x_0'-\bar{x}_0'|=|-\omega_0 r_0\sin\delta_0+\overline{\omega}_0(r_0+\eta)\sin\delta_0|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\sqrt{\frac{KM}{r_0}}-\sqrt{\frac{KM}{r_0+\eta}}\right|<E\qquad(\text{由(ii)}),$$

$$|\varepsilon_2'|=|y_0'-\bar{y}_0'|=|\omega_0 r_0\cos\delta_0-\overline{\omega}_0(r_0+\eta)\cos\delta_0|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\sqrt{\frac{KM}{r_0}}-\sqrt{\frac{KM}{r_0+\eta}}\right|<E\qquad(\text{由(ii)}).$$

但另一方面可以証明，有無限多个 t_{n_k}, $t_{n_k}\to+\infty$. 当 $n_k\to+\infty$, 使得

$$|x(t_{n_k})-\bar{x}(t_{n_k})|>L=\frac{r_0}{2}>0. \tag{2·5}$$

关系 (2·5) 卽表明 (2·2) 关於 $x(t)$ 是不稳定的。以下証 (2·5)：

由 (2·3), (2·3)′ 及 (iii) 有

$$0<\frac{\overline{\omega}_0}{\overline{\omega}_0}-1=\left|\left(\frac{r_0}{r_0+\eta}\right)^{\frac{3}{2}}\right|-1<\frac{1}{2}.$$

故有（不妨設 $\omega_0>0$）

$$0<\overline{\omega}_0-\omega_0<\frac{\omega_0}{2}.$$

現取

$$t_n=\frac{2\pi}{\omega_0}n-\frac{\delta_0}{\omega_0}\qquad(n=1,2,\cdots),$$

則当 $n\to\infty$ 有 $t_n\to+\infty$ 及 $t_n(\overline{\omega}_0-\omega_0)\to+\infty$. 另一方面有

$$0<(t_{n+1}-t_n)\ (\overline{\omega}_0-\omega_0)<\frac{2\pi}{\omega_0}\ \frac{\omega_0}{2}=\pi,$$

即

$$0<t_{n+1}(\overline{\omega}_0-\omega_0)-t_n(\overline{\omega}_0-\omega_0)<\pi.$$

故有無限多个正整数 n_k，使 $t_{n_k}(\overline{\omega}_0-\omega_0)$ 在第二象限或第三象限之内.

对这种 t_{n_k}，則有

$$t_{n_k}\omega_0+\delta_0=\left(\frac{2\pi}{\omega_0}n_k-\frac{\delta_0}{\omega_0}\right)\omega_0+\delta_0=2\pi n_k,$$

$$t_{n_k}\overline{\omega}+\delta_0=(t_{n_k}\omega_0+\delta_0)+t_{n_k}(\overline{\omega}_0-\omega_0)=2\pi n_k+t_{n_k}(\overline{\omega}_0-\omega_0)$$

在第二象限或第三象限內，因此

$$\cos(t_{n_k}\omega_0+\delta_0)=1,\qquad \cos(t_{n_k}\overline{\omega}_0+\delta_0)<0.$$

从而

$$|x(t_{n_k})-\overline{x}(t_{n_k})|=|r_0\cos(t_{n_k}\omega_0+\delta_0)-(r_0+\eta)\cos(t_{n_k}\overline{\omega}_0+\delta_0)|=$$

$$=|r_0|+|(r_0+\eta)\cos(t_{n_k}\overline{\omega}_0+\delta_0)|\geqslant r_0>\frac{r_0}{2}=L.$$

关系 (2·5) 得証，亦即 (2·2) 关於 x 是不稳定的. 类似可証(2·2)关於 y 是不稳定的.

現在来証 (2·2) 对於 r 是稳定的. 为此，我們要引入極坐标 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$. 对 t 微分，得到

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dr}{dt}\cos\theta-r\frac{d\theta}{dt}\sin\theta,$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dr}{dt}\sin\theta+r\frac{d\theta}{dt}\cos\theta.$$

用 $-y=-r\sin\theta$ 及 $x=r\cos\theta$ 分别乘上兩式再相加，得到

$$r^2\frac{d\theta}{dt}=x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}.$$

这式右方是 t 之函数，我們可証它对 t 是常数，这只要由

$$\frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}=$$

$$=-\frac{mMK}{x^2+y^2}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{mMK}{x^2+y^2}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

即可見之．因此不妨命 $t=t_0$，此时有

$$r^2\frac{d\theta}{dt}=x(t_0)y'(t_0)-y(t_0)x'(t_0)=\Delta_0(x_0, y_0, x_0', y_0'),$$

或簡記之为

$$r^2\frac{d\theta}{dt}=\Delta_0. \tag{2·6}$$

將 x, y 对 t 作二次微分，則有

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d^2r}{dt^2}\cos\theta-2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\sin\theta-$$
$$-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\cos\theta-r\frac{d^2\theta}{dt^2}\sin\theta,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d^2r}{dt^2}\sin\theta+2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\cos\theta-$$
$$-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\sin\theta+r\frac{d^2\theta}{dt^2}\cos\theta.$$

因此，利用 (2·1) 有

$$-\frac{KM}{r}=\frac{d^2x}{dt^2}x+\frac{d^2y}{dt^2}y=$$
$$=r\frac{d^2r}{dt^2}-r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=$$
$$=r\frac{d^2r}{dt^2}-r^2\left(\frac{\Delta_0}{r^2}\right)^2=$$
$$=r\frac{d^2r}{dt^2}-\frac{\Delta_0^2}{r^2}.$$

这对 r 还不易积分，故再引入新变量 $u=\frac{1}{r}$，及用自变量 θ 代 t，則有

$$\frac{dr}{dt}=\frac{dr}{d\theta}\ \frac{d\theta}{dt}=\frac{d\frac{1}{u}}{d\theta}\ \frac{\Delta_0}{r^2}=$$

$$=-\frac{1}{u^2}\ \frac{du}{d\theta}\ \frac{\Delta_0}{r^2}=-\Delta_0\frac{du}{d\theta}.$$

$$\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(-\Delta_0\frac{du}{d\theta}\right)=-\Delta_0\frac{d^2u}{d\theta^2}\ \frac{d\theta}{dt}=$$

$$=-\Delta_0\frac{d^2u}{d\theta^2}\ \frac{\Delta_0}{r^2}=-\frac{\Delta_0^2}{r^2}\ \frac{d^2u}{d\theta^2}=$$

$$=-\Delta_0^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}.$$

代入上面的微分方程即有

$$-KMu=-\frac{\Delta_0^2}{u}u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}-\Delta_0^2u^2,$$

或写成

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=\frac{KM}{\Delta_0^2}. \tag{2·7}$$

这微分方程的通解立即可以写出得

$$u=\frac{KM}{\Delta_0^2}+A\cos\theta+B\sin\theta=$$

$$=\frac{KM}{\Delta_0^2}+A_1\cos(\theta-\theta_0),$$

或

$$r=1\Big/\left\{\frac{KM}{\Delta_0^2}+A\cos\theta+B\sin\theta\right\}=$$

$$=1\Big/\left\{\frac{KM}{\Delta_0^2}+A_1\cos(\theta-\theta_0)\right\}. \tag{2·8}$$

以下要将 A, B 表为初始条件 x_0, y_0, x_0' 及 y_0' 之函数。(2·8) 可以写成

$$Ax+By=1-r\frac{KM}{\Delta_0^2}.$$

对 t 微分有